变分法及有限元讲义

钱伟长编著

（第5—7章）

9

山东工學院

1 9 7 8

第五章

弹性力学塑性力学及有关问题的变分原理

§5·1 弹性力学中的最小位能原理和最小余能原理

在本章内我们将采用卡氏张量符号。

用 x_i 表示三个卡氏坐标，即 x_1，x_2，x_3（或 x_i，$i=1,2,3$）。有关的三个位移分量为 u_i，即、u_1，u_2，u_3（或 u_i，$i=1,2,3$）。六个应变分量为 e_{ij}，即 e_{11}，e_{22}，e_{33}，$e_{12}=e_{21}$，$e_{23}=e_{32}$，$e_{31}=e_{13}$。它们和位移的关系在小位移的条件下可以写成：

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i},_{j}+u_{j},_{i}) \qquad (5\cdot1)$$

其中 $u_{i},_{j}$ 为 $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ 的简写，以后凡是（　　），j 都是表示 $\frac{\partial}{\partial x_j}$（　）。同样 $u_{j},_{i}$ 为 $\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$。

六个应力分量可以写成 σ_{ij}（即 σ_{11}，σ_{22}，σ_{33}，σ_{12}，σ_{23}，σ_{31}）。各向异性弹性体的应力应变关系可以写成

$$\sigma_{ij}=\sum_{K,\ell=1}^{3} a_{ijK\ell}\,e_{K\ell} \qquad (5\cdot2)$$

其中 $a_{ijK\ell}$ 为弹性常数，而且

$$a_{ijK\ell}=a_{jiK\ell}=a_{ij\ell K}=a_{ijK\ell}$$
$$(i,j,K,\ell=1,2,3) \qquad (5\cdot3)$$

所以共有21个独立常数，（5·2）中右边，共有 K，ℓ 两个指标在同一项中重复，即 $a_{ijK\ell}$ 中的 $K\ell$，和 $e_{K\ell}$ 的 $K\ell$。当 K，ℓ 从1到3历经各数求和时，（5·2）式可以写成

$$\sigma_{ij}=a_{ij11}e_{11}+a_{ij22}e_{22}+a_{ij33}e_{33}+2e_{ij23}e_{23}$$
$$+2a_{ij31}e_{31}+2a_{ij12}e_{12} \qquad (i,j=1,2,3)$$
$$(5\cdot4)$$

我们在后约定：凡是同一项中指标符号重复时，即代表各该标号的数从1到3求和，而把Σ号略去，并称这种重复的指标为哑标。例如，（5·2）可以用哑标表示为

$$\sigma_{ij}=a_{ijK\ell}e_{K\ell} \qquad (5·5)$$

而哑标K，ℓ也可以用其它符号代替，它们代表相同的意义，所以（5·4），（5·5）也可以写成

$$\sigma_{ij}=a_{ijmm}e_{mm} \qquad (5·6)$$

又例如，体积膨胀应变可以写成

$$\theta=e_{11}+e_{22}+e_{33}=e_{KK} \qquad (5·7)$$

这里e_{KK}中的K是哑标。利用（5·1）式，从（5·7）式中有

$$\theta=u_{i,i}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \qquad (5·8)$$

对于各向同性的弹性体而言，只有两个弹性常数λ，μ（称为拉梅常数），应力应变关系式为

$$\sigma_{ij}=\lambda e_{KK}\delta_{ij}+2\mu e_{ij} \qquad (5·9)$$

其中δ_{ij}为克氏符号（克隆纳喀Kronecken、符号），它的定义是

$$\delta_{ij}=1 \qquad (i=j)$$
$$\delta_{ij}=0 \qquad (i\neq j) \qquad (5·10)$$

（5·9）中的e_{KK}，和（5·7）中的相同，K为哑标，e_{KK}代表体积膨胀应变。

拉梅常数λ，μ和杨氏系数E，泊桑比σ的关系为

$$\mu=\frac{E}{2(1+\sigma)}, \qquad \lambda=\frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \qquad (5·11)$$

设有一弹性体在小位移下受外力作用达到静力平衡（图5·1）。设该弹性体的体积为v。在表面S的一部份S_σ上，表面力p_i为已知，即应力σ_{ij}满足表面力已知边界条件

$$\sigma_{ij},n_j=\bar{P}_i \qquad 在S=S_u上 \qquad (5·12)$$

其中n_j为外法綫单位矢量，在表面S的另一部份S_u上，位移$\bar{u}_i$为已知，即位移u_i满足位移已知边界条件

$$u_i=\bar{u}_i \qquad 在S=S_u上 \qquad (5·13)$$

如果弹性体每单位体积的体积力为 F_i，即

$$F_i = F_i(x_1, x_2, x_3) \quad 在\ v\ 内 \qquad (5\cdot14)$$

则应力分量 σ_{ij}，必满足体内平衡条件

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad 在\ v\ 内 \qquad (5\cdot15)$$

