# 发展空间想象力

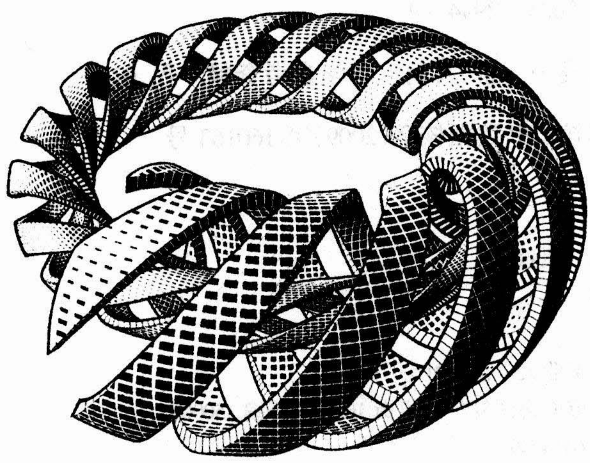
美国哈佛大学教育研究院泽罗研究所的负责人H·加登纳指出：必须强调一下，在各种不同的科学、艺术与数学分支之间，空间推理的介入方式并非是一致的．拓扑学在使用空间思维的程度上要比代数大得多．物理科学与传统生物学或社会科学（其中语言能力相对比较重要）比较起来，要更加依赖空间能力．在空间能力方面有特殊天赋的个体（比如像达·芬奇）便有其实施的选择范畴，他们不仅能在这些领域中选取一种，而且还可以跨领域进行操作．也许，他们在科学、工程及各种艺术方面表现得突出一些．从根本上说，要想掌握这些学科，就得学会“空间语言”，就得学会“在空间媒介中进行思考”．

刘培杰数学工作室 组织编译
马菊红 刘修博等 编译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

# 发展空间想象力

刘培杰数学工作室 组织编译
马菊红 刘修博等 编译



哈爾濱工業大學出版社

## 内容提要

本书共分两编:第一编图形;第二编游戏。它包含一些有助于智力锻炼的习题,这些习题可以帮助读者发展空间想象力,这不仅对于在初年级学习几何是必需的,对于在工科院校很多课程的成功学习也是必需的。它在准备选择未来职业的层面上对学生是有益的。

本书可以作为发展中小学生想象力的专门教程的基础。

**图书在版编目(CIP)数据**

发展空间想象力/马菊红,刘修博等编译.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2009.9

ISBN 978-7-5603-2944-4

Ⅰ.发… Ⅱ.马… Ⅲ.几何-自学参考资料 Ⅳ.018

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 160163 号

策划编辑 刘培杰 甄淼淼
责任编辑 李广鑫
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 20.5 字数 246 千字
版 次 2010 年 1 月第 1 版 2010 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-2944-4
定 价 38.00 元

⊙ 代序

# 谈谈培养空间观念和立体几何作图

裘光明

人类生活在空间中，按理说，空间观念应该是“与生俱来，与日俱增”的，可是事实上却并非每一个人都能很好地设想和描述具有一定空间形式的物体. 对于一般人来说，有这种情况不足为怪，但是对于具有一定数学水平的高等学校学生来说，这种情况是很值得引人注意了. 在高等学校的某些数学课程尤其是制图课程中，学生的空间观念几乎是学好该门课程的必需条件. 由于学生不能很好地设想物体的空间形式，大大影响了该门课程的教学工作的进行.

大家都知道，培养空间观念正是中学几何课程的目的之一；大家也都知道，抽象的空间观念必须通过具体实物的观察才能逐步建立起来. 尽管在中学里有几年的几何课程，而且老师们也总是使用实物和模型进行形象化教学，但同学缺乏空间观念的现象还是甚为严重，原因究竟何在呢？

就我个人看来,原因主要有两方面:一方面在于同学一般的几何知识学得不好,不巩固,影响了他们进一步的几何知识的发展;另一方面则在于同学未能从实物和模型抽象出物体的空间形式,因而实际上还是不具有所要求的空间观念.现在我想专就第二方面的原因提出一些个人的意见,供给大家参考.

