蘇聯 依·米·伏龍科夫原著

理論力學教程

中　冊

運動學部份

談開孚
黃文虎　等譯校

東北工業部教育處出版

1952年

蘇聯　　依·米·伏龍科夫原著

理 論 力 學 教 程

中　　册

運 動 學 部 份

高 等 工 業 學 校 教 科 書

東北工業部教育處出版
1 9 5 2 年

目　　次

運　動　學

運　動　學

第十一章

點之直線運動

§ 58　緒　言

本書開始研究運動學，運動學是理論力學之一部份，其內容乃從幾何學的觀點來研究機械質點系的運動，特別是剛體的運動。在運動學中所考慮的只是運動之幾何性質，因此在整個研究中並不涉及某些物理概念，例如運動物體的質量以及作用於其上之力等。運動學完全建築在幾何學的基礎上，因此其創立與發展與靜力學不同，毋需另建新的物理的原理（公理）。

假如某物體的位置對於周圍物體來說，或者從幾何學的觀點出發，對於某座標系來說，是隨時間而變的，則此物體對此座標系而言是在運動中；如該物體之位置對於所選座標系而言並不改變，則對於此座標系來說此物體是處於靜止狀態中。正因為觀察物體的運動或靜止狀態所選擇的座標系是任意的，故運動和靜止之概念在實質上為相對的概念。對於不同的座標系，同一物體可以有不同的運動。例如在運動的車廂內有一物體，它對於固結於車廂的座標系來說是靜止的，但對於固結於地球的座標系來說則有一定的運動。

在運動學中所謂決定一物體的運動——意即決定此物體在所選座標系中每一瞬時的位置。

在運動學中時間視為一連續的變化量，而且在運動學的問題中，時間常作為一自變數，並以 t 表示之。

實際上時間是用鐘錶或跑錶來測量的。在力學中採用 $1\text{秒}=\frac{1}{24\cdot3600}$ 平均太陽日為時間單位。

在運動學中當計算時間時，會遇到兩種概念：「**瞬時 t**」及「**時間間隔 t**」。前者意為從某一**初瞬**（計算時間的起始點）到此刻的秒數。例如從物體開始運動時起，或從我們開始觀察物體的運動時起到此刻的秒數。在初瞬時變數 t 之值為零。變數 t 可以有負值，此即指在初瞬以前之各瞬時。**時間間隔**為兩順次瞬時之間的秒數。在兩順次瞬時 t_1 與 t_2 之間的時間間隔等於 t_2-t_1。

在觀察任意物體之運動時，可見到物體之各點往往有不同之運動；例如當車輪沿其軌道滾動時，其軸心沿直線而運動，而輪緣上的任意一點則作曲線運動（旋輪線）；在同一時間內（如當車輪轉過一周時）這兩點所走的路程也不同。因此研究物體之運動必須由研究點之運動開始，亦即從**點之運動學**開始。（[illegible]）

動點在空間所劃過的曲線稱為此點之**軌跡**。如點之軌跡為直線，則此點之運動稱為**直線運動**；其他情況則稱為**曲線運動**。下面就從最簡單的運動——點之直線運動開始。

在運動學中所遇到的長度（如動點之座標，其所經路程的長短等）都採用工程單位制，以公尺度量之。

§ 59　運動方程式與運動圖

設有動點M，其運動軌跡為一直線（圖150）。取此直線為 x 軸，並在軸上任取一點作為座標之原點，則此動點在軌跡上的位置可由其橫座標OM＝x來決定。

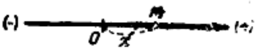

圖　150

因為當M點運動時，對於每一已知瞬時（對於變數t的每一個數值）該點在x軸上都有相應的位置，又因為當M點由某一點移動到另一點時，此點順次地經過介於這二點間一切的點，因此M點之橫座標必為時間之單值連續函數，通常以下式表示之：