σ_{ij}和 u_i 的联系为(1)应力应变关系（5·5）式或（5·9）式，和(2)应变位移表达式（5·1）式，弹性体静力学问题就是在表面力已知和位移已知的边界条件下〔即（5·12），（5·13）〕求解平衡方程（5·15）式，其中σ_{ij}，u_i，必须满足（5·7）和（5·5）或（5·9）式的关系式，这里共有

(1) 平衡方程（5·15）三式
(2) 应力应变关系式（5·5）或（5·9）式，六式
(3) 应变位移关系式（5·1）式，六式

共15式，在（5·12），（5·13）的边界条件下求解σ_{ij}，e_{ij}，u_i 共15个待定量，我们可以证明除了刚体位移而外，唯一的解是存在的。

我们现在证明用变分法求解上述静力学问题的两种变分原理，第一个原理称为最小位能原理（原理ⅠA）：它是

在满足位移已知边界条件（5·13）式的一切容许的位移函数 u_i 中（其中u_i，e_{ij} 由应变位移条件连系着），使总位能最小的 u_i，必

$$\Pi_1 = \int_V [A(e_{ij}) - F_i u_i]\,dv - \int_{S_\sigma} \bar{p}_i u_i\,ds \qquad (5\cdot16)$$

满足平衡方程（5·15）和表面外力已知的边界条件（5·12）式。因此，也是弹性静力学问题的正确解。

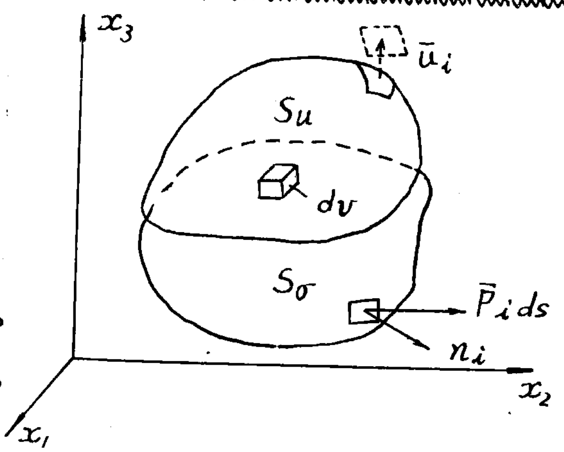

图 5—1　弹性体的表面边界条件

这里的$A(e_{ij})$是以e_{ij}来表示的弹性体内由于变形而贮存的应变能密度。

这个系统的位能有三部份，即(1)总应变能

$$\Pi_{(1)}=\int_V A(e_{ij})dv \ , \tag{5·17}$$

(2)体力 F_i 在位移 u_i 中所做的功 $F_i u_i$，从而降低了位能

$$\Pi_{(2)}=-\int_V F_i u_i \, dv \ , \tag{5·18}$$

(3)表面力 p_i 对表面位移 u_i 做的功，也降低了位移

$$\Pi_{(3)}=-\int_{s\sigma} p_i u_i \, ds \ , \tag{5·19}$$

所以（5·16）式所表示的 Π 即为总位能，它等于 $\Pi_{(1)}+\Pi_{(2)}+\Pi_{(3)}$。

为了证明最小位能原理，让我们把 Π 变分，得

$$\delta\Pi=\int_V\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\delta e_{ij}-F_i\delta u_i\right)dv-\int_{s\sigma}\bar{p}_i\delta u_i \, ds \tag{5·20}$$

根据（5·1）式，

$$\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\delta e_{ij}=\frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i}) \tag{5·21}$$

由于 $\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}=\frac{\partial A}{\partial e_{ji}}$，所以上式可以简化为

$$\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\delta e_{ij}=\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\delta u_{i,j} \tag{5·22}$$

而且通过分部积分，得

$$\begin{aligned}\int_V\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\delta e_{ij}\right)dv&=\int_V\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\delta u_{i,j}\,dv\\&=\int_V\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\delta u_i\right)_{,j}dv-\int_V\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)_{,j}\delta u_i\,dv\end{aligned} \tag{5·23}$$

