

计算机图学应用中的 几何原理与方法

北京钢铁学院
北京航空学院 制图教研室译

北京工程图学学会

1981.10.

译者的话

本书是北京工程图学学会组织北京钢铁学院机械制图教研室和北京航空学院机械制图教研室翻译的。由北京钢铁学院机械制图教研室部份同志翻译第一、二、三章，由北京航空学院机械制图教研室部份同志翻译附录部份。由北京钢铁学院机械制图教研室张雄飞整理全文。由于我们水平有限，错误与不当之处一定很多，欢迎广大读者批评指正。

翻译之初，朱福熙教授曾给我们很大的支持，在这里特致以谢意。

目 录

前言.....	1
致谢.....	3
绪论.....	4
第一章 显示已有的方程.....	8
第二章 建立数学公式以与已知的或欲求的数据	
约束相匹配.....	14
A、最小二乘法.....	16
1 人工推导最小二乘法拟合.....	17
2 数学的最小二乘法(二维).....	20
3 数学的最小二乘法(N维线性).....	24
4 最小二乘法, 两相关变量.....	27
B、多项式拟合.....	29
C、样条.....	35
D、局部坐标轴原理.....	39
E、参数方法.....	42
F、Bezier 曲线.....	48
G、二次曲线.....	58
1. 抛物线.....	59
2 园.....	59
a、用给定半径作园, 与二已知直线相切.....	63
b、用给定半径作园, 与两园弧相切.....	65
c、用给定半径作园, 切于一给定园和一给定 直线.....	70

d、过已知点作园切于两直线.....	7 3
e、过已知点作园切于两个园.....	7 8
f、通过三点的园.....	8 4
g、做园与三直线相切(三角形内切园).....	8 6
h、过两点作园切于一直线.....	9 1
i、过指定点作园,在该点有指定斜率及二阶 导数.....	9 7
j、过一定点作园,切于一直线并且有给定 半径.....	9 8
3 椭圆.....	103
a、在一个端点上有水平或垂直斜率的椭圆弧....	103
b、更一般的四个输入条件的椭圆.....	107
c、椭圆倒角.....	112
d、两段椭圆弧的调配.....	113
4 广义椭圆.....	118
5 一般圆锥曲线.....	123
6 圆锥曲线的组合.....	12
a、调配两段圆弧.....	125
b、调配一段圆弧和一段椭圆.....	130
II、其他基本函数的例子.....	133
1 指数曲线.....	134
2 正态曲线.....	137
3 三角函数曲线.....	139
第三章 三维几何.....	141
A、三维体系.....	141

B、三维图形和三维体素的区别.....	145
C、曲面的三维边界曲线.....	149
1 空间曲线.....	149
2 一般位置平面内的曲线.....	152
a、在二维投影平面内绘图.....	
b、在一般位置平面内绘图.....	156
D、由四条空间曲线形成的曲面——其中至少两条 曲线在主坐标面上.....	164
E、由四条一般空间曲线形成的曲面.....	182
F、挠曲面形成的可变插值法.....	193
G、曲面插值法.....	199
H、曲线的长度、面积、和体积.....	209

附目：

A、公式的推导——定义一已知半径的园与其他 两园相切.....	215
B、求一三角形内切园的方程.....	218
C、求与另两园相切且过一给定点的园的方程.....	220
D、求标准位置椭圆方程时输入斜率极限的 推导.....	224
E、中心在Y轴上的标准位置椭圆方程的推导.....	227
F、符合已知条件的直线.....	229
G、产生Bezier曲线的典型程序.....	

参考书目：略

前 言

Sylvan "Chase" Chasen 在计算机图学方面是真正的开路先锋之一。他请我为他在这个领域中的最新书稿写前言，我感到很荣幸。

我们常常抓住一个系统中软件和硬件方面的细节问题，特别是计算机绘图系统中的细节问题——其中一些细节常决定最后的结果是否可用——以致我们没有看到围绕着它形成了很多体系的那些基本前提。计算机图学的基本前提之一是几何：它的范围包括从通常熟习的，象关于线、曲线和画出图形等几何内容，直到不太熟习的，关于曲线拟合和数据的表达与原理方面的几何内容。Chasen 在把成为计算机图学的主要基础的各种几何概念集中起来方面做了出色的工作。他所列入的材料在任何其它一个单独资料中都是不容易找到的。它的论述对预期的读者是明瞭易懂的。Chasen 先生早些时候说过，这本书实际上有两类读者，一类是系统程序员，他们必须给系统的用户以各种几何方法，以便帮助用户解决问题。另一类是用户，他们基本上是盲目地接受这些方法做为帮助他们解决问题的工具。分析人员需要资料以编写那些工具的程序，而用户则需要了解程序的基础以便得到那些工具的精度和局限性方面的常识。就我所知，没有别的人比 Chasen 先生更好的斟酌过要讨论这些基础和这些基础的本质。