$$x=f(t) \tag{1}$$

此方程式稱為**運動方程式**，或稱為M點沿x軸之**運動規律**；從函數 f 的各種不同形式，可得到一點沿已知直線軌跡運動的各種類型。如已知運動規律，即如已知函數 f(t)，則可求出在每一任選瞬時（即對於自變數 t 的每一數值）x 的相應值，並由此即可求得在任一已知瞬時動點M 在軌跡上的位置。欲得點運動特性的明晰概念，通常採用圖解法；方程式（1）所表示的兩變數 x與 t間的函數關係，可以在圖中以曲線表示。此曲線表示動點的橫座標 x與時間 t 的關係，即函數$x=f(t)$之圖，稱為**運動圖**或**距離曲線**。

欲作運動圖，可取二互相垂直之座標軸；在橫座標軸上表示自變數 t 之值；此軸稱為**時間軸**；在縱座標軸上表示x 之值；此軸稱為**距離軸**。表示單位時間與單位距離之比例尺度可以任意選擇。如給 t 以不同之值，則由方程式（1），即可計算出相應之 x值；這樣即可得 x與 t 之一系列對應數值，在圖中按座標即可作出一系列之點。以一連續曲線連結諸點，即得該運動之運動圖。

例如一點之運動規律以下列方程式表之：

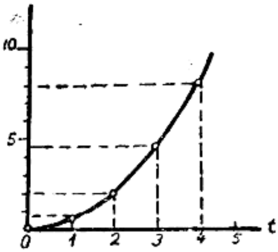

圖 151

$$x=0.5t^2$$

依照此方程式，動點之橫座標與時間之平方成比例而增加。如給 t 以一系列順次之數値，並由已知方程式中求出對應之x値，得下表：

t	0	1	2	3	4	…………
x	0	0.5	2	4.5	8	…………

此處運動圖爲一條二次曲線——拋物線（圖151）。

另舉一例。設M 點從M_0出發後，沿半徑爲 a之圓周軌跡而運動(圖152)。現求m點沿Ox 軸之運動，即M點在水平直徑Ox 上投影之直線運動。設 M點繞周長爲 $2a\pi$ 之圓周轉過一周所需之時間爲 T秒。如該點在每秒鐘內

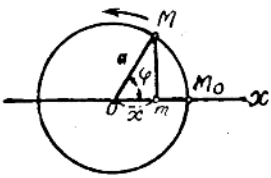

圖 152

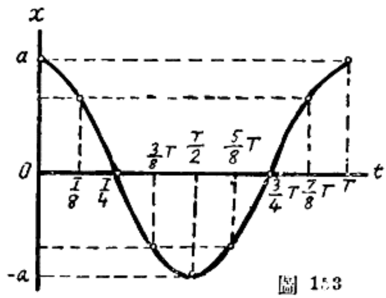

圖 153

經過等長之路程，則在每秒鐘內 M點在圓周上所經過之路程長爲 $\frac{2\pi a}{T}$，而半徑 OM在每秒鐘內所轉過之角度爲 $\frac{2\pi}{T}$（弧度）。則在t秒內半徑OM之角位移φ顯然爲$\frac{2\pi}{T}t$。設Om$=x$，則由直角三角形OMm得：

$$x=a\cos\varphi$$

或

$$x=a\cos\frac{2\pi}{T}t$$

此方程式表示m點在圖內之橫座標與時間之關係，即爲所求m點直線運動之規律。此種運動稱爲**簡諧運動**。O點稱爲**振動中心**，a稱爲**振幅**，$\varphi=\frac{2\pi}{T}t$ 之值稱爲**位相**，而T稱爲**振動週期**。

現作簡諧運動圖。先作座標軸Oxt（圖153），並以任一比例尺度在時間軸上表示出振動週期T之值。將T分成若干等分，例如現分爲八等分。在下列各瞬時

$$t_0=0,\quad t_1=\frac{T}{8},\quad t_2=\frac{T}{4},$$
$$t_3=\frac{3}{8}T,\quad t_4=\frac{T}{2},\quad t_5=\frac{5}{8}T,$$
$$t_6=\frac{3}{4}T,\quad t_7=\frac{7}{8}T \text{及}\ t_8=T$$