用格林定理，可以证明

$$\int_V\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\delta u_i\right)_{,j}dv=\int_s\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\delta u_i n_j \, ds \tag{5·24}$$

其中n_j是S上的外法綫单位矢量，S可以分为两部份，一部份在S_u上，$u_i=\bar{u}_i$为已知，所以$\delta u_i=0$，于是这一部份的积分为零，（5·24）式只剩在S_σ上的那一部份。

$$\int_V\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\delta u_i\right)_{,j}d_v=\int_{S\sigma}\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)n_j\,\delta u_i\,ds \qquad (5\cdot25)$$

从而把（5·20）化为

$$\delta\Pi_1=\int_V\left[-\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)_{,j}-F_i\right]\delta u_i\,d_v$$

$$+\int_{S\sigma}\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}n_j-p_i\right)\delta u_i\,ds \qquad (5\cdot26)$$

极值条件给出欧拉方程和边界条件

$$\left(\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\right)_{,j}+F_i=0 \qquad \text{在}v\text{内} \qquad (5\cdot27a)$$

$$\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}n_j-p_i=0 \qquad \text{在}S_\sigma\text{内} \qquad (5\cdot28b)$$

把（5·27）和（5·12），（5·15）相比，得

$$\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}=\sigma_{ij} \qquad (5\cdot28)$$

它应该就是应力应变关系

对于綫性应力应变关系（5·5）式〔各向异性〕而言，有

$$\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}=a_{ijK\ell}e_{K\ell} \qquad (5\cdot29)$$

积分后，得

$$A(e\quad)=\frac{1}{2}a_{ijK\ell}e_{K\ell}e_{ij} \qquad (5\cdot30)$$

对于各向同性的应力应变綫性关系而言，同样有

$$\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}=\lambda e_{KK}\delta_{ij}+2\mu e_{ij} \qquad (5\cdot31$$

或

$$A(e_{ij})=\frac{1}{2}[\lambda e_{KK}e_{\ell\ell}+2\mu e_{K\ell}e_{K\ell}] \qquad (5\cdot32)$$

其中我们使用了关系式

$$\delta_{ij}e_{ij}=e_{11}+e_{22}+e_{33}=e_{\ell\ell} \qquad (5\cdot33)$$

当然，我们也必须指出：（５·２８）式对于不是綫性的应力应变关系，也是适用的，现在让我们证明这个极值是最小值。

设正确解为u_i，其它满足位移边界条件（５·１３）的容许位移函数为$\overset{*}{u}_i$，设

$$\overset{*}{u}_i=u_i+\delta u_i \qquad (5\cdot34)$$

把它代入（５·１），得

$$\overset{*}{e}_{ij}=e_{ij}+\delta e_{ij} \qquad (5\cdot35)$$

其中

$$\overset{*}{e}_{ij}=\frac{1}{2}(\overset{*}{u}_{i,j}+\overset{*}{u}_{j,i}),\quad \delta e_{ij}=\frac{1}{2}(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i}) \qquad (5\cdot36)$$

于是

$$\overset{*}{\Pi}_1=\Pi_1+\delta\Pi_1+\delta^2\Pi_1 \qquad (5\cdot37)$$

其中〔注〕

〔注〕　本证明只适用于綫性弹性体，这时的$A(e_{ij})$是e_{ij}的二次式，这就肯定了（５·３７）式，如果是非綫性的，则$\overset{*}{\Pi}_1=\Pi_1+\delta\Pi_1+\delta^2\Pi_1+\delta^3\Pi_1+\cdots$

$$\delta^2\Pi_1=\int_V\frac{1}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{K\ell}}\delta e_{ij}\delta e_{K\ell}\,d_v$$

于是，只有在$\dfrac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{K\ell}}\geq 0$时，才有$\delta^2\Pi_1\geq 0$的结果，从而才有最小位能原理的证明。当然对于极大多数弹性体而言，

$\dfrac{\partial^2 A}{\partial e_{ij}\partial e_{K\ell}}\geq$ 0的条件是满足的。

$$\overset{*}{\Pi_1}=\int_V[A(\overset{*}{e}_{ij})-F_i\overset{*}{u}_i]dv-\int_{S\sigma}\bar{p}_i\overset{*}{u}_i ds \qquad (5\cdot38a)$$

$$\delta^2\Pi_1=\int_V[A(\delta e_{ij})]dv \qquad (5\cdot38b)$$

$$\delta\Pi_1=0 \qquad (5\cdot39c)$$

但是，$A(\delta e_{ij})$ 为 δe_{ij} 为应变能密度，它一定是正确的，所以

$$\delta^2\Pi_1=\int_V A(\delta e_{ij})dv\geq 0 \qquad (5\cdot39)$$

所以，从（5·37）式有

$$\Pi^*\geq\Pi_1\text{或}\Pi_1(\text{容许的})\geq\Pi_1(\text{正确解}) \qquad (5\cdot40)$$