除了这些基本的几何讨论以外，Chasen 先生还以他丰富的经验承担了评价各种不同选择方案的，实际方面的问题：——精度的问题；哪种方法更适合于各种不同的显示技术的问题；用户怎样才能以图形指出他对系统的几何要求问题。所有这些概念都远远超出单纯的几何推导之外，但都是真正图学领域的一部分。

总之，Chasen 先生在经常涉及的几何原理与所有这些和计算机

绘图有什么关系的问题上做了非常出色的工作。这本书不是一本几何理论的教科书。这本书是对计算机和图学领域的一个贡献，并且这本教科书还经常着重于使要讲述的材料和用这些材料的环境联系起来。

《计算机图学应用的几何原理和方法》是对这一方面文献的资料的重大贡献，而这些文献为这一领域的继续成长奠定了基础。

Machover

有限公司

总经理

Carl Machover

致 谢

在准备这本书的过程中，我从很多人那里得到了支持和建设性意见，我不能一一致谢了。在这里最真诚地感谢他们。

我要特别感激 Carl Machover 和 Alan Adams，他们的鼓励和关于需要这本书的估计，对我从事编写这本书是起了很大作用的。

Mrs. Jo Atcheson 负责全部手稿的打字和有关排印的事宜。她的极为出色的工作显著地缩短了这本书从初步设想到出版的时间。John Osterman 和 Dave Prince 分别在准备插图和索引上给了我相当大的帮助。我也想对 Bill Gordon, Robin Forrest, Nelson Logan 和 Rich Riesenfeld 表示感谢，他们给我提供了对准备参考书目很有用的一览表。

最后，我要对 Lockheed 公司表示感谢。虽然我的视力有严重的损伤，Lockheed—Georgia 公司在 1958 年还是给我安排了一个工作位置。他们在举贤任能这种开明态度成为更为大家所理解的民族目标以前，不计较身体条件和社会地位，给合格人材以支持，这显然是令人满意的。这种没有偏见的环境对我试图发展和分享那些技术经验是有着不可估量的价值的。

图 14, 15, 42, 43, 65 和 74 是得到 Lockheed — Georgia 公司特许的。

Syevan H. Chasen

绪 论

交互性计算机绘图的时代已经显著地推动了解析几何在计算中的作用。解析几何正经历着一个从本质上是学院式的，只有有限实用性，到非常实际和本质上是实用性质的变化过程。围绕着绘图硬件和软件中一直迅速演变的那些使人兴奋的变化和提供的选择方案，已经传统地聚集了相当多的人的兴趣和热情。在很大程度上，由于许多硬件和软件考虑上的主观性，理论家们和各种主张的拥护者们正有着充分的机会去引证他们的实例。但是没有人能无条件的证明什么是“最好的”硬件配置或什么是“最好的”软件策略。关于这些问题，要根据对可选用的各种技术的瞭解程度，运转环境的性质，设备固有的特长，期望运用的装置或这些因素的综合，这些因素设想中的变化以及随着时间推移而来的环境上的改变，获得一个系统或扩大它所需要的费用，系统的运转费用以及其他很多因素才能决定。然而，不论这样一些决定的全面根据可能是什么，它们都应该由应用的性质、范围和谁使用系统这些基本考虑来决定。在调查硬件和决定软件时考虑应用和用户的思想常常少得惊人。因此，有趣的是很多问题，虽然是高度学院式的，却常常受到不相称的注意。所以，为了充分发挥交互性绘图的潜力，必须在硬件和软件的考虑上加进一个主要成份。这就是对解析和几何（解析几何）的潜力和分枝的理解。在许多应用问题中解析几何常体现出骨干作用。因为可以应用解析几何得到更高的技巧和效率。典型的是，计算机绘图应用变成为如下一些范畴的问题了，例如数据化简，分析，设计和模拟等。包括所有范畴的，正在增长着的潜在的自动化水平使下面这样的认识也在增长，即需要用数学公式和（或者）算法来描述各种关系与信息。对计算机绘图来说，把问题转