实物和模型是形象教学的必备工具,但是在使用实物和模型进行形象教学时,不能不同时注意到的是,使用它们,并非简单地要同学认识这个实物或模型,而是要同学通过对实物或模型的观察,建立起对于这种实物或模型的抽象的观念.这一点在几何教学上尤其重要,因为我们能提供给同学的实物和模型只能是有限的几件,而几何图形却是无限的、千变万化的.要同学通过对有限件实物、模型的观察、体验,抽象出对于一般几何图形的空间观念,当然是非要在整个教学过程中,注意如何培养学生的这种抽象能力不可了.

但是,不管怎样,在几何教学中,从某种程度上说,总是不能脱离实物和模型的,因为不管一个人具有多大的想象能力,当他碰到较复杂的几何图形,而且要在其中解决几何问题时,单凭空想总是解决不了的,幸好,人类还找到了一个很好的几何工具——在平面上画出空间图形.

在平面上画出空间图形,需要一定的几何知识和一定的空间观念,但是反过来,在平面上画出空间图形的能力的提高,同时也就能标志了学生几何知识的提高和空间观念的进一步发展.就这一方面来说,特别是在用综合方法研究问题的中学几何中,作图就成为极重要的一部分内容了.

总之,从几何方面来看,问题转移了方向,培养学生的空间观念的问题变成了培养学生的作图能力的问题.可以这样说,在中学几何教学中,我们不仅是通

过几何知识的讲授,而且更重要的是通过作图能力的培养来树立学生的空间观念.而因为空间的图形都是立体的,这后一种工作特别落在立体几何的教学上,至于平面图形的作图,则只是空间图形作图的预备知识罢了.

那么我们是否能把空间图形的作图当做立体几何的一个内容来讲呢?一般说来是不能这么办的.原因有两个,第一,大家都知道,中学几何又叫做欧几里得几何,研究的是图形在运动(或叫移动,它保持距离不变)下的几何性质,另外加上在相似变换下不变的几何性质.在这种变换下,一个平面图形固然变成一个与原形相等或相似的图形,一个空间图形也是如此,可是假如我们把空间图形的作图看做空间到平面的一个变换的话,那么空间图形经过这种变换就变成了一个平面图形,绝不可能再与原形相等或相似了.所以不管你用什么方法在平面上画空间图形,都要超出欧几里得几何的范围.第二,更主要的是,空间图形常用作图法的普遍原理,远远超出了中学几何中所能包括的几何知识,而属于仿射几何以至射影几何的范围,当然无法放在中学课程里了.

现在我们看到了"树立空间观察"这一个问题的复杂性.要通过几何教学树立空间观念,必须先培养学生的作图能力,而立体几何的作图又不能像平面几何作图一样,作为课程内容的一部分来全面加以讲述,矛盾在这里,困难也就在这里.

然而事实真是这样没有办法解决吗?不,事实上我们的立体几何教科书中依然画着很多插图,而且在立体几何上也还是讲述了一定分量的作图问题和让同学做一定数量的作图题的.而且通过这些,我们的确也使问题有了一定程度的解决.

总之,我们解决问题的方法是:在中学课程的范围内,在学生几何知识所许

可的条件下,对作图问题给予一定的讲述和练习,来培养学生的作图能力.

因此我们有必要来谈一下,在平面上画空间图形有些什么方法,从几何上看,方法是无限的,在不同的科学技术部门中,使用不同的方法,主要是由于对于不同类型的空间图形来说,都有比较适合于这种图形的各种画图法.以地理学为例,画普通地图等于是把球面上的图形画成平面图形,有把经纬线画成长方格的方法,有把经线画成直线而把纬线画成曲线的方法,有把经纬线都画成曲线的方法,在画南北极地图时还有把纬线画成圆的方法.另外在画地形图时,还有所谓画等高线法等.但是假如要说对于一般空间图形都比较适用的方法,通常就只有三种了,那就是蒙日的正投影法、轴测投影法和透视法.这三种方法的统一的特点是直线总画成直线.下面我们就要分别来谈一下这三种画图法.