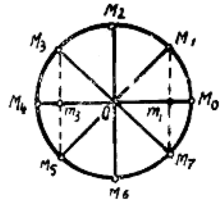

圖 154

動點M處於M_0. M_1. M_2. M_3. M_4. M_5. M_6. M_7 與M_8 之位置（圖154），而其相當之x值爲：

$$x_0 = a,\qquad x_1 = Om_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

$$x_2 = 0,\qquad x_3 = -Om_3 = -\frac{a\sqrt{2}}{2},$$

$$x_4 = -a,\quad x_5 = -\frac{a\sqrt{2}}{2},$$

$$x_5 = 0,\qquad x_7 = \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{及}\ x_8 = a$$

如是得到下表：

t	0	$\frac{T}{8}$	$\frac{T}{4}$	$\frac{3}{8}T$	$\frac{T}{2}$	$\frac{5}{8}T$	$\frac{3}{4}T$	$\frac{7}{8}T$	T
x	a	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$-a$	$-\frac{a\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	a

由x與 t 的座標在圖153上得出九個點。此九個點均在一條曲線上，此曲線稱爲餘弦曲線；因此簡諧運動圖即爲餘弦曲線。

§ 60　點之等速運動

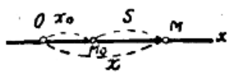

圖 155

設一點在初瞬（當 t＝0 時）位於M_0，沿x軸作等速運動（圖155）。以x_0表示起始距離OM_0，x 表示變橫座標OM，則距離M_0M即爲M點在 t 秒鐘內所經之路程。以 s 表示此路程之長，即得：

$$s = x - x_0$$

如對於任何時間間隔，點所經過的路程與相應時間間隔之比值爲一常數，則此運

動稱爲點之等速運動。

因而在點之等速運動時：

$$\frac{s}{t}=\text{常數}$$

此一路程與時間的不變比值稱爲等速運動的速度，並以v表示之，即

$$v=\frac{s}{t} \tag{2}$$

從而可得

$$s=vt \tag{3}$$

即在等速運動時，點所經過的路程等於速度與時間的乘積，及

$$t=\frac{s}{v} \tag{4}$$

即在等速運動時，點經過某一路程所需之時間等於此路程除以運動的速度。

等式（2）、（3）及（4）爲等速運動的基本公式。如果已知s、v、t中的任何兩個數值，則由這些公式可求出第三個數值。

由（2）式可推出速度的因次爲：

$$[v]=\frac{\text{長度}}{\text{時間}}=\frac{\text{公尺}}{\text{秒}}=[\text{公尺}][\text{秒}]^{-1}$$

例如在時間 t＝10秒鐘內，點所經之路程 s＝20公尺，則點之速度 v 爲20：10＝公尺/秒。

圖解中直線運動的速度以向量表示，此向量之方向沿點之直線軌跡，並與點之運動方向一致。其長短（模）按任意比例尺度表示速度的數值。

在方程式（3）中，以差數$x-x_0$代s，得：$x-x_0=vt$，由此

$$x=x_0+vt \tag{5}$$

方程式（5）表示x及t之間的關係，即爲**等速運動的規律**。因爲在方程式中變數x及t皆爲一次，故**等速運動圖爲一直線**。

火車運行圖即可作爲直線運動圖的例子。

【例55】 第一列火車於3時離開A站，於5時30分到達B站。第二列火車於4時30分離開B站，於7時到達A站。設AB兩站相距75公里，試用圖解法求兩列火車相遇的時間及地點。