变成公式法和算法，极需几何原理和方法。例如，设计者可能想输入点和斜率的已知约束，按照他对这个问题的理解和他的视觉来确定其他的点和斜率，然后观察得到的曲线和(或者)曲面。除了已提供的，改变输入约束以观察改变的效果这种能力以外，设计者可能还想求得曲面面积、体积、重心、力等等。这样的灵活性只能由发展计算机绘图方法和发展对输入约束进行合乎逻辑的、系统的几何处理来提供。最后的设计方案可能同其他的，更经常处理的应用问题联系起来。或者，计算机贮存的设计方案可以用在别的绘图应用问题上，象用在设计变化指令和数控零件的程序设计上。当设计或图形在显示控制台上产生时，我们已经省掉了选取一组已有的图形和以数字形式把它们输入给计算机这样的费钱和费时的步骤。在数据化简和分析中需要曲线和曲面设计的例子自然是很多的。它们实际上出现在每种试图应用它的领域，例如，矿藏储量的勘探，环境的影响，市场的调查和预测，绘制图表，制做动画片和其他很多方面。有一点应该是明显的，就是问题的数学和几何公式化，不仅在很多单独的应用问题里，而且在达到高效率地综合应用计算机这一根本目标上，都应该起主要作用。在一些主要领域中，象设计和制造中，已经做了较多的努力来开始积累各种功能；虽然在这些主要领域之间多方面的综合和相互联系仍然处于原始状态。

在试图达到系统综合的最高目标的尝试中，我们认识到某些辅助目标是压缩数据，容易计算，更好的互相联系以简化进一步的分析，能更好地进行人机对话的图形形象化。实时的硬付本输出，高效的数据贮存和检索等等。硬件和软件配置的选择方案实际上是无限的；所以要达到高效综合的最高水平还是遥远的目标。趋近于它的途径更多地是依靠研制者的技艺才能，而不是科学的优化方法。没有疑问，把

信息，相互关系和设计准则仔细地进行数学公式化和几何公式化，通过增强每个这样的辅助目标，将会增强主要的综合目标。

这本书的目的就是想提出很多我认为最重要的、基本的、几何上需要考虑的问题，这些是交互性绘图的支持者或预期的用户，或者设计者和分析者必须了解的。这本书没有想写的象某些教科书那样详尽，但还是写的足够详尽，以便做为应用图学和数学的一本综合的教学根据和有用的参考书和（或者）某种教程。它将包括 Rogers 和 Adams⁽¹⁾提出的很多概念，并且扩充这些概念。在这里，目的是组织讨论，以便它反映出更多的实际用途，而把很多较基本的，细节的推导留给读者在需要的时候去完成，或者到其他教学材料中去查找，特别是到上面刚提到的那本书中去查找。然而，每种考虑到的技术中所适用的公式和方法都将给出来，并且也将介绍在文献中一般找不到的推导。说明所有公式和方法的例子都将给出来。在描述那些方法和相应公式的同时，将讨论基本原理和适用性原理。没有想叙述在数控铣切，印刷线路板和应力分析的文献中应用的方法或算法，但是却陈述了那些应用问题得以构成的、那些基本的几何基础，有大量最普通的和多方面的这种基础内容要探讨。在很多章节的后面给出了练习以帮助学习和增进理解。这里所用的几何是从属于曲线和曲面的形成的。一些重要的变换公式也列出来了，但是一般的变换理论，几何投影和隐藏线和曲面构成方法没有包括在这本书探讨的范围之内，因为这些通常已包括在其他书中。当研究各种不同的数模方案时，重要的是让读者认识到，控制台的用户为了运用这些技术是不需要通晓数学的。

注1：David F. Rogers 和 J. Alan Adams: 《Mathematical Elements for Computer Graphics》(New York: McGraw Hill 1976)

方程能“自动”建立，并能“自动”解出。程序员和分析者才必须提供图形设计和分析的工具，这些是他们的本职工作。用户应该了解提供给他各种方案的适用性。用户的活动是需要输入约束、象点、斜率和其他信息。当然，深入了解这些原理对用户会有很大好处，可以帮助他确定应用问题的处理过程和方法。

讨论将分成下面这样三个合乎逻辑的部份：

1. 显示已有的方程或数学表格。
2. 建立数学公式以满足 已知的或欲求的数据约束。
3. 三维几何。

第一章 显示已有的方程

由于很多应用问题经得起计算机绘图的考验，因此不大需要发展任何种类的数学模型。只有显示一组型值点（分别的或用直线连接起来的）显示印刷符号或者显示在特定的区间或范围内应当转换成一组向量（直线）的方程还是必需的。