这就证明了最小位能原理。

第二个原理称为最小余能原理（原理ⅡA），它是

在满足平衡方程（5·15）式，和外力已知边界条件（5·12）式（在S_σ上）的一切容许的应力函数σ_{ij}中，使总余能

$$\Pi_1=\int_V[B(\sigma_{ij})]dv-\int_{Su}\sigma_{ij}n_j\bar{u}_i ds \qquad (5\cdot41)$$

最小的σ_{ij}，必满足位移已知的边界条件（5·9）式［在$\bar{\sigma}_u$上］，因此，也是弹性体静力学问题的正确解。

式中$B(\sigma_{ij})$代表弹性体内的余能密度。什么叫余能呢？我们可以从单向拉伸来理解，设单向拉伸的应力为σ_x，应变为e_x，应力应变曲綫如图5·2，在綫性弹性力学中，它是直綫，但在一般弹性体而言，它可以是曲綫。

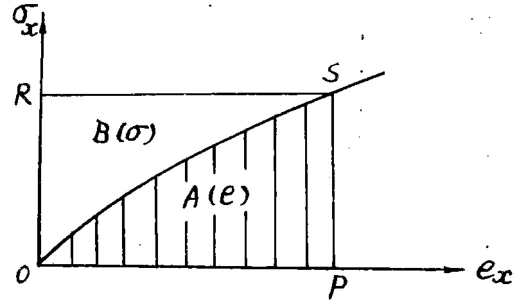

图5－2　单向拉伸的应变能密度和余能密度

一个弹性体拉伸到应变为 e_x 时，弹性内贮存的应变能密度A相当于面积OSP 即

$$A=\int_0^{e_x}\sigma_x d\,e_x \qquad (5\cdot42)$$

而余能密度则定义为面积OSR，或

$$B=\int_0^{\sigma_x}e_x d\sigma_x \qquad (5\cdot43)$$

它等于 $\sigma_x e_x$ 减去了A。即 $A+B=\sigma_x e_x$

对于复杂应力而言，它们分别定义为

$$A(e_{ij})=\int_0^{e_{ij}}\sigma_{K\ell}de_{K\ell} \qquad (5\cdot44A)$$

$$B(\sigma_{ij})=\int_0^{\sigma_{ij}}e_{K\ell}d\sigma_{K\ell} \qquad (5\cdot44B)$$

而且

$$A(e_{ij})+B(\sigma_{ij})=e_{K\ell}\sigma_{K\ell} \qquad (5\cdot45)$$

或

$$(a)\ B(\sigma_{ij})=e_{K\ell}\sigma_{K\ell}-A(e_{ij})$$

$$(b)\ A(e_{ij})=e_{K\ell}\sigma_{K\ell}-B(\sigma_{ij}) \qquad (5\cdot45A)$$

根据定义（5·44A，B），我们分别有

$$(a)\ \frac{\partial A}{\partial e_{ij}}=\sigma_{ij},\qquad (b)\ \frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}=e_{ij} \qquad (5\cdot46)$$

这从（5·45A）中，也可以证实，从（5·45A），变分得

$$\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}=e_{K\ell}\,\delta\sigma_{K\ell}+\sigma_{K\ell}\,\delta e_{K\ell}-\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}\delta e_{ij} \qquad (5\cdot47)$$

或

$$\left(\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}-e_{ij}\right)\delta\sigma_{ij}+\left[\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}-\sigma_{ij}\right]\delta e_{ij}=0 \qquad (5\cdot47A)$$

所以，证明了（5·46）的关系式。

（5·46）式在实际上就是应力应变关系，$\frac{\partial A}{\partial e_{ij}}=\sigma_{ij}$为用应变 e_{ij}

表示应力σ_{ij}的关系式，如（５·６）式或（５·９）式，都是这种形式 $\dfrac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}=e_{ij}$是用应力$\sigma_{ij}$ 表示应变e_{ij} 的关系式，对綫性弹性体而言，可以写成

$$\sigma_{ij}=b_{ijK\ell}e_{K\ell} \tag{5·48}$$

其中$b_{ijK\ell}$为２１个弹性模量

$$b_{ijK\ell}=b_{jiK\ell}=b_{ij\ell K},\quad b_{ijK\ell}=b_{K\ell ij} \tag{5·48a}$$

