教育部高校学生司推荐

高教 2005 年版

全国各类成人高考复习考试辅导教材

专科起点升本科

高等数学（二）

第 3 版

本书编写组

KAOSHI

高等教育出版社

教育部高校学生司推荐

全国各类成人高考复习考试辅导教材

专科起点升本科

高等数学(二)

第3版

本书编写组

高等教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 2/《高等数学》编写组. —3 版. —北京：高等教育出版社，2005.1
全国各类成人高考复习考试辅导教材. 专科起点升本科
ISBN 7-04-016250-4

Ⅰ.高… Ⅱ.高… Ⅲ.高等数学-成人教育:高等教育-升学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 142058 号

策划编辑 田晓兰 **责任编辑** 雷旭波 **封面设计** 刘晓翔
责任绘图 朱 静 **责任校对** 肖子东

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网 址**	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	河北新华印刷一厂		
		版 次	2000 年 9 月第 1 版
开 本	850×1168 1/16		2005 年 1 月第 3 版
印 张	17	**印 次**	2005 年 1 月第 1 次印刷
字 数	510 000	**定 价**	24.50 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号:16250-00

出版前言

2004年，教育部高校学生司和教育部考试中心重新修订颁布了《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲》.新大纲规定了哲学、文学、经济学、教育学、管理学、法学、理学、工学、农学、医学等学科的考试科目和复习考试内容，共编为5册，由高等教育出版社出版.

为了满足广大考生复习备考的需求，我们组织长期从事成人高考复习辅导的专家、教授，前大纲编写修订和考试命题研究人员，及时修订了与考纲配套的系列复习考试辅导教材.

本系列辅导教材依据教育部最新颁布的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲(专科起点升本科)》编写，包括《政治》、《英语》、《教育理论》、《大学语文》、《艺术概论》、《高等数学(一)》、《高等数学(二)》、《民法》、《生态学基础》、《医学综合》共10册.

本系列辅导教材融复习内容与考试内容于一体，不仅有助于考生复习并掌握扎实的基础知识，而且有利于考生把握考试的重点、难点，提高应试能力．其内容的编排与“大纲”的知识系统完全一致，不仅充分体现了“大纲”的知识能力要求，而且注重贴近考试实际，收录了大量的应用性和能力型练习题并附有解题指导和参考答案，使考生在整个复习进程中能够做到“学练结合”，及时检验复习效果，增强应考适应力和信心.

本套教材的编写，融入了诸多专家、命题研究人员和一线教师的心血；凝结着“从知识立意向能力立意转化”等现代教育思想的精华；体现了我们出版工作者在考试用书编写方面的整体策划思想.

由于修订时间仓促，书中难免还存在这样那样的不足或错误．为了不断改进和完善本系列教材，使之能更适合广大读者的要求，为考生提高复习备考能力和水平发挥更大作用，我们恳切希望各界人士提出批评指正意见.

高等教育出版社

2005年1月

编 者 的 话

成人高等教育事业近年来得到迅速发展，尤其是专科起点升本科的发展更为显著．为了适应教育事业发展的要求，教育部组织重新修订并颁布了《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲(专科起点升本科)》．为了能为成人高等教育事业的发展作些贡献，为了尽最大可能给成人考生提供有益的帮助，使其能适应新的考试大纲，高等教育出版社组织编写了这套《全国各类成人高考复习考试辅导教材(专科起点升本科)》，本书就是这套书中的一本．

为了能为读者提供一本既有实用性更具有针对性的考试辅导书，我们认真研究了2004年版《考试大纲》以及从1994年至2004年的全部真题，确定了在本书编写中遵循“一个按照、两个针对”的原则：

1．严格按照2004年《考试大纲》规定的考试内容和考试要求编写．

2．一是针对成人考生的特点，二是针对考试命题的基本原则而编写．针对考试命题的基本原则体现在：本书以高等数学的基本知识、基本原理和基本技能为主要内容，避开复杂的运算与特殊的技巧性运算．针对成人考生的特点体现在：突出基本概念的要素，基本性质的特点及基本计算方法的条理化，强调概念或公式的结构形式(这对正确理解和全面掌握知识是非常有益的)．书中选配大量的例题，以有助于读者达到理解掌握．在每个例题中加以分析讲解，侧重于问题的形式特点及解决问题的思想方法．在很多概念、定理及性质以及有些例题的后面还给出一些说明，在说明中还指出应该引起读者注意的问题或一些带有共性的问题特点，意在引导读者自学并能提高效率．另外我们还将不同类型的题目之间的内在区别以及在解题方法上的差异进行比较、归纳、总结．以利于读者学习．