当明显地需要向量和（或）印刷符号时，这种需求可以由配置硬件函数发生器得到满足。在计算机绘图硬件中，向量和字符发生器是最常用的两种函数发生器。于是，这样的发生器就从根本上把直线和字符的发生功能自动化了。当要描述一个方程时，存在着一些选择案，这些方案可能是系统软件的主要部分。特别是应用问题的性质可以影响发生向量以适应应用目的的方法，而目的又可能是比较隐讳的和比较从实用观点出发的。例如，很多基本应用问题所要求的不比完成一个园和一段园弧更难，所以我们将用这种模式来讨论描述一族向量的原理。一般来说，产生园弧只需要终端操作者做基本操作。操作者可以指定园心和半径，这对描述一个园就足够了。可能有一个硬件园发生器自动画园，或者不得不用软件来完成，这软件是由软件供应者或者是由用设备的人编的。在这两种情况，应用的性质、显示图形的总量、和显示硬件的型式都会影响由软件园程序所应提供的处理方法。基本的园的定义方程：

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad (1)$$

指出（在输入 (h, k) 为中心， r 为半径之后），这园能够在 h 和 $h + r$ 间的区间上用增加 x 的方法画出来（对称的性质也使区间 h 到 $h - r$ 成为不必要的）。间隔的数目可以安排在程序中。在区间上每

选择一个 x 得到两个 y ，所以得到了可以在显示中画出来的圆上的两对座标。在数据组内取连续的坐标对，并命令（在程序中）向量发生器逐点连线，就将给出所描述圆的向量近似形。几个能想到的问题和考虑出现了。以选择 x 增量为基础，要充分地描绘这个圆有没有足够的点呢？点的不均匀分佈是否会成为问题呢（因为 y 值是不等间隔的）？是否存在着一个充分的总计算需要量（对于显示上的很多圆来说）它是和计算坐标的方法有关呢？或者是否要考虑到显示应用的阴极射线管的型式呢？关于第一个问题，如果对于所有的圆都用同样数目的点（就说 24 个吧），为了描绘的使人满意，对于“小”半径的圆，点数可能超过了需要，而对于“大”半径的圆，点数可能不够。更进一步说，过多的点，显示得过于靠近会使描绘图形不美观，因为有些阴极射线管在指定的点处闭合性不好，也就是终点连接不好，而且若点间非常近并且相对密度很大，连接不好会变得更加明显。

在一些应用问题里，无论从美观的或者实用来考虑都指定要等距的点。例如，可能需要显示一个圆弧和一条线相切。因为，为了显示圆被分成很多短划（向量），控制台的操作者可能宁愿描绘出最少限度的圆弧以便在显示屏幕上给出相切的总的样子，由于等距点会对视觉有利，因此，显示上感到可信的图形是控制台操纵者在计算机数据库中想要描述的模式。借用下一章关于建立数学公式的内容，等距分佈这种需要可以用参数方法来完成。那就是，在曲线（现在情况是圆）上的点能够由计算机程序得到，使得点间的弦长（它和弧长近似）相等。然后把这些点的 x 和 y 坐标描绘在显示器上。

对于很多应用问题来说，产生一组要显示的点所需要的计算时间是没有多少关系的。然而，如果很多数据要显示，并且阴极射线管是更新型的，就有可能陷到闪烁问题中去。当电子束偏转电路不能足够

快的描绘完整的图形以便让眼睛能看到一个恒定的图形时，这种情况就发生了。计算和显示的时间不需要以牺牲编制程序的复杂程度为代价就可以节省。所用的一个方法是，在可能的时候，用较少的点描述这条曲线。对圆的情况，可以为每个圆产生固定数目的点，或者可以在编制系统的程序时使点的数目在一些规定的办法里是和半径有关的。对于一般的曲线，步距的大小可以作为曲率的函数（而曲率可以从已知方程中推导出来），和曲线的向量描述与真实曲线间的允许误差它们二者的函数指导出来。这样一些判断是由程序中的优先选择来定的，在这之前要完成附加的计算和应用问题的要求。获得等距点而又节省计算时间的方法常常是能够找到的。对于一个圆，可以由参数方程导出 X 和 Y 作为 θ 的函数的递推关系。

$$\begin{aligned} X_N - h &= r \cos \theta \\ Y_N - k &= r \sin \theta \\ X_{N+1} - h &= r \cos(\theta + d\theta) \\ Y_{N+1} - k &= r \sin(\theta + d\theta) \end{aligned} \quad (2)$$

式中 h 和 k 是圆心的坐标， (X_N, Y_N) 是任意点的坐标， θ 是 X 轴与圆心到任意点连线的夹角， $d\theta$ 是不变的角增量， (X_{N+1}, Y_{N+1}) 是下一个点的坐标。