蒙日的正投影法是工程画中最通用的一种方法,普通画机械零件图、建筑物平面或立面图等都用这种方法.具体说,这种方法的主要步骤是向两个互相垂直的平面作空间立体的正(交)投影.例如,把一个长方体向与其两个面平行的两个平面作正投影时,就得到图1左边的两个图.在这两个图上的长方形,保持了长方体各面的形状大小,因而很容易从图上知道原长方体的长、宽和高,而长方体也就可以完全决定了.从几何方面看来,有了到这样两个垂直平面上的正投影,空间图形的位置就完全决定了.因此,它们的确可以用来表示空间图形.不过,通常在工程画中,为了更好地了解所画对象的空间形式,有时还画出到第三个(与前两平面都垂直的)平面的正投影.

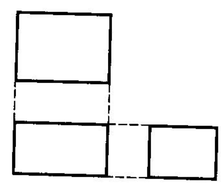
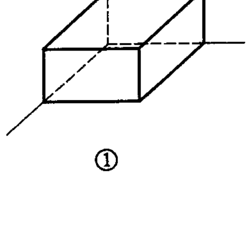


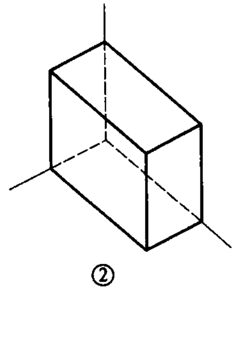
图1

轴测法的主要方法是用平行投影把空间立体投射到一个平面上.在工程画

中采用它作为辅助的方法，在一般的几何学书中，则总是采用这方法来画出空间的几何图形．由于平行投影方向的不同，一个长方体的投影可以有图2①的样子，也可以有图2②的样子．经过平行投影，长方体的各面决无法都保持原来的形状，在图2①中还有一面是长方形，在图2②中则所有各面都成为平行四边形了．所以，要想从空间图形的平行投影恢复它原来的形状大小，还需要辅助的条件．为了这一点，通常还把空间中的一个直角坐标系随同立体一起投射到平面上去．图2就画出了这样的直角坐标系的坐标轴．利用这个直角坐标系，我们才能从图形与坐标系的相互位置知道图形的原来形状和大小，这就是轴测法命名的来源．此外，轴测法中的基本定理告诉我们，直角坐标系的坐标轴在投影到平面上时，不仅可以具有完全任意的相互位置（参看图2②），而且各轴上的单位线段在投影后也可以有完全任意的伸缩比值．这就使我们不能不把问题引向仿射几何学．但是，尽管要弄清轴测法的全部几何原理，非讲仿射几何不可，但假如我们只考虑某些极为特殊的轴测投影，则不谈仿射几何也还是有办法把问题说清楚的．



①



②

图2

透视法的主要方法是从某一个点作为中心把空间立体投射到一个平面上（所谓中心投影）．一般的图画和照片都是透视作图的例子．经过中心投影，尽管

直线变成直线,可是平行直线却可以变成相交直线(例如,图画上的铁轨和街道的两边).因此图形的改变情况比经过平行投影时还要厉害(例如,图3①、②上画的长方体的透视图).此外,为了决定透视图中的图形的形状大小,固然也可以用一个直角坐标系与图形一起投射到平面上去,但那时候实质上将变成射影坐标系,以至要完全说明透视法的原理,非讲射影几何不可.

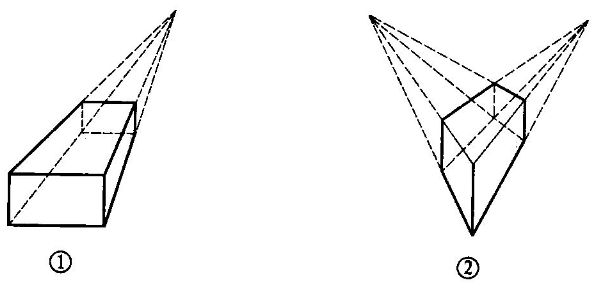


图3

比较一下上述的三种方法,蒙日方法的优点是可以保持图形中某些基本元素的原来的形状和大小,便于恢复原图形;缺点是图形被割裂了,很难引起一个统一的空间观念.透视法的优点是直观,看起来最像原物;缺点是根据图像来恢复原物比较困难.轴测法介于两者之间,一方面它有一个总的图像,看来比较像原物;另一方面,使用一些辅助的手续,根据图像来恢复原物的形状和大小又不太难,在几何书中特别适用,而我们也就要专门来介绍轴测法.

