# THE PRICING OF ILLIQUID ASSETS: THEORY AND APPLICATIONS

# 不流动资产的定价：理论与应用

冯 玲 著

科学出版社
www.sciencep.com

# 不流动资产的定价：理论与应用

冯 玲 著

本书系教育部人文社科规划基金项目(05JA790016)
及福建省高等学校新世纪优秀人才支持计划项目(XSHRC2007—29)的研究成果

科 学 出 版 社
北 京

## 内 容 简 介

经典的金融经济学主要研究完全市场上的资产定价和最优组合策略，然而，现实中，许多金融市场并不是完全流动和随时可交易的。当市场中存在不流动资产时，市场将变为不完全市场，通常的风险-收益均衡被打破，此时资产如何进行定价？一旦这些不流动资产得以流通，市场整体流动性将会受到怎样的冲击，参与者的最优组合策略和风险资产的价值有何变化？本书给出了答案，并且证明当市场存在不流动资产时，投资者的最优组合策略竟然呈两极分化趋势；不流动性资产的折价率非常大；并基于我国股权分置改革实践进行实证检验。此外，本书的研究成果可以拓展应用于交易受限制资产的或有索取权的估价和组合选择问题，如人力资本、房地产和私人所有权等，此外对全球证券市场发生流动性危机的研究同样具有启迪作用。

可以作为金融专业硕士研究生和博士研究生的教材，同时也是从事资产定价研究的所有证券业、基金业、银行业、保险业研发人员的必备书，同时也可作为风险投资、人力资本等从业人员的研究参考书。

**图书在版编目(CIP)数据**

不流动资产的定价：理论与应用/冯玲著．—北京：科学出版社，2009

ISBN 978-7-03-023968-6

Ⅰ．不…　Ⅱ．冯…　Ⅲ．固定资产估价-研究　Ⅳ．F231.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 013990 号

责任编辑：王伟娟 / 责任校对：桂伟利

责任印制：张克忠 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2009 年 10 月第一版　开本：B5(720×1000)

2009 年 10 月第一次印刷　印张：15 1/2

印数：1—2 000　字数：312 000

**定价：36.00 元**

(如有印装质量问题，我社负责调换)

# 前言

现代理论金融经济学研究的中心问题是金融资产的定价，资产定价的理论基础是市场均衡理论（Arrow and Debreu，1954），投资组合理论（Markowitz，1952），两基金分离定理（Tobin，1958）及无套利假设（Modigliani and Miller，1958）；资产定价中两个最重要的理论成果是资本资产定价模型（CAPM）（Sharp，1964）和期权定价模型（Black 和 Scholes，1973）。在 CAPM 之后，资产定价理论迅猛发展，比如 Breeden（1979）建立的基于消费的资本资产定价模型（CCAPM），Merton（1973）通过假定时间是连续变化的从而提出了跨期 CAPM（ICAPM），结果，连续时间金融框架成为现代金融学最重要的发展。从 20 世纪 70 年代后期以来，动态资产定价（Duffie，1996）的研究重点主要放在弱化 Merton（1973）、Breeden（1979）、Cox 等（1985）所引入框架的基本假设条件，建立动态资产定价的一般框架上。这些经典的金融学理论不仅仅对经济科学，而且对全球的金融市场、机构和商业都产生了深远的影响。但是这些理论都是建立在完全市场的条件下，它们只能对完全市场中的金融资产定价。换言之，这些理论假定金融市场总是流动的，并且参与者任何时候都可以交易。然而，现实中，许多金融市场并不是完美流动和随时可交易的。当市场中存在不流动资产时，市场将变为不完全市场，通常的风险-收益均衡被打破，此时资产如何进行定价？一旦这些不流动资产得以流通，市场整体流动性将会受到怎样的冲击？参与者的最优组合策略和风险资产的价值有何变化？因此，针对动态不完全市场及其向完全市场演变的背景，展开对不流动资产定价的研究具有理论意义。

我国由于历史的原因,股票市场被划分成流通股和非流通股两个完全分割的市场,在股票分置改革前,这实际上是一个不完全的市场,即投资者持有的资产有一部分是可流动的,而另一部分则是不可流动的,由于市场上不流动性资产的存在影响了资产的相对价值,也影响了每个参与者的禀赋的价值和投资组合策略。另外,在允许不流动资产(国有股法人股)市场化交易前,投资者的组合策略承担的风险程度或不可逆性有多大?这个附加的维度是如何影响最优的组合选择?由谁来承担因市场不流动而产生的风险?