对于綫性的各向同性体而言

$$e_{ij}=\frac{1+\sigma}{E}\sigma_{ij}-\frac{\sigma}{E}\sigma_{KK}\delta_{ij} \tag{5·49}$$

其中δ_{ij}为克氏符号。

我们必须指出：一般情况下，余能和应变能不相等，但在綫性弹性体中，它是相等的，这是因为以单向拉伸为例，如果图５·２中OS为一直綫，则△ORS=△OSP，亦即A＝B

对于一般的綫性弹性体而言。

$$A=\frac{1}{2}a_{ijK\ell}e_{ij}e_{K\ell},\qquad B=\frac{1}{2}b_{ijK\ell}\sigma_{ij}\sigma_{K\ell} \tag{5·50}$$

而且，对于有关的应力σ_{ij}和应变e_{ij} 而言

$$A=B \tag{5·51}$$

对于各向同性的綫性弹性体而言

$$A=\frac{1}{2}(\lambda e_{KK}e_{\ell\ell}+2\mu e_{K\ell}e_{K\ell}) \tag{5·52a}$$

$$B=\frac{1}{2E}\left\{(1+\sigma)\sigma_{K\ell}\sigma_{K\ell}-\sigma\sigma_{KK}\sigma_{\ell\ell}\right. \tag{5·52b}$$

利用（５·４９）或（５·９）式，及弹性常数关系式（５·１１）式，很易证明

$$A=B \tag{5·51}$$

但是，因为A是用e_{ij}表示的，称为应变能密度，而B(σ_{ij})是用σ_{ij} 表示的，所以，有时余能密度B也称为应力能密度。在綫性弹性体中，应变能密度和应力能密度在实质上是相等的。

现在让我们证明最小余能定理：亦即

$$\delta\Pi_2=\int_V\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}dv-\int_{s_u}\delta\sigma_{ij}n_j\bar{u}_1 ds \tag{5·52}$$

利用了关系式（即应力应变关系）（5·46）式，上式可以化为

$$\delta\Pi_2=\int_V e_{ij}\delta\sigma_{ij}dv-\int_{s_u}\delta\sigma_{ij}n_j\bar{u}_i ds \tag{5·53}$$

而 $e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})$，所以有

$$\int_V e_{ij}\delta\sigma_{ij}dv=\int_V\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\delta\sigma_{ij}dv$$

$$=\int_V u_{i,j}\delta\sigma_{ij}dv$$

$$=\int[(u_i\delta\sigma_{ij})_{,j}-u_i\delta\sigma_{ij,j}]dv \tag{5·54}$$

利用格林定理，可以证明

$$\int_V(u_i\delta\sigma_{ij})_{,j}dv=\int_s u_i\delta\sigma_{ij}n_j ds \tag{5·55}$$

但是在边界面 S_σ 上，$\sigma_{ij}n_j=\bar{p}_i$ 是已知的，所以

$$\delta\sigma_{ij}n_{ij}=\delta\bar{p}_i=0,\qquad 在 S_\sigma 上 \tag{5·56}$$

所以（5·55）式的积分中，S_σ 那一部份恒等于零，亦剩下 S_u 上那一部份，亦即

$$\int(u_i\delta\sigma_{ij})_{,j}dv=\int_{s_u}u_i\delta\sigma_{ij}n_j ds \tag{5·57}$$

同样，因为 σ_{ij} 满足平衡方程 $\sigma_{ij,j}+F_i=0$，其中 F_i 是给定的；所以

$$\delta\sigma_{ij,j}=0\qquad 在 v 内 \tag{5·58}$$

在利用了（5·57），（5·58）后，（5·54）式化为

$$\int_V e_{ij}\delta\sigma_{ij}dv=\int_{s_u}u_i\delta\sigma_{ij}n_j ds \tag{5·59}$$

而（5·53）化为

$$\delta\Pi_2=\int_{su}\delta\sigma_{ij}n_j(u_i-\bar{u}_i)ds \tag{5·60}$$

极值条件$\delta\Pi_2$给出边界位移已知的边界条件。

$$u_i=\bar{u}_i \qquad 在\ s_u\ 上 \tag{5·61}$$

这就证明了当Π_2为极值时，满足平衡方程（5·15）式和外力已知边界条件（5·12）式的σ_{ij}，必也满足位移已知的边界条件，所以是该题的正确解，现在让我们证明这个极值是最小值。