轴测法中的图像是经过平行投影而得到的,让我们先谈一下平行投影的四个重要性质.

(1)直线的投影还是直线(但是当直线平行于投射方向时,其投影是一个点).

(2)平行直线的投影平行.

(3)同一条直线(或者平行直线)上两个线段之比等于其投影之比.

(4)平行于投影所在平面的平面上的图形等于它的投影.

这些结果都可以利用关于平行线的一些定理来证明(证明略).

上面说过,轴测投影中的坐标轴的情况可以是完全任意的.我们只能采用最便于应用的特别情形来讲述.

我们让直角坐标系中的 $YZ$ 平面平行于投影所在的平面,而且把 $YZ$ 平面叫做铅垂平面.于是,根据平行投影的性质(4),铅垂平面(以及与铅垂平面平行的平面)上的图形经过投影得到的是与原图形相等的图形.特别地,$Y$ 轴和 $Z$ 轴(以及与 $Y$ 轴和 $Z$ 轴平行的直线)上的线段经过投影都保持原长不变.

我们还让 $X$ 轴的投影与 $Y$ 轴的投影和 $Z$ 轴都组成 $135°$ 的角:$\angle XOY=\angle XOZ=135°$.我们在 $X$ 轴的投影上取单位线段等于原长的$\frac{1}{2}$(当然我们完全可以另外取角和单位线段,例如,取$\angle XOY=120°$,$\angle XOZ=150°$,取单位线段等于原长的$\frac{2}{3}$等.但是为了避免不必要的混淆,我们以后总保持上述取法).同时我们把 $XY$ 平面叫做水平平面,把 $XZ$ 平面叫做侧立平面.

按照坐标系的这种取法,一个各棱有单位长的立方体,当其各棱分别平行于各坐标轴时,它的投影都有后文提到的图形(图 13①)上所画的形状.

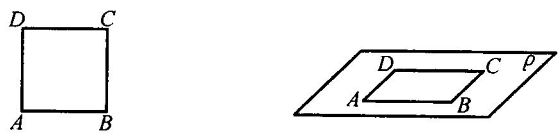
从图 13 也可以看出,铅垂平面上的图形在投影下不变,但是水平平面和侧立平面上的图形则是要改变的,只是水平平面和侧立平面上图形的改变情况现在可以说是一样的.下面我们只预备以水平平面上的图形为例进行比较深入的讨论.我们先来谈一下两个问题:①已知一个图形求它的投影;②已知图形的投影,求原图形.

我们将要举出一系列的例子,在各个例子中,我们都用一个各边平行于 $X$

轴和 $Y$ 轴的投影的平行四边形来代表水平平面.

**例 1**　在水平平面上画一个正方形 $ABCD$. 这时设 $AB$, $BC$ 分别平行于 $Y$ 轴和 $X$ 轴, 在图上分别画成水平的和铅垂的(图 4①), 下同.

在投影图上, $AB$ 不变, $BC$ 只有原长的 $\frac{1}{2}$, 而且 $\angle BAD = 45°$, 画出的 $ABCD$ 是一个平行四边形(图 4②).

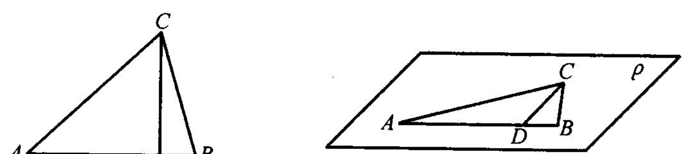



①　　②

图 4

**例 2**　在水平平面上画一个 $\triangle ABC$, 边 $AB$ 是水平的.

作高 $CD$(图 5①). 在投影图上, $AB$ 不变, $D$ 的位置不变, $\angle BDC = 45°$, $CD$ 等于原长的 $\frac{1}{2}$(图 5②).