股权分置改革是中国证券市场多年来最为重大的一项制度变革,它对市场的估值有着重大的影响。此次改革的目的除了有利于完善公司治理结构外,其直接意义在于解决上市公司非流通股的流通问题,即提高非流通股票的流动性。由于流动性具有价值,因此股权分置改革是一个创造价值的过程,那么非流通股的定价就成为股改的关键问题。在此次股权分置改革过程中,股改公司对价确定采取的是一种所谓分类表决的方式,其基本出发点在于各公司差异较大,无法采取统一的股改方案和对价数额。但实际上股改公司支付的对价却没有发现显著差异反而呈现明显的趋同现象(见 Wind 数据库)。那么到底是什么原因造成这种趋同现象,是什么因素对实际对价产生影响呢?支付的对价合理与否对股改后全流通市场的资产价格将会产生何种影响呢?

从 2008 年 6 月开始,股权分置改革中解禁的非流通股(限售股)开始逐步全流通,其影响不同于以往股市历史中任何一次常规性大扩容,一旦限售股全部解禁完毕实现全流通,中国证券市场实际上就完成了从不完全市场向完全市场的演变。但在这个演变过程中,限售股上市交易所带来的扩容压力不容忽视,那么投资者的组合策略和市场上资产价格将产生怎样的变化呢?

综上所述,中国证券市场正经历以下三个制度背景:股权分置→股权分置改革→股改后限售股流通,中国证券市场正处于从不完全市场向完全市场动态演变的过程中。本书将在前人研究的基础上,研究不完全市场及其向完全市场动态演变过程中不流动资产的定价和最优组合策略问题,旨在解决上述理论和实际问题。应该说我国的资本市场为研究不流动资产定价及最优组合策略提供了独一无二的实验室,股权分置改革过程为研究公司价值和总股本不变条件下的可上市交易股票扩容的价格压力提供了最佳实践平台,因此,研究中国证券市场改革中的不流动资产定价具有理论和现实意义。

# 目录

# 第 1 章

# 资产定价发展的三个世纪

金融资产定价理论可以追溯到 1738 年 Daniel Bernoulli 发表的著名的 St Petersburg 论文。从那时开始，20 世纪发表的许多有重要贡献的论文都在不断影响着资产定价和衍生产品估价的研究，这些早期论文巩固了均值方差最优化、均衡分析和无套利论点等主要思想。本章着重围绕这些对金融学有重要贡献的论文进行历史性回顾。

## 1.1 早期资产定价思想的形成

我们可以将很多现代金融的观点追溯到由 Bernoulli(1738)发表的一篇著名的题为《关于风险衡量的新理论》的论文，该论文于 1738 年发表在圣彼得堡的《皇家科学学术》上。Daniel Bernoulli 的这篇论文，原文是以拉丁文出版的，在 1896 年被翻译成德文，但是直到 20 世纪 50 年代才有了英文的版本，这篇论文被广泛引用在数学、逻辑学以及后来的经济学领域，在该论文中 Bernoulli 阐述了一系列的观点，而这些观点是现代金融经济学的核心。

Bernoulli 在论文中首次提出了期望效用和风险衡量的思路和方法。他检验了"期望值是将各种可能发生的收益乘以发生的次数，然后用这些乘积之和除以可能事件的总数计算出来的"这一命题。他否决了这一方法，因为该方法没有考虑概率事件发生时收益的变化范围。取而代之的是，他提出"确定资产价值不是基于其价格，而是根据它提供的效用的大小"。该论文还提出了边际效用递减概念，

Bernoulli 认为财富的增加将导致效用的增加,而效用又与个人财富中财物的数量负相关。这使他证明了财富的预期变化和机会风险之间的均衡。

在 18 和 19 世纪,Bernoulli 的效用观点被认为是数学而不是经济学的范畴。当然,在那个时代,一些经济学家,如 Bentham 已经独立发展了成为经济学核心元素的效用理论。从 19 世纪后期以来,Bernoulli 的边际效用递减的观点成为经济学的核心,在 Jevons、Menger、Walras 和 Marshall 的著作中都有体现,Bernoulli 同时引进了期望效用最大化的概念。然而,尽管 Laplace 和其他的人都赞同,但是 Bernoulli 的方法对风险存在下的经济学决策几乎没有产生影响,直到出现了 von Neumann 和 Morgenstern(1947)和 Savage(1954)对期望效用理论的发展。