【解】 取直線座標軸（圖156），橫座標軸表示時間 t，而縱座標軸表示火車離A站的距離x。設以任選長度的線段（例如0.5公分）在橫座標軸上表示1小時的

時間間隔，而在縱座標軸上表示10公里的距離。先作出第一列火車的運動圖。由題可知，運動圖始點之座標為3與0；末點（當火車到達B站時）之座標為5.5與7.5。作出此二點，以直線連結之，即得第一列火車之運動圖。同樣第二列火車運動圖之始點座標為4.5與7.5，而末點（當火車到達A站時）座標為7與0；作此二點，連以直線，得第二列火車之運動圖。兩直線之交點座標即為火車相遇之時間與地點。從圖156可見，兩火車相遇於5時，在離A站60公里處。

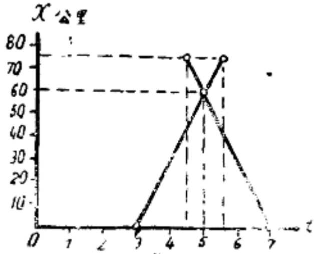

圖 156

【例56】 在4秒鐘內某點沿x軸的正方向以等速度運動，其所經之路程為5公尺。此後該點停止3秒鐘。此後又在相反方向以等速度運動，經過3秒鐘後到達座標原點。設在初瞬點之橫座標$x_0=3$公尺，求作運動圖。

【解】 取直座標軸Oxt（圖157），作運動圖之始點A；因為根據題意在初瞬即$t=0$時$x=3$公尺，故圖內第一點A之座標為0及3。經過4秒鐘後，動點走過5公尺，在瞬時$t=4$秒時，其橫座標$t=3+5=8$公尺。在圖上作出B點，其座標為4及8。連結A點及B點，得到點在停止前的運動圖。繼續停止3秒鐘，在此時間內x值不改變，故在瞬時$t=7$，動點之橫座標仍為$x=8$公尺。在圖內得到C點，其座標為7及8。在運動圖內平行於時間軸的線段BC相當於停止時間。此後點開始運動，經過3秒鐘後到達原點；因而，在瞬時$t=3+7=10$秒，動點之橫座標$x=0$，在圖中作出D點，其座標為10及0。連結CD，得到點在第二次開始運動後的運動圖。折線A B C D即表示整個的運動圖。

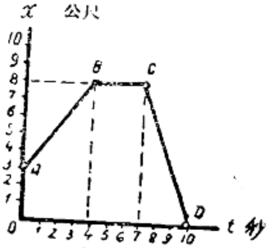

圖 157

現研究如何從已知等速運動圖求此運動之速度。設動點在某瞬時t_1位於軌跡上M_1點，而在瞬時t_2則位於M_2點。x_1表示橫座標OM_1，以x_2表示橫座標OM_2（圖158）。設以s表示在$t=t_2-t_1$時間內點所經之路程M_1M_2；則顯然$s=x_2-x_1$。設以一直線表示此運動圖，此直線與時間軸成α角（圖159），並設線段OA在橫座標軸上表示時間間隔t_1，而線段OB表示時間間隔t_2；則綫段AB表示時

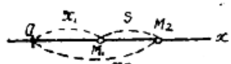

圖 158

間間隔$t_2-t_1=t$秒。再設在運動圖上以縱座標AC表示距離x_1，而以縱座標BD表示距離x_2；則$DE=BD-AC=x_2-x_1=s$。

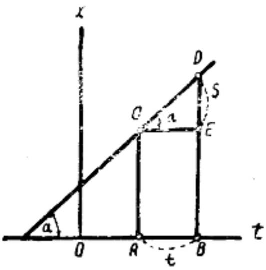

圖 159

現求該運動之速度，以時間t除距離s；卽得

$$v=\frac{s}{t}=\frac{DE}{AB}=\frac{DE}{CE}=tg\alpha \qquad (6)$$

卽**等速運動之速度按其數値等於運動圖與時間軸所成角之正切**。如在畫運動圖時，將時間t與距離x的比例尺取成一致，亦即假如兩個軸上時間與距離之單位用等長線段來表示，則此結果方爲正確。