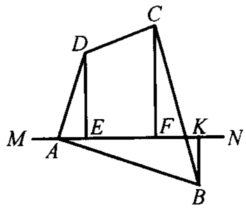

①　　②

图 5

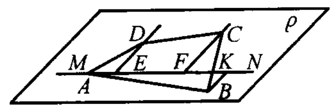
**例 3**　在水平平面上画一个任意的四边形 $ABCD$.

过 $A$ 引水平线 $MN$. 从 $B$, $C$, $D$ 分别引垂直线 $BK$, $CF$, $DE$ 到 $MN$ 上(图 6①). 在投影图上画出水平线 $MN$ 和这直线上的点 $A$, $E$, $F$, $K$, 它们之间的线段都不改变. 过 $E$, $F$, $K$ 分别作线段 $ED$, $FC$ 和 $KB$, 使得 $\angle NED = \angle NFC =$

$\angle MKB = 45^\circ$，而且 $ED$，$FC$ 和 $KB$ 都等于原长的 $\frac{1}{2}$（图 6②）.




①

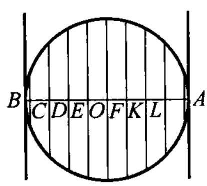



②

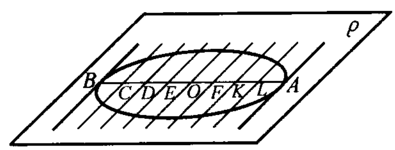
图 6

**例 4**　在水平平面上作出一个已知圆.

引圆的水平直径 $AB$，把它 $n$ 等分（图 7①，图上 $n=8$），过每个分点引铅垂的弦.




①




②

图 7

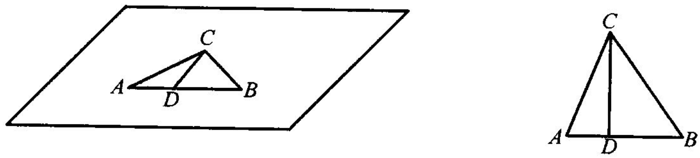
在投影图上，直径 $AB$ 和各分点都不变. 过各分点引直线与 $AB$ 组成 $45^\circ$ 角，在每条直线上都截取以分点为中心的线段，长度等于原图上对应线段的 $\frac{1}{2}$. 这些线段的端点都是圆的投影上的点（图 7②）.

下面引出几个从投影画出原图形的例子.

**例 5**　给了在水平平面上的 $\triangle ABC$ 的投影，其中边 $AB$ 的投影平行于 $Y$ 轴的投影，画出原图形.

在投影图上过 $C$ 引线段 $CD$ 到边 $AB$ 上，使 $\angle CDB = 45^\circ$（图 8①）.

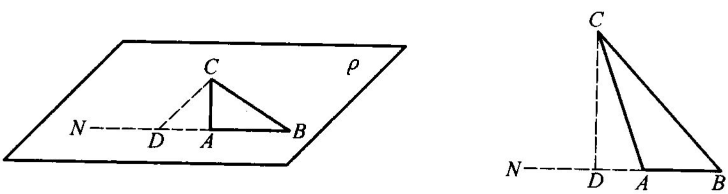
根据投影图直接画出水平线段 $AB$ 和点 $D$,在 $D$ 处作 $AB$ 的垂直线段 $CD$,使其等于投影长的 2 倍(图 8②).




① ②

图 8

**例 6** 同上题,另一个图(图 9①).做法与上题同,这时 $D$ 在线段 $AB$ 外(图 9②).



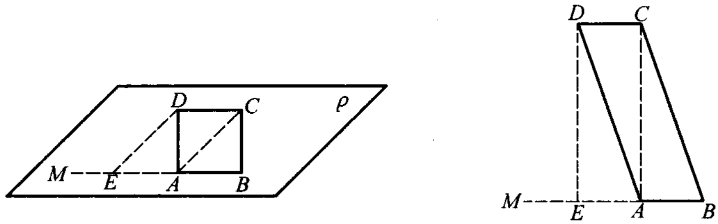

① ②

图 9

**例 7** 在投影图上给了四边形 $ABCD$,其中边 $AB$ 和 $CD$ 同时平行于 $Y$ 轴的投影.

在投影图上过 $C$ 和 $D$ 引直线与 $AB$ 组成 45°角,这时在图上得到点 $E$,而且过 $C$ 的直线正好过 $A$(图 10①).