设正确解为σ_{ij}，其它满足平衡方程（5·15）式和外力已知边界条件（5·12）式的应力函数为$\overset{*}{\sigma}_{ij}$，设

$$\overset{*}{\sigma}_{ij}=\sigma_{ij}+\delta\sigma_{ij} \tag{5·62}$$

把它代入（5·41）得

$$\Pi_2^*=\int_V B(\overset{*}{\sigma}_{ij})dv-\int_{s_u}\overset{*}{\sigma}_{ij}n_j\bar{u}_i ds \tag{5·63}$$

$$=\int_V B(\sigma_{ij}+\delta\sigma_{ij})dv-\int_{s_u}(\sigma_{ij}+\delta\sigma_{ij})n_j\bar{u}_i ds$$

如果是綫性弹性体，则$B(\sigma_{ij})$是σ_{ij}的二次式，于是有

$$\Pi_2^*=\Pi_2+\delta\Pi_2+\delta^2\Pi_2 \tag{5·64}$$

其中

$$\Pi_2=\int_V B(\sigma_{ij})dv-\int_{s_u}\sigma_{ij}n_j\bar{u}_i ds \tag{5·65a}$$

$$\delta\Pi_2=\int_V\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}dv-\int_{s_u}\delta\sigma_{ij}n_j\bar{u}_i ds=0 \tag{5·65b}$$

$$\delta^2\Pi_2=\int_V B(\delta\sigma_{ij})dv \tag{5·65c}$$

而且

$$\int_V B(\delta\sigma_{ij})dv\geq 0 \tag{5·66}$$

所以

$$\Pi_2^*\geq\Pi_2 \tag{5·67}$$

亦即是说，Π_2为最小值，如果是非綫性弹性体，则只要

$$\frac{\partial B}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{K\ell}}\geq 0$$，同样也可以证明Π_2是最小值，这就全部证明了最小余能原理（Π A）。

我们在这里心须指出，如果利用（5·45A），则总余能的泛函，也可以写成

$$\Pi_2=\int_V(e_{K\ell}\sigma_{K\ell}-A(e_{ij}))dv-\int_{su}\sigma_{ij}n_j\overline{u}_i ds \qquad (5\cdot 68)$$

也即是说，在σ_{ij}满足平衡方程（5·15）式，和满足外力已知的边界条件（5·12）下，使Π_2为极小时，其结果自然满足应力应变关系（5·48）或（5·49），应变位移关系（5·1）和位移已知边界条件（5·13）式。

我们必须指出，前一章所讲的立兹法，其基础都是最小位能原理，其近似函数都必须满足位移已知的边界条件，而不必满足平衡方程，屈立弗兹法的基础都是最小余能原理，其近似函数都必须满足平衡方程，在边界上有外力作用时，也必须满足外力已知的边界条件，而不必满足位移已知的边界条件。

最后，我们应该指出：(1)、最小位能原理和最小余能原理的证明，不仅是适用于綫性应力应变关系，而且也适用于非綫性的应力应变关系，(2)最小位能原理和最小余能原理不仅适用于小位移（u_i 小），高次项略去，如（5·1）式的应变位移关系而且也适用于大位移的弹性变形问题。但这时的平衡方程和外力边界条件都应是在变形后的状态下求得的，它和变形前的状态当然是不同的，这一点将在§5·3节中讨论。

习　题

(1) 根据最小位能原理，证明弹性体的虚功原理：弹性体的内力和外力对任何满足边界位移条件的微小虚位移做的功之和，恒等于零。亦即证明

$$SW_1=\iiint_V(\sigma_{ij}\delta e_{ij}-F_i\delta u_i)dV-\int_{sp}p_i\delta u_i ds=0$$

(2) 根据最小余理原理证明弹性体的余虚功原理：弹性体内力和外力在满足外力已知的边界条件和平衡方程的条件下的任何微小变动所做的虚

功之和，恒等于零，亦即证明

$$SW_{\sigma}=\iiint_V e_{ij}\delta\sigma_{ij}dv-\int_{sp}w_i\delta\bar{p}_i ds=0$$