現求當時間及距離的比例尺不同時速度的表示法。以單位長度之線段（如1公分）在橫座標軸上表示時間間隔τ秒（如60秒），在縱座標軸上表示距離σ公尺（如10公尺），又設線段AB之長爲n單位，而DE爲m單位；則線段AB所表示的時間間隔t爲nτ，DE所表示的路程s爲mσ，故得

$$v=\frac{s}{t}=\frac{m\sigma}{n\tau}$$

但

$$\frac{m}{n}=\frac{DE}{AB}=tg\alpha$$

故此時得

$$v=\frac{\sigma}{\tau}tg\alpha \qquad (6')$$

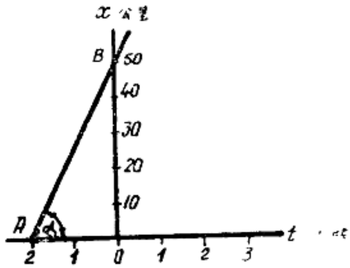

圖 160

【例57】　在圖160中直線AB表示等速運動圖，求此運動的速度。

【解】　由圖可見，在時間軸上單位長度表示時間間隔1小時；故τ=1小時。同一單位長度在x軸上表示距離10公里，故σ=10公里。由三角形OAB得：

$$tg\alpha=\frac{OB}{OA}=\frac{5}{2}$$

由公式（6′），得

$$v=10\cdot\frac{5}{2}=25\text{公里/小時}=\frac{25000}{3600}\text{公尺/秒}\simeq7\text{公尺/秒}$$

§ 61　變速運動之速度

設一點按規律$x=f(t)$沿x軸運動。如$f(t)$爲t的線性函數，則按前節所述，此時運動爲等速運動；而該運動圖爲一直線。現設$f(t)$爲t之任意函數；則運動圖爲

一曲線。這種運動稱爲**變速運動**。

在變速運動中，此點所經之路程與其相當時間間隔比值不爲一常數；換言之，即點在相等時間間隔內所經之距離不相等。

例如，觀察運動方式：$x=2t^2$，此處x以公尺計算，而t 以秒計算。當t=0時，$x_0=0$；設t=1，得$x_1=2$；因而在第一秒鐘內點所經之路程爲

$$s_1=x_1-x_0=2\text{公尺}$$

再設t=2與t=3，得$x_2=8$與$x_3=18$；則在第二秒鐘及第三秒鐘內，點所經之路程各爲

$$s_2=x_2-x_1=6\text{公尺}\quad\text{及}\quad s_3=x_3-x_2=10\text{公尺}$$

如此，可見點在以後的每秒鐘內所經之路程必大於在前一秒鐘內所經的路程；因而，速度之快慢隨時間而逐漸增加。

如取點在變速運動時所經之路程s與其所需時間 t 之比值，則此比值稱爲在該時間間隔 t 內或在該路程s上該點**運動的平均速度**。以v^*表示平均速度；得

$$v^*=\frac{s}{t}$$

在前例中，計算在點開始運動後前 3 秒內該點之平均速度；點在此 3 秒鐘內所經之路程爲

$$s=x_3-x_0=18\text{公尺}$$

因而

$$v^*=\frac{18}{3}=6\text{公尺/秒}$$

平均速度僅說明在某時間間隔內運動之快慢，但不能說明在此時間間隔內之每一瞬時該點運動的情況。因此，除平均速度外，必需求得變速運動之**眞速度**，即點**在該瞬時**的運動速度。