公式(2)可以展开并化简成：

$$\begin{aligned} X_{N+1} &= h + (X_N - h) \cos d\theta - (Y_N - k) \sin d\theta \\ Y_{N+1} &= k + (X_N - h) \sin d\theta + (Y_N - k) \cos d\theta \end{aligned} \quad (3)$$

这样，圆可以从任意点开始，并且所有连续相邻的点都可以等距递推地计算出来。这些计算可以只做一次 $\sin d\theta$ 和 $\cos d\theta$ ，从而省略了每个点处三角函数的计算。例如，假定起始点任选（不失一般性）在 $\theta = 0$ 。则第一个点 (X_1, Y_1) 是 $X_1 = h + r$ 和 $Y_1 = k$ 。

然后, 对所有点 (X_N, Y_N) 都可以由方程组(3)得到, 而方程组(3)中每个点的坐标是由已知数据和前一点的坐标推算出来的。这样就达到了最少计算量并得到了等距点。产生圆的一个替代的参数方法是

$$X = h + r \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right) \quad Y = k + r \left(\frac{2t}{1+t^2} \right) \quad (4)$$

对于 $0 \leq t \leq 1$ (也用对称的点)。这是在计算速度 (没有平方根和三角函数) 和点的等距分布 (它是不等距的, 虽然比简单增加 X 和解 Y 好些) 间的某种调和。在有很多圆或椭圆弧为某个应用问题特征的地方, 可以使用变换成“标准”圆的方法以节省相当多的计算。例如, 我们可以计算出圆心在原点, 半径为一个单位的圆 $X^2 + Y^2 = 1$ 的一组坐标来描述这个圆。如果我们想描画另一个圆, 其圆心在 (h, k) 和半径为 r , 我们只需要用系数 r 按比例改变每个型值点的 X 和 Y , 然后分别用 h 和 k 平移每对坐标就行了。只要我们不要求改变描述点的数目, 这种处理方法可以重复使用于所有的圆。如果我们想要显示椭圆或部分椭圆, 我们只需要确定主半轴和辅半轴的长度以及主轴与 X 轴的夹角。这些由椭圆描述方程的标准代数处理中能很容易的推导出来。这只需要用主半轴的长度按比例变化单位圆的每个 X 和用辅半轴长度变化每个 Y , 并且按适当的角度旋转所得的型值点。改变比例, 平移和旋转的变换可以由通常的矩阵运算或由用齐次座标的矩阵指定。用基本图形附带某些比例, 旋转, 等等参数的原理可以使用在很多普通的构图中。这基本图形常称为“原始形”(Primitive)。齐次坐标和矩阵运算在很多^①地方都叙述了。

①请看, 例如 David F. Rogers 和 J. Alan Adams, 《计算机绘图的数学基础》(New York: McGraw Hi. 1976)。

如果阴极射线管是存贮管而不是更新管，计算和显示所有希望要的数据的速度将与闪烁问题无关。管子将保留扫描出的每个东西。对于存贮管显示来说应该考虑的主要因素是数据转换成显示的速度和要显示的数据的变化频率。当然，这牵涉到应用问题的性质和范围。于是，阴极射线管系统和使用这个系统的各种应用问题就会影响编程方案的选择以保证运转效率，和软件发展，计算机操作与劳动力有最少的累加费用。关于这点，制定初步的和改进的规划一般是非常值得做的。

在显示信息中另一个重要的要考虑的问题是把显示的图形转换成硬付本图形或图表。在很多情况中把显示拍摄下来（一般的或偏光型的）就足够了。当需要比摄影更大更准确的图象时，有两种代替的办法。第一，显示上描绘向量端点的坐标可以用来在任何型号的绘图器上画出图形。这种型式的输出中最方便的是不改变比例，就是你在显示中看到的正是你在绘图器上得到的，向量对应向量，尺寸对应尺寸。这类的某些情况，可以要求改变比例以便取得比显示更大的硬付本图。只要不需要改变实际向量的端点坐标（只改变比例），这还是十分容易做到的。如果这些向量长度增加以便满足变化比例时，图形的线条就可能不大美观了。也达不到增加精度的目的。这就使人考虑第二种替代方法，这种方法是需要产生比显示更大的硬付本图，并且是美观的和（或）提高了精度的。这就要求：

Newman 和 sprouel《交互性计算机绘图原理》(New York: McGraw Hill, 1976)。S. H. Chasen《实用交互性计算机绘图》（讲课笔记，UCLA短训班，1973~77）。