(3)　自由振动体的一部份支撑面 s_u 上，

$w_i=0$　（$u=0$，$v=0$，$\omega=0$）在 $S=S_u$ 上

在另一部份自由面 S_σ 上不受外力，即

$\bar{p}_i=0$　　在　$S=S_\sigma$ 上

设振动时，位移和应力及应变都是正弦变化的，称其相关振幅为 w_i，σ_{ij}，和 e_{ij}，不是运动方程可以简化为

$$\sigma_{ij,j}+\lambda\rho w_i=0$$

其中 $\lambda=\omega^2$，ω 为自由振动的角速度，$\omega=2\pi f$，f 为频率，ρ 为材料的密度。

证明位能极值定理

在一切位移边界条件容许的 u，v，ω 中，实际的位移必使总位能。

$$\Pi=\iiint_V A(u,v,\omega)dV-\frac{1}{2}\lambda\iiint(u^2+v^2+\omega^2)\rho dV$$

为极值。其中 $A(u,v,\omega)=A(e_{ij})=$ 用位移表示的弹性体应变能密度。

证明余能极值定理

在一切满足运动方程 $\sigma_{ij}+\lambda\rho w_i=0$ 和自由面边界条件的 σ_{ij}，w_i 中，实际的 σ_{ij}．w_i 必使总余能。

$$\Pi_c=\iiint_V B(\sigma_{ij})dV-\frac{1}{2}\lambda\iiint_V(u^2+v^2+\omega^2)\rho dV$$

为极值。其中 $B(\sigma_{ij})$ 为余能密度 $(=\sigma_{ij}e_{ij}-A(e_{ij}))$。

§5·2　最小余能原理的应用，受均布载荷作用周边固定的矩形板的弯曲问题。

对于受均布载荷作用固定矩形板的微分方程为

$$\nabla^2\nabla^2\omega=\frac{q}{D} \tag{5·69}$$

满足边界条件

$$\left.\begin{aligned}&\omega=0,\quad \frac{\partial\omega}{\partial x}=0\qquad x=\pm a\\ &\omega=0,\quad \frac{\partial\omega}{\partial y}=0\qquad y=\pm b\end{aligned}\right\} \tag{5·70}$$

余能表示式可以写成

$$\Pi_2=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}D\left\{\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega^2}{\partial y^2}\right)^2\right.$$

$$\left.-2(1-\sigma)\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right\}dxdy \tag{5·71}$$

如果按最小余能定理，取近似$\omega(x,y)$满足（5·69）式则通过变分可以证明

$$\delta\Pi_2=-\int_{-b}^{b}D\left\{\omega\left[\frac{\partial^3\delta\omega}{\partial x^3}+(2-\sigma)\frac{\partial^3\delta\omega}{\partial x\partial y^2}\right]\right\}_{-a}^{a}dy+$$

$$+\int_{-b}^{b}D\left\{\frac{\partial\omega}{\partial x}\left[\frac{\partial^2\delta\omega}{\partial x^2}+\sigma\frac{\partial^2\delta\omega}{\partial y^2}\right]\right\}_{-a}^{a}dy$$

$$-\int_{-a}^{a}D\left\{\omega\left[\frac{\partial^3\delta\omega}{\partial y^3}+(2-\sigma)\frac{\partial^3\delta\omega}{\partial y\partial x^2}\right]\right\}_{-b}^{b}dx+$$

$$+\int_{-a}^{a}D\left\{\frac{\partial\omega}{\partial y}\left[\frac{\partial^2\delta\omega}{\partial y^2}+\sigma\frac{\partial^2\delta\omega}{\partial x^2}\right]\right\}_{-b}^{b}dx=0 \tag{5·72}$$

如果我们引进$\omega(x,y)$的近似解，不仅满足微分方程，而且满足边界条界件$\omega=0$，$x=\pm a$，或$y=\pm b$，则上式可以写成

$$\delta\Pi_2=\int_{-b}^{b}D\left\{\frac{\partial\omega}{\partial x}\left[\frac{\partial^2\delta\omega}{\partial x^2}+\sigma\frac{\partial^2\delta\omega}{\partial y^2}\right]\right\}_{-a}^{a}dy$$

$$+\int_{-a}^{a}D\left\{\frac{\partial\omega}{\partial y}\left[\frac{\partial^2\delta\omega}{\partial y^2}+\sigma\frac{\partial^2\delta\omega}{\partial x^2}\right]\right\}_{-b}^{b}dx=0 \tag{5·73}$$