为现代资产定价理论奠定基础的是 1900 年法国数学博士 Louis Bachelier 题为《投机理论》(*Theory of Speculation*)的博士论文,他以全新的方法对股票价格行为进行了研究。Bechelier 的主要创新思路是视股票价格变化为随机过程,买者和卖者在交易股票时对股票价格变化的数学期望都为零(即价格变化服从鞅过程),并且未来股票价格变化的标准差与时间长度的平方根成正比。他试图运用这些新的理念和方法来研究股票价格变化的规律性。Bechelier 的理论对后来的 Black Scholes Merton 期权定价公式所运用的概率论、Ito 定理和随机方程等都有直接影响。

在金融经济学发展史上占有一席之地的另外一位经济学家是 John Burr Williams。他是第一个证明股票价格是由其真实价值,即未来股利现值决定的经济学家,其股利折现模型依然是现在最基本的股票定价理论之一。他在 1938 年出版的《投资价值理论》(*The Theory of Investment Value*)是早期的经典经济学著作之一,该书对投资学和金融学的发展有重要的启发性作用。有"证券投资理论之父"之称的 Markowitz 在其诺贝尔经济学奖自传中高度评价了 Williams 的《投资价值理论》:"我脑海里初始出现证券组合理论概念和框架是在一天下午,当时我正在图书馆里阅读《投资价值理论》。"

现在在经济学中特别是在金融经济学中风险概念已经很普遍了,Knight(1921)对风险和不确定性做了区分。当个体所面临的随机性可以用数值来描述时,不管这些概率是客观的还是个人主观意念的反映,这种情况都被认为是涉及风险。当这些概率不能反映这两种结果的时候,那么这种情形就被认为是涉及不确定性。

在包含风险和不确定性的背景下,Arrow 和 Debreu 提出了一般均衡模型,该模型已经成为经济学和金融学的基础。他们的著作开始于一系列的论文,如著名的 Arrow(1951)、Debreu(1951)、Arrow 和 Debreu(1954)发表的论文。Arrow 和 Debreu 假设市场是完全的,这一假设提供了一般均衡分析的框架。Arrow 和

Debreu 模型可以看做是帕累托有效产出仅仅发生在具有无限数量商品的市场上的情况,然而 Arrow 的框架并不令人满意,因为他的模型仅仅适用于相当完全的市场。

Arrow 关于不完全资本市场中一般均衡的理论是在 1953 年提出的,他指出利用经济的瞬时结构,均衡能够在更为有限数量的市场中实现。他解释了如何通过设立一系列解决不确定性方案下的或有要求权来达到几乎完全的市场,这就提供了一个概念性的框架来支持资产定价理论。

Arrow 关于完全市场的观点是存在这样一个市场,它可能使市场中的个人投资者免受损失,在这个可能使将来的产出免受损失的经济体中,个人投资者可能更愿意承担风险。他给投资者提供的激励是投资者持有分散化的投资组合而不是把所有的鸡蛋放在同一个篮子里。Arrow 的框架为投资者组合决策的进一步结构性分析设立了一个背景。

## 1.2　一般均衡理论

一个经济社会中有众多的商品被生产出来,然后在市场上进行交换和消费。这些不同商品在市场上的活动是相互联系和相互影响的,那么所有商品市场能否同时都达到均衡呢?这个问题就是经济学上众所周知的一般均衡理论,自 Walras 于 1874 年提出并初步讨论了这个问题后,大半个世纪以来许多经济学家都对这个问题作了不懈的努力,但问题始终未获得解决。直到 1954 年 Arrow 和 Debreu 独具匠心地运用了抽象的拓扑学方法才证明了一般均衡的存在性。同时在他们给出的两个福利定理中对 Adam Smith 所谓的“看不见的手”——即分散化的竞争市场使资源达到最优配置,做出了精确而深刻的表述。

### 1.2.1　纯交换经济与一般均衡

我们考虑一个没有生产的经济,经济主体均由消费者构成,每一个消费者都掌握一种或多种商品的一定的初始拥有量(初始禀赋),并在市场上进行交换,这样的经济称为纯交换经济。在纯交换经济中的一般经济均衡存在的问题就是其中是否存在一个一般经济均衡价格体系,根据这一价格体系,所有消费者在预算约束下能够实现消费效用最大化。

现在我们使这一问题数学化。一个纯交换经济 $\xi$ 组成如下:

(1)有 $L$ 种商品,用商品空间 $\mathbb{R}^L$ 表示;