根据投影图直接画出线段 $AB$ 和点 $E$.过 $A$ 和 $E$ 引 $AB$ 的垂直线段 $AC$ 和 $ED$,并且使 $AC$ 和 $DE$ 都等于投影长的 2 倍(图 10②).



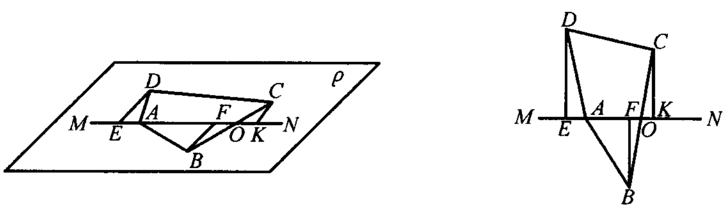

①　　②

图 10

**例** 8　在投影图上给了任意的四边形 $ABCD$.

在投影图上过 $A$ 引直线 $MN$ 平行于 $Y$ 轴的投影. 过 $B,C,D$ 分别引线段 $DE,BF,CK$ 与直线 $MN$ 组成 45°角(图 11①).

根据投影图直接画出水平直线 $MN$ 和其上的点 $A,E,F,K$. 分别在 $E,F,K$ 处作直线 $MN$ 的垂直线段 $ED,FB$ 和 $KC$,各等于其投影长的 2 倍(图 11②).

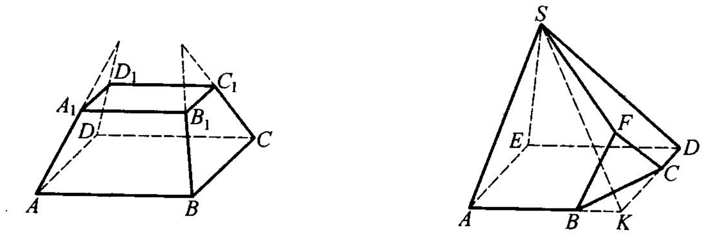



①　　②

图 11

其次我们来画出一些简单的立体的投影,这时我们按一般的惯例,认为立体是不透明的,因而画出的线有可见和不可见之分. 不可见的线通常画成虚线.

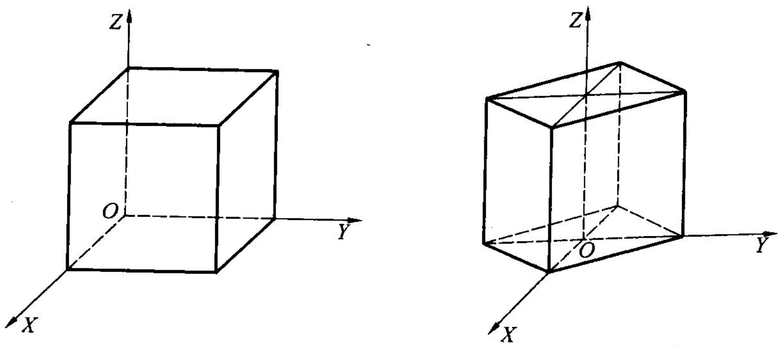
这时我们常常并不难判断一个投影图画得是否正确. 举例说,假定图 12①画的是一个截顶的四棱锥,则它显然是不正确的,因为延长各侧棱并不交于一个点. 又假定图 12②画的是一个截去一角的四棱锥,则它也是不正确的,因为这时底棱 $AB$ 和 $CD$ 的交点 $K$ 并不在侧棱 $SF$ 上.