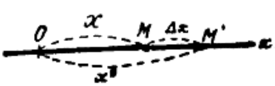

圖161

眞速度或瞬時速度（即相當於已知瞬時）可用下法求得：設在已知瞬時t，點在軌跡上的位置爲M（圖161）。經過某一極短時間間隔Δt秒後，即在瞬時t+Δt，點位於M′；以x'表示距離OM′，則

$$x'=f(t+\Delta t)$$

顯而易見，在時間間隔Δt內點所經之路程等於線段MM′，而

$$MM'=x'-x=\Delta x=f(t+\Delta t)-f(t)$$

因而，在時間Δt內之平均速度爲

$$v^*=\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

使所取之時間間隔Δt逐漸變小，而無限地趨近於零。**當時間間隔Δt趨近於零時，平均速度$\frac{\Delta x}{\Delta t}$所趨近之極限值稱爲點在該瞬時的眞速度**，即：

$$v=\lim_{\Delta t\to 0} v^*=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=f'(t)=\frac{dx}{dt} \quad (7)$$

因之，**直線運動之眞速度等於動點橫座標對時間之導數。**

如導數$\frac{dx}{dt}$爲正值，則x隨時間而增大，此時點沿x軸之正方向運動。

在已知t值時如導數$\frac{dx}{dt}$爲負值，則x隨時間之增加而減少；因此該點沿軸之負方向運動。這樣，**速度之符號即可決定運動之方向。**

以Δs表示點在時間Δt內所經之路程長MM′，則得$\Delta s=\Delta x$。如點沿x軸之負方向運動，則Δx爲負值，即$\Delta x=-\Delta s$。因而，可寫爲：

$$\Delta x=\pm\Delta s$$

由此

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\pm\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$\Delta t\to 0$，取極限值，得：

$$\frac{dx}{dt}=v=\pm\frac{ds}{dt}$$

由此可見

$$|v|=\frac{ds}{dt} \quad (8)$$

即，**眞速度之絕對值等於路程對時間的導數。**

在前例中，當點按規律$x=2t^2$運動時，根據以前所述，其眞速度等於：

$$v=\frac{dx}{dt}=4t$$

由此可見，此運動之速度與時間成比例而增加。設在此方程式中$t=1$、$t=2$、$t=3$，求得在開始運動後一秒鐘、二秒鐘、三秒鐘時眞速度之值爲：

$$v_1=4\text{公尺/秒},\quad v_2=8\text{公尺/秒} \text{ 與 } v_3=12\text{公尺/秒}$$

因此，如已知變速運動之規律而欲以分析法求其眞速度，則只需微分已知函數$x=f(t)$即得。

此題尚可用圖解法解之。如已知運動圖爲一曲線，其方程式爲$x=f(t)$（圖162），須求在已知瞬時t該運動之速度。在曲線上取一點A，其橫座標值即爲已知值t，通過此點作曲

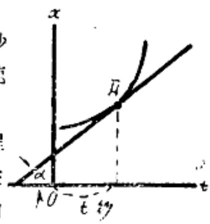

圖162

線之切線；以α表示切線與時間軸所成之夾角。由分析可知，函數$x=f(t)$之導數$\frac{dx}{dt}$即等於切線與橫坐標軸夾角之正切。因而

$$v=\mathrm{tg}\alpha$$

即變速運動眞速度之數值等於運動圖之切線與時間軸所成夾角之正切。

上述結果僅當運動圖中x、t之值以同一比例尺度表示時方爲正確。如x與t之比例尺度不相同，則得：

$$v=\frac{\sigma}{\tau}\mathrm{tg}\alpha$$

即此等式與等速運動中之（6′）式形式完全相同。

從公式$v=\frac{dx}{dt}=f'(x)$求出變速運動的速度爲變數，並爲時間之函數。如用圖解法以一組適當之曲線表示v與t間之函數關係，則曲線稱爲**速度圖**或**速度曲線**。其作法可採用下列步驟：取直座標系，把任意比例尺度在橫坐標軸上表出時間t的數值，在縱坐標軸上表出v之數值。在方程式$v=f(t)$中，給予變數t以各任意值，並算出與之相應的各個v值，在圖中作出相當於t與v各個數值之點，以一連續曲線連結諸點，則得速度圖。