(2)有 $I$ 个消费者,用集合 $I=\{1,\cdots,I\}$ 表示,对于每个消费者 $i\in I$,具有严格单调且严格凸的偏好关系 $\succeq_i$;

(3)在消费集 $\mathbb{R}_+^L$ 上,每个消费者 $i$ 有一个非零的初始禀赋 $\omega^i\in\mathbb{R}_+^L$,$\omega^i>0$,

并且总禀赋 $\omega = \sum_{i \in I} \omega^i$ 是严格正的,即 $\omega \geqslant 0$。

因此,纯交换经济 $\xi$(以下简称为经济)是一个集合

$$\xi = \left\{ (\omega^i, \succeq_i) \middle| \omega^i \in \mathbb{R}_+^L, \omega^i > 0, i \in I, \sum_{i \in I} \omega^i \geqslant 0 \right\}$$

在这个经济体系中,$L$ 种商品的量可以用 $\mathbb{R}^L$ 中的 $L$ 维向量 $z = (z_1, \cdots, z_L)$ 来表示,称为商品向量,其中每一个分量代表每一种商品的量。消费者 $i$ 的效用函数为 $u^i = u^i(z_1, \cdots, z_L)$,他所持有的初始禀赋为 $\omega^i = (\omega_1^i, \cdots, \omega_L^i) \in \mathbb{R}_+^L$,其中 $\omega_l^i (l = 1, 2, \cdots, L)$ 表示消费者 $i$ 所拥有的商品 $l$ 的初始数量。这样,这个经济 $\xi$ 也可以更加明确地表示为 $\xi(u^1, \cdots, u^I; \omega^1, \cdots, \omega^I) = \xi(u, \omega)$。

假定市场上存在一个价格体系 $p = (p_1, \cdots, p_L) \in \mathbb{R}_+^L$,$p_l$ 代表商品 $l$ 的价格($l = 1, \cdots, L$),与该价格体系相对应的消费者 $i$ 的预算集表示为 $B(\omega^i, p)$,则消费者 $i$ 的初始禀赋的总价值为 $p\omega^i = \sum_{l=1}^{L} p_l \omega_l^i, (i = 1, \cdots, I)$。我们来考虑消费者 $i$ 是如何来进行他的消费决策的。这时,一个商品向量 $z$ 的价值为

$$pz = p_1 z_1 + \cdots + p_L z_L$$

因此,消费者 $i$ 可能消费的商品 $z$ 一定要满足

$$pz \leqslant p\omega^i$$

当消费者在既定的预算约束下,实现消费效用最大化时,其处于均衡状态,即消费者面临的就是下列决策问题:

$$\begin{cases} \max & u^i(z) \\ \text{s.t.} & pz \leqslant p\omega^i \end{cases} \tag{1-1}$$

在这个决策问题中,由于 $\omega^i$ 作为初始禀赋是已知的,所以问题的解决完全由价格 $p$ 来决定。然而这一问题不一定有解。下列定理在数学上是资产定价第二基本定理的简化情形,它指出,在效用函数的强单调假设下,问题有解的充分必要条件是不能有非正的商品价格。

**定理 1.1** 在强单调假设下,问题(1-1)有解的充分必要条件为 $p \in \mathbb{R}_{++}^L$,这里 $\mathbb{R}_{++}^L$ 表示所有分量都为正的 $L$ 维向量全体。

**证明** 如果有一种商品的价格 $p_l = 0$,那么令

$$v^l = (0, \cdots, \underbrace{1}_{\text{第}l\text{个}}, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^L$$

对于任何 $z \in B(\omega^i, p)$ 总有 $z + v^l \in B(\omega^i, p)$。由单调假设,$u^i(z + v^l) > u^i(z)$。因此,$u^i$ 在 $B(\omega^i, p)$ 中不可能有最大值。

反之,如果 $p \in \mathbb{R}_{++}^L$,那么对于任何 $z \in B(\omega^i, p)$,显然有

$$0 \leqslant p_l z_l \leqslant p \cdot \omega^i, l = 1, \cdots, L$$

从而 $z_l \in [0, p \cdot \omega^i / p_l]$。这说明,$B(\omega^i, p)$ 是一个有界集,再加上它是个闭

集以及 $u^i$ 是连续函数，问题(1-1)一定有解。

在继续分析问题(1-1)之前，我们还需提出超额需求函数的定义，这是因为我们注意到在市场出清的条件下，全社会的总超额需求必然为零，这对下面的进一步分析很重要。

**定义 1.1** 在经济 $\xi$ 中，超额需求函数(aggregate excess demand function) $Z:\mathbb{R}_{++}^L \to \mathbb{R}_+^L$ 定义为 $Z(p)=\sum_{i=1}^{I}(f^i(p)-\omega^i)$，其含义是总需求与总供给之差。