① ②

图 12

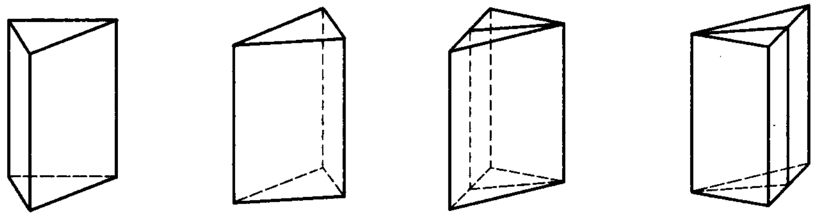
**例 9** 立方体的投影.图 13①前面已经提到过,图 13②上立方体一面平行于水平平面,而这面上的两条对角线则分别平行于 $X$ 轴和 $Y$ 轴.




① ②

图 13

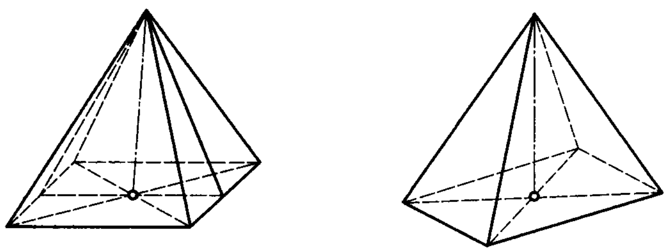
**例 10** 正三棱柱的投影.图 14 上三角柱的底面都平行于水平平面,只是前两种情形(①、②)都有一条底棱平行于 $Y$ 轴,后两种情形(③、④)则是有底面的一条中线(即高)平行于 $Y$ 轴.这时我们像通常画图时一样,没有画出坐标轴的投影.注意图 14④上的轴测投影与我们前面约定的取法稍有不同.



① ② ③ ④

图 14

**例 11** 正四棱锥的投影(图 15①②).



① ②

图 15

**例 12** 正三棱锥的投影(图 16①②).


① ②

图 16

**例 13** 求作一个正三棱锥,它的侧棱两倍于底棱.又求作通过一条底棱而垂直于相对的侧棱的平面截这棱锥的截面.

作出一个正△$ABC$,假定它的中线(即高)$CD$是水平的,作出它的中心$O$(图17①),假定这三角形在水平平面上.

在投影图上作出△$ABC$和中心$O$、中点$D$的投影.以$O$的投影为原点画出直角坐标轴的投影$OX'$,$OY'$,$OZ'$.顶点$S$必在$OZ'$上,而且$CS$等于原长(即等于$AB$原长的2倍).过$D$作线段$DF\perp CS$,△$AFB$就是所求截面的投影(图17②).因为$DF$在铅垂平面上,恢复原状是不难的(图17③).

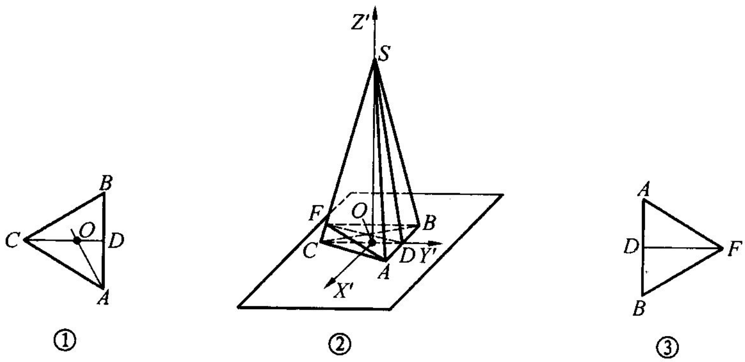



图17

关于多面体被平面所截的问题,我们只预备就立方体的情形说一下.

**例14** 平面与立方体的三条棱相交,已知交点,求截面.

这时只要把三个交点连起三角形就可以(图18).

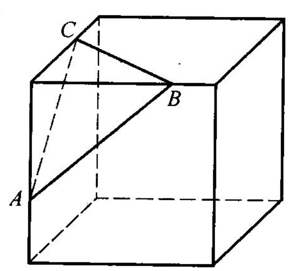



图18

**例15** 平面与立方体的四条棱相交,已知三个交点,求第四个交点.