顯然，等速運動之速度圖爲一平行於時間軸的直線。

【例58】 某點按下列規律作簡諧運動

$$x=a\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

求其速度並作速度曲線。

【解】 微分此運動方程式得：

$$v=\frac{dx}{dt}=-\frac{2\pi a}{T}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

因正弦之最大值爲1，故速度之最大值（絕對值）爲$\frac{2\pi a}{T}$；以v_{max}表示此最大之速度，即：

$$v_{\max}=\frac{2\pi a}{T}$$

使t順次等於下列諸值：0、$\frac{1}{8}T$、$\frac{1}{4}T$、$\frac{3}{8}T$、$\frac{1}{2}T$、$\frac{5}{8}T$、$\frac{3}{4}T$、$\frac{7}{8}T$、T，並求出各相應之v值，得下表：

t	0	$\frac{T}{8}$	$\frac{T}{4}$	$\frac{3}{8}T$	$\frac{T}{2}$	$\frac{5}{8}T$	$\frac{3}{4}T$	$\frac{1}{8}T$	T
v	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}v_{max}$	$-v_{max}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}v_{max}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}v_{max}$	v_{max}	$\frac{\sqrt{2}}{2}v_{max}$	0

由上列各座標值在圖163中可作出九個點。以一連續曲線連接之，得一正弦曲線，此曲線即為簡諧運動之速度曲線。

【例59】 當鑛山昇降機作簡諧昇降運動時，其運動規律以下式表示之：

$$h = \frac{H}{2}(1-\cos\varphi)$$

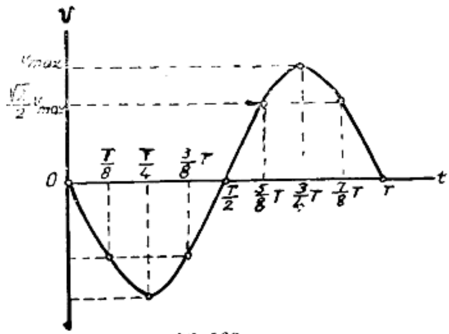

圖 163

其中 H表示昇降機上昇高度，$\varphi=\sqrt{\frac{2a}{H}}t$ 及a=常數。

求昇降機之速度與昇降一次所需之時間T。

【解】 將昇降機運動方程式對t微分，得：

$$v=\frac{dh}{dt}=\frac{H}{2}\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt},$$

但

$$\frac{d\varphi}{dt}=\sqrt{\frac{2a}{H}}$$

因而

$$v=\sqrt{\frac{aH}{2}}\sin\varphi=\sqrt{\frac{aH}{2}}\sin\left(\sqrt{\frac{2a}{H}}t\right)$$

如求昇降機昇降一次所需之時間，則在方程式中使h=H；則得：

$$H=\frac{H}{2}(1-\cos\varphi)$$

由此求出：$\cos\varphi=-1$，因而，$\varphi=\pi$。所求時間T可由下方程式決定

$$\sqrt{\frac{2a}{H}}T=\pi$$

由此

$$T=\pi\sqrt{\frac{H}{2a}}$$

【例60】 直桿AB=l 之兩端沿二定直線Ox與Oy而滑動（圖164）。已知A之速度為v_1，求B點之速度v_2。

【解】 以x表示OA之長，而y表示OB之長；則

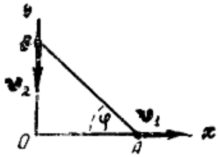

圖 164

$$v_1=\frac{dx}{dt} \quad 及 \quad v_2=\frac{dy}{dt}$$

由三角形OAB得:

$$y^2=l^2-x^2$$

將此方程式對 t 微分，並以$\frac{dx}{dt}$與$\frac{dy}{dt}$之值代入，則得下列方程式:

$$yv_2=-xv_1$$

由此得

$$v_2=-\frac{x}{y}v_1$$

如以φ表示直桿之傾斜角，則$\mathrm{ctg}\varphi=\frac{x}{y}$；因而

$$v_2=-v_1\mathrm{ctg}\varphi$$

負號表示B點沿y軸之負方向運動。

§ 62 根據點速度變化之已知規律求此點所經之路程

設速度隨時間變化之規律爲已知，並以方程式$v=f'(t)$表示之，此處$f'(t)$爲時間的已知函數。設在已知時間間隔$t=t_2-t_1$內（從瞬時t_1到瞬時t_2）點以同一方向沿其跡線而運動，故函數 $f'(t)$ 之符號不變；設$f'(t)>0$，因 $v=\frac{dx}{dt}$，則

$$dx=vdt$$

求此等式之定積分，得

$$\int_{x_1}^{x_2}dx=\int_{t_1}^{t_1}vdt 或 x_2-x_1=\int_{t_1}^{t_2}vdt$$

但差數x_2-x_1爲該點在時間間隔 t 內所經路程之數值；因而

$$s=\int_{t_1}^{t_2}vdt=\int_{t_1}^{t_2}f'(t)dt \tag{9}$$

此公式適用於當速度爲時間的已知函數時路程s之計算。

在此情況下，當$f'(t)<0$時，欲求路程之長s，必須取速度之絕對值，即

$$s=\int_{t_1}^{t_2}|f'(t)|dt \tag{9'}$$

再研究此題之**圖解法**。作速度曲線(圖165)。並按此曲線求出從 t_1 到 t_2 的時間間隔內點所經的路程；令線段 AD表示此時間間隔。將此時間間隔分成n個極短間隔Δt_i。如Δt_i 非常小，則在此時間間隔 Δt_i內速度變化很小；在時間Δt_i內可以看作等速運動，因此，在此時間內點所經路程Δs_i可寫成：

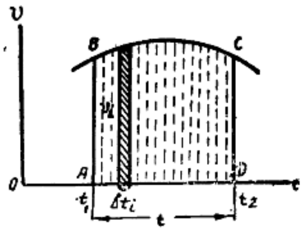

圖 165

$$\Delta s_i \approx v_i \Delta t_i$$

其中v_i為此點在時間間隔 Δt_i 的初瞬時之速度 。圖中劃線之長方形面積素表示$v_i\Delta t_i$之大小。

在時間 t 內該點所經全程的大小等於：

$$s=\Sigma\Delta s_i \approx \sum_{t=1}^{n} v_i\Delta t_i$$

當每一時間間隔Δt_i趨近於零，而n趨近於無限大時，所有長方形面積素之和即為曲線下之面積ABCD，得：

s＝面積ABCD

即：**時間軸、速度曲線及兩端的縱座標所包的面積表示所經路程之大小。**

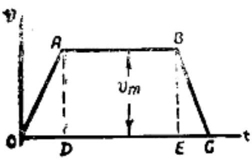

圖 166

設礦山昇降機的速度圖爲梯形OABC(如圖166)。設此昇降機加速運動的時間爲t_1，即 $OD=t_1$，等速運動的時間爲t_2，即$DE=t_2$，減速運動的時間爲 t_3 ，即$EC=t_3$。

以 v_m 表示最大速度，即昇降機等速運動時的速度。則在整個運動時間$t=t_1+t_2+t_3$內所經之路程爲：

$$s = \text{面積}OAD+\text{面積}DABE+\text{面積}EBC$$
$$= v_m\left(\frac{t_1}{2}+t_2+\frac{t_3}{2}\right)$$

按速度圖計算所經路程時， 當然必須注意圖形中表示 t 及 v 的比例尺度 。例如，設在圖 165中速度圖（速度曲線）是畫在公厘方格紙上，並令在橫座標軸上 1 公厘長之線段代表τ秒之時間間隔，而在縱座標軸上每公厘長之線段代表β公尺/秒的速度大小。則以公尺計算之所經路程的大小爲：

$$s=\beta\tau\cdot\text{面積}ABCD$$