如果我们引进ω（x，y）的近似解，不仅满足微分方程，而且满足边界条件ω＝0，$x=\pm a$，或$y=\pm b$，则上式可以写成

$$\delta\Pi_2=\int_{-b}^{b} D\left\{\frac{\partial\omega}{\partial x}\left[\frac{\partial^2\delta\omega}{\partial x^2}+\sigma\frac{\partial^2\delta\omega}{\partial y^2}\right]\right\}_{-a}^{a} dy$$

$$+\int_{-a}^{a} D\left\{\frac{\partial\omega}{\partial y}\left[\frac{\partial^2\delta\omega}{\partial y^2}+\sigma\frac{\partial^2\delta\omega}{\partial x^2}\right]\right\}_{-b}^{b} dx=0 \quad (5\cdot73)$$

这里必须指出本题中没有外力已知的边界条件，所以选择近似函数时，只要满足（5·69）式的解就可以了。

取近似函数

$$\omega=\frac{q}{8D}\left[(x^2-a^2)(y^2-b^2)+\sum_n A_n Y_n(y)\cos\alpha_n x+\right.$$

$$\left.+\sum_n B_n x_n(x)\cos\beta_n y\right] \quad (5\cdot74)$$

其中 $Y_n(y)$，$x_n(x)$ 分别为，

$$\left.\begin{aligned} x_n(x)&=a\,sh\beta_n a\,ch\beta_n x-x\,ch\beta_n a\,sh\beta_n x\\ Y_n(y)&=b\,sh\alpha_n b\,ch\alpha_n y-h\,ch\alpha_n b\,sh\alpha_n y\end{aligned}\right\} \quad (5\cdot75)$$

而且

$$\alpha_n=\frac{\pi n}{2a}\quad \beta_n=\frac{\pi n}{2b}\quad (n=1,\ 3,\ 5\cdots\cdots) \quad (5\cdot76)$$

很易看出（5·74）是（5·69）式的解，而且满足边界条件ω＝0（这里的$n=1$，3，5……）。

为了便于计算，让我们引用符号

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)_{x=\pm a}=\pm f(y) \quad (5\cdot77)$$

这里

$$f(y)=\frac{q}{8D}\left[2a(y^2-b^2)-\sum_n A_n\alpha_n Y_n(y)\sin\alpha_n a\right.$$

$$\left.+\sum_n B_n\left(\frac{dx_n}{dx}\right)_a\cos\beta_n y\right] \quad (5\cdot77b)$$

而是

$$\left(\frac{dx_n}{dx}\right)_a = -ch\beta_n a\, sh\beta_n a - \beta_n a \qquad (5\cdot77c)$$

同样

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)_{y=\pm b} = \pm g(x) \qquad (5\cdot78)$$

$$g(x) = \frac{q}{8D}\left[2b(x^2-a^2) + \sum A_n\left(\frac{dY}{dy}\right)_b \cos\alpha_n x\right.$$

$$\left.-\sum \beta_n B_{11} x_n(x) \sin\beta b\right] \qquad (5\cdot78a)$$

而且

$$\left(\frac{dY_n}{dy}\right)_b = -ch\alpha_n b\, sh\alpha_n b - \alpha_n b \qquad (5\cdot78b)$$

$\delta\Pi_2 = 0$ 相当于

$$\frac{\partial\Pi_2}{\partial A_n} = 0 \qquad \frac{\partial\Pi_2}{\partial B_n} = 0 \quad n=1,\ 3,\ 5\cdots\cdots \qquad (5\cdot79)$$

从（5·73）式可以看到 $\frac{\partial\Pi_2}{\partial A_n} = 0$，$\frac{\partial\Pi_2}{\partial B_n} = 0$ 分别可以写成

$$\int_{-a}^{a} g(x)\left[\left(\frac{d^2Y_n}{dy^2}\right)_b - \sigma\alpha_n^2 Y_n(b)\right]\cos\alpha_n x\,dx = 0 \qquad (5\cdot80)$$

$$\int_{-b}^{b} f(y)\left[\left(\frac{d^2x_n}{dx^2}\right)_a - \sigma\beta_n^2 X_n(a)\right]\cos\beta_n y\,dy = 0 \qquad (5\cdot81)$$

由于

$$\left(\frac{d^2Y_n}{dy^2}\right)_b - \sigma\alpha_n^2 Y_n(b) \neq 0,\quad \left(\frac{d^2x_n}{dx^2}\right)_a - \sigma\beta_n^2 x_n(a) \neq 0 \qquad (5\cdot82)$$

所以得

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-a}^{a} g(x)\cos\alpha_n x\,dx = 0 \\ &\int_{-b}^{b} f(y)\cos\beta_n y\,dy = 0 \end{aligned}\right\}\quad n=1,\ 3,\ 5\cdots\cdots \qquad (5\cdot83)$$