设 $f^i=f^i(p)$ 是消费者 $i$ 的上述问题的解，那么 $f^i\in\mathbb{R}_+^L$，是在价格 $p$ 时的商品需求，即 $f^i=f^i(p)$ 是消费者 $i$ 的需求函数向量。由于需求函数具有零阶齐次性，可以对价格 $p$ 做规范化处理，使其和为1。

事实上，由于 $\mathbb{R}_+^L$ 是度量空间，在消费集 $\mathbb{R}_+^L$ 上有范数 $\|\cdot\|$。令 $p=\|p\|$ 为新的 $p$ 即可。这样，对于每一个 $p_l$，都有 $0\leqslant p_l\leqslant 1$。

设 $e_1=(1,0,\cdots,0)$，$e_2=(0,1,\cdots,0)$，$\cdots$，$e_L=(0,0,\cdots,1)$。$\mathbb{R}_+^L$ 中的 $e_1$，$e_2,\cdots,e_L$ 的凸组合记为 $S$，显然，$S=\left\{z\,\middle|\,z=\sum_{l=1}^{L}p_le_l,p_l\geqslant 0,\sum_{l=1}^{L}p_l=1\right\}$

称 $S$ 为 $L$-1 维标准单纯形，于是，$p\in S$。

由于我们一般都假定效用函数满足强单调假设，故消费者为达到其最优消费，总是要把钱花光，即对他的最优消费问题，只需考虑收支平衡的情形，也就是每个消费者的总需求的价值等于其初始禀赋的总价值，因此有

$p\,f^i=p\,\omega^i$，$i=1,\cdots,I$

移项得 $p\,(f^i-\omega^i)=0$，$i=1,\cdots,I$

设 $Z_l^i=f_l^i-\omega_l^i$ 为消费者 $i$ 对商品 $l$ 的超额需求，于是上述经济体系的总超额需求价值为 $\sum_{i=1}^{I}\sum_{l=1}^{L}p_lZ_l^i=0$，整理得 $\sum_{l=1}^{L}p_l\sum_{i=1}^{I}Z_l^i=0$，令 $Z_l=\sum_{i=1}^{I}Z_l^i$，则 $Z_l$ 是经济体系的所有消费者对商品 $l$ 的总需求。于是上式可表述为

$$pZ=\sum_{l=1}^{L}p_lZ_l=0$$

由于 $p\in S$，所以总超额需求函数 $Z$ 是 $S$ 到 $\mathbb{R}^L$ 的一个连续函数，即 $Z:S\to\mathbb{R}^L$，且满足 $pZ=0$，于是我们得到瓦尔拉斯定律：对于任意一个价格体系，市场中的所有商品的超额需求的价值总和为零。

由瓦尔拉斯定律可以得到结论：存在一个价格体系(即均衡价格体系)，使得所有市场的总供给和总需求相等，即存在着整个经济体系的一般均衡。

**定义 1.2** 如果存在 $p^*\in S$，使得 $Z(p^*)=0$，则称 $p^*$ 为均衡价格。

因此，经济 $\xi(u,\omega)$ 中的一般经济均衡问题可以表述为：存在一个均衡价格体系 $p^*\in\mathbb{R}_{++}^L$ 和 $z^*=(z^{*1},\cdots,z^{*I})\in(\mathbb{R}_+^L)^I=\mathbb{R}_+^{LI}$，使得

(1)对于任何 $i=1,\cdots,I$，对于任何 $z\in B(\omega^i,p^*)$，$u^i(z)\leqslant u^i(z^{*i})$；

(2) $z^{*1}+\cdots+z^{*I}=\omega^1+\cdots+\omega^I$。

满足这样条件的 $(z^*,p^*)\in\mathbb{R}_+^{LI}\times\mathbb{R}_+^L$ 称为经济 $\xi(u,\omega)$ 中的一般均衡(general equilibrium，GE)。

### 1.2.2 不确定性经济的一般均衡原理

现在，我们将纯交换经济分析推广到包含生产的一般经济分析，经济环境的不确定性是以未来可能发生的自然状态(简称状态)的不确定性来描述的。

把一般均衡分析引入不确定环境中的交易经济和金融市场，从而在消费和生产的均衡模型中把金融经济和一般商品经济结合起来，通过均衡分析来揭示金融资产的价值原理。其中最著名的就是 Arrow-Debreu 证券。

在不确定的状态中，商品(资产)的获得及其效用(价值)依赖于潜在的和随机的外生状态，同时商品向量之间又存在着价值的依存性。所以，要决定和判断商品(资产)的价值，除了要弄清它们与状态之间的关系外，还要弄清它们之间在不同状态中的关系。这些关系随着状态的不同变化而变化，并通过某些内在的均衡决定和影响着不同物品的价值。因此，我们现在要研究不确定环境中经济的一般均衡概念。

我们用自然状态集 $S$，消费者 $i\in I$ 的消费集 $X_i\subset\mathbb{R}^{LS}$ 和禀赋向量 $(\omega_{1s}^i,\cdots,\omega_{Ls}^i)\in\mathbb{R}^{LS}$，以及生产者 $j\in J$ 的生产集 $Y_j\in\mathbb{R}^{LS}$ 和利润分配 $(\theta_{j1},\cdots,\theta_{jI})$ 来描述不确定环境中的市场经济，其中，$\theta_{ji}$ 表示生产者 $j$ 的利润分配给消费者 $i$ 的份额比例。以下主要是给出不确定环境中资源配置的 Arrow-Debreu 均衡。

**定义 1.3** 一个配置 $(x^*,y^*)=(x_1^*,\cdots,x_I^*,y_1^*,\cdots,y_J^*)\in\prod_{i\in I}x_i\times\prod_{j\in J}y_j\subset\mathbb{R}^{LS(I+J)}$ 和一个状态依存商品空间的价格向量 $\boldsymbol{P}=(p_{11},\cdots,p_{L1},\cdots,p_{1S},\cdots,p_{LS})\in\mathbb{R}^{LS}$，如果

(1) 对于每个 $j\in J$ 和 $\forall y_j\in Y_j$，都有 $\boldsymbol{P}y_j^*\geqslant\boldsymbol{P}y_j$；

(2) 对于每个 $i\in I$ 和 $\forall x_i\in X_i$，$x_i^*$ 是在 $\{x_i\mid\forall x_i\in X_i,s.t:\boldsymbol{P}\cdot x_i^*\leqslant\boldsymbol{P}\cdot\omega^i+\sum_{i,j}\theta_{ji}\boldsymbol{P}y_j^*\}$ 的预算约束下实现了效用最大化的最优选择；

(3)市场出清，即 $\sum_i x_i^*=\sum_j y_j^*+\sum_i\omega^i$。

那么，就称该配置和价格向量为一个 Arrow-Debreu 均衡。其中，$\theta_{ji}\boldsymbol{P}y_j^*$ 是生产者 $j$ 依照份额 $\theta_{ji}$ 分配给消费者 $i$ 的红利。

同时，我们还必须提到一个与一般均衡，紧密相关的问题，就是所谓的“资源最优配置”问题。假如一般均衡存在，经济处于某种稳定状态，接下来的一个重要问

题是，这样的稳定状态是否有效率地配置了有限的资源。或者说，有没有可能改善某些成员的福利而不降低其他成员的福利？一般均衡是否帕累托最优？

**定义 1.4** 对于任意一个配置 $(x,y)=(x_1,\cdots,x_I,y_1,\cdots,y_J)\in\mathbb{R}^{LS(I+J)}$，如果满足 $\sum_i x_i \leqslant \sum_i \omega^i + \sum_j y_j$，则称为可行配置。

**定义 1.5** 一个可行配置 $(x,y)=(x_1,\cdots,x_I,y_1,\cdots,y_J)\in\mathbb{R}^{LS(I+J)}$ 称为是帕累托最优的，如果对于每个消费者 $i$，不存在任何其他的可行配置 $(x',y')=(x'_1,\cdots,x'_I,y'_1,\cdots,y'_J)\in\mathbb{R}^{LS(I+J)}$，使得 $u^i(x'_i)\geqslant u^i(x_i),i=1,\cdots,I$ 成立。

在现代经济学理论中，一般均衡即，是瓦尔拉斯均衡同时也是帕累托最优的。这就是著名的福利经济学基本定理。

**定理 1.2** （福利经济学第一基本定理） 如果 $(x^*,y^*)$ 是一个瓦尔拉斯均衡，那么 $(x^*,y^*)$ 是帕累托最优配置。

福利经济学第一基本定理说明了市场均衡配置是一种最优状态，它从理论上系统地刻画了竞争市场的机制，并用数学模型严格地证明了这一机制在资源配置方面的卓越效率，从而给予“看不见的手”以明确的理论内容——这“看不见的手”就是均衡价格。

这条“福利经济学第一基本定理”的“逆定理”也成立，即对每一个帕累托最优配置都存在某一价格体系，使得它们形成一般均衡，它称为“福利经济学第二基本定理”。

对于 Arrow-Debreu 均衡，其帕累托最优性的经济含义是指在均衡时，状态依存的商品交易结果是导致有效率的风险配置，风险是有报酬的。之所以有风险是由于现在商品向量的可获得性和效用都依赖于状态，即是状态依存的。

在状态依存的 Arrow-Debreu 均衡中，在理性预期或自我实施的假设下，可以通过不确定性因素消除后的现期交易来实现有效的交易均衡。也就是说，人们在做选择时，首先要考虑风险的概率分布或收益的可获得性，然后才根据资源之间的相对稀缺性做出选择决策。所以，在资产价格的决定中，一种资产的价值取决于该资产与其他资产的均衡变化关系。这也是一般均衡理论与金融理论的基本关系。

### 1.2.3 金融市场一般均衡分析

这里，我们主要讨论完备金融市场的一般均衡问题。我们仍假定市场上有 $I$ 个消费者(同时也是投资者)，$K$ 种证券，经济中有现在和未来两个时期，分别以 0 时期和 1 时期表示，并且在 1 时期，经济处于某种状态 $s$，$s=1,\cdots,S$。

消费者 $i$ 对状态的概率估计由向量 $\boldsymbol{\Pi}_i=(\pi_{i1},\cdots,\pi_{is})$ 给出，其中对于任意的 $i,s$，$\pi_{is}>0$。消费者 $i$ 的效用函数表示为 $u_{is}(c_{i0},c_{is})$，这里，$c_{i0}$ 是 0 时期的消费水平，$c_{is}$ 是 1 时期的消费水平，$c_{is}$ 表示消费者 $i$ 在 1 时期的消费水平依赖于他在状态

$s$ 下的投资,即证券组合。

在 0 时期,消费者将其初始财富在现期消费 $c_{i0}$ 和从一个以 $k$ 标记的证券集合 $K$ 中选择出来的证券组合之间进行分配。每种证券在 1 时期支付的收益为 $\phi_{ks} \geqslant 0$。令 $\theta_i = (\theta_{i1}, \cdots, \theta_{ik})$ 表示消费者 $i$ 在 0 时期持有的证券组合的数量,每一个分量 $\theta_{ik}$ 表示消费者 $i$ 在 0 时期购买的证券 $k$ 的数量,则当状态 $s$ 发生时,其证券组合 $\theta_i = (\theta_{i1}, \cdots, \theta_{ik})$ 所产生的收益为 $\sum_{k \in K} \theta_{ik} \phi_{ks}$。当金融市场是竞争和有效时,交易成本和税收不存在,证券和商品都是可分的,投资者所得的全部收益都用于消费,则 $c_{is} = \sum_{k \in K} \theta_{ik} \phi_{ks}$。

于是,每个消费者 $i$ 在两期内的总可支出的预算为

$$c_{i0} p_0 + \sum_{k \in K} \theta_{ik} p_k \tag{1-2}$$

其中,$p_0$ 是一个单位的 0 时期消费价格水平,$p_k$ 是证券 $k$ 的价格。则消费者要在此预算约束下,实现配置 $(c_{i0}, \theta_{ik})$ 的效用最大化

$$\max\left\{ u_i = \sum_s \pi_{is} u_{is} \left( c_{i0}, \sum_{k \in K} \theta_{ik} \phi_{ks} \right) \right\} \tag{1-3}$$

根据金融学原理,如果市场是完备的,那么资产组合就不存在限制。因此,当每一种状态 $s$ 发生时,都可以从 $c_{is} = \sum_{k \in K} \theta_{ik} \phi_{ks}$ 中解出 $(\theta_{i1}, \cdots, \theta_{ik})$。这里只需利用线性代数中的求逆矩阵的方法,求出 $(\phi_{ks})$ 构成的矩阵的逆矩阵便可以了。金融学有一个非常重要的结论:当金融市场完备时,由 $(\phi_{ks})$ 构成的矩阵可以化为对角矩阵。在很多金融研究中,用矩阵 $(\phi_{ks})$ 的秩来定义金融市场的完备性,即金融市场完备的充分必要条件是矩阵 $(\phi_{ks})$ 是满秩的。

这样,式(1-2)和式(1-3)就可以转化为

$$c_{i0} p_0 + \sum_{s \in S} c_{is} p_s \tag{1-4}$$

和

$$\max\left\{ u_i = \sum_{s \in S} \pi_{is} u_{is} (c_{i0}, c_{is}) \right\} \tag{1-5}$$

因为现在 1 时期的消费水平 $c_{is}$ 表现为一种证券组合,所以在式(1-4)中,$p_s$ 是证券组合 $c_{is}$ 在状态 $s$ 下的价格。由式(1-4)和式(1-5)构造拉格朗日函数,然后对 $c_{i0}$ 和 $c_{is}$ 分别求一阶均衡分析,即对 $u_i = \sum_{s \in S} \pi_{is} u_{is} (c_{i0}, c_{is})$ 分别对于 $c_{i0}$ 和 $c_{is}$ 求一阶偏导数,从而得到

$$\sum_{s \in S} \pi_{is} \frac{\partial u_{is}(c_{i0}, c_{is})}{\partial c_{i0}} = \lambda_i p_0, \forall i \tag{1-6}$$

$$\sum_{s \in S} \pi_{is} \frac{\partial u_{is}(c_{i0}, c_{is})}{\partial c_{is}} = \lambda_i \sum_{s \in S} p_s, \forall i \tag{1-7}$$

其中，在式(1-6)和式(1-7)中的 $\lambda_i$ 是对应于式(1-2)的拉格朗日因子。由式(1-6)和式(1-7)，我们就得到

$$\frac{\sum_{s\in S}\pi_{is}\dfrac{\partial u_{is}(c_{i0},c_{is})}{\partial c_{i0}}}{\sum_{s\in S}\pi_{is}\dfrac{\partial u_{is}(c_{i0},c_{is})}{\partial c_{is}}}=\frac{p_0}{\sum_{s\in S}p_s} \tag{1-8}$$

如果注意在得到式(1-8)结果的过程中，其中有

$$c_{i0}p_0+\sum_{k\in K}\theta_{ik}p_k=c_{i0}p_0+\sum_{s\in S}\left(\sum_{k\in K}\theta_{ik}\phi_{ks}\right)p_s$$

这个关系意味着金融市场是出清的，从而说明了在完备的金融市场中，金融市场均衡与纯交换经济的一般均衡在原理上是完全一样的。

式(1-8)就是在金融市场完备的经济中，消费者的选择结果，也就是在消费与投资之间资源配置的帕累托最优结果。

然而，不完备市场的均衡存在问题要复杂得多。金融市场模型是由 Radner(1972)首先提出的，并且他在对卖空有上界(不能无限制地卖空)的条件下，证明了均衡的存在。但是 Hart(1975)用反例指出，不完备金融市场的一般均衡可能不存在。这使得这方面的研究长期停滞不前。直到 1985 年，Duffie 和 Schafer(1985，1986)用相当复杂的数学方法指出，对于“绝大多数”的不完备市场，均衡还是存在的。不完备市场的均衡不能达到帕累托最优配置，是人们曾经想到的。其原因主要由于市场不完备，风险不能完全规避，仅仅通过交易似乎不能达到最优。不完备市场的一般均衡(general equilibrium of incomplete markets，GEI)理论在近十几年来有很大发展。Magill 和 Quinzili(1997)是近年来这方面出现的内容非常丰富的专著。

## 1.3 投资组合理论和风险测度

### 1.3.1 组合选择

随着 Markowitz(1952)有关组合选择论文的公开发表，金融学有了很大的改观。自从 Bernoulli 时代开始，很显然个人投资者愿意增加他们的财富，也愿意使得任何与潜在收益相关的风险实现最小化。但是，这两个准则能联系起来吗？Markouitz 思考并否决了这种观点：存在一个投资组合可以同时给出最大的预期收益和最小的方差。他认为“最大期望收益的组合未必是最小方差的组合。存在一个比率，以这个比率投资者可以在风险和预期收益中做出权衡(tradeoff)，即通过承担方差来获得期望收益，或者通过放弃期望收益来减小方差。”

Markowitz 最重要的贡献在于他区分了单个证券的收益变化和它对组合风险