对于每一章都给出了小结，指出本章基本概念、基本运算相关的问题及常见的试题类型及解题方法．另外为了使读者对历年的试题类型有一个比较全面的了解，我们特将1994—2004年的真题进行了分类归纳、总结．读者只要认真复习，定能从中悟出点道理，从而能较大幅度地提高考试成绩．

在每节后选有同步练习题，并附有参考解答．

本书还附有2004年专升本高等数学(二)真题及参考答案，以利于考生对试题有宏观了解．

由于修订时间仓促，不当之处还望专家及广大读者提出宝贵的意见．

高等教育出版社对本书的出版作出了大量的工作，我们表示诚挚谢意．

高等数学(二)编写组

2004年11月

目　　录

第一篇　高等数学

第二篇　概率论初步

第一篇　高 等 数 学

第一章　函数、极限和连续

第一节　函　　数

新修订的《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲（专科起点升本科）》中已删去函数这一节，这意味着在成人高考专升本的试卷中将不会单独出现有关函数概念及性质的试题．但是，由于后面的内容经常涉及到这部分知识，为此，我们仍将函数的相关内容编写在第一节，以便于读者学习．

一、函数概念

1．函数的定义　设在某个变化过程中有两个变量 x 和 y，变量 y 随变量 x 而变化，当变量 x 在一个非空实数集合 D 上取某一数值时，变量 y 依照某一对应规则 f 总有唯一确定的数值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为

$$y=f(x)\quad(x\in D),$$

其中 x 叫做自变量，y 叫做因变量或函数．

数集 D 称为这个函数的定义域，记为 D 或 $D(f)$．

当 x 取定值 x_0 时所对应的 y 的数值 $y_0=f(x_0)$ 或 $y\big|_{x=x_0}$，称为当 $x=x_0$ 时，函数 $y=f(x)$ 的函数值．

全体函数值的集合 $\{y\,|\,y=f(x),\ x\in D\}$，称为函数 $y=f(x)$ 的值域，记为 Z 或 $Z(f)$．

函数的定义有两个基本要素：定义域和对应规则．因此，只有当两个函数的定义域和对应规则完全相同时，才认为它们是同一个函数．

2．函数的表示法

常用的函数表示法有三种：解析法(也叫公式法)、表格法和图示法．

解析法就是用解析表达式(或公式)表示函数关系，例如 $y=x^2+x$，$y=\sin x$，$y=\log_a x$ 等．高等数学中讨论的函数用解析法表示的为多．

表格法是用列表的方法来表示函数关系．例如我们所用的各种数学用表——平方表、立方表、对数表、三角函数表等，在研究社会经济现象时，常常采用这种表格法．

图示法是用直角坐标系 xOy 平面上的曲线(如直线、圆等)来表示函数关系．该曲线通常称为函数的图形(也称为图像)．

函数的三种表示法各有优缺点，在具体应用时，常常是三种方法配合使用．

3．显函数、分段函数、隐函数

(1) 显函数　函数关系用解析式 $y=f(x)$ 表示的称为显函数．如 $y=x^2$，$y=\sqrt{\lg x}$ 等．

(2) 分段函数　有些函数，对于其定义域内自变量 x 的不同值，函数不能用一个统一的公式表示，而要用两个或两个以上的公式来表示，这类函数称为分段函数．

例如

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}\qquad y=\begin{cases}x+1, & x<-1,\\ 1, & -1\leqslant x<0,\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$$

都是定义在$(-\infty,+\infty)$的分段函数.

关于分段函数，一定要注意以下几点：

1° 分段函数是用几个公式合起来表示一个函数，而不是表示几个函数；

2° 由于函数式子是用几个公式分段表示的，所以各段的定义域必须明确标出；

3° 对分段函数求函数值时，不同点的函数值应代入相应范围的公式中去；

4° 分段函数的定义域是各段定义域的并集.

(3) 隐函数　函数 y 与自变量 x 的对应规则是用一个方程 $F(x,y)=0$ 表示的函数，称为隐函数.

例如 $x^2+y^2-1=0$ 就是一个隐函数. 因为在这个方程中，函数 y 没有用仅含自变量 x 的公式 $f(x)$表示出来，如若由它解出　$y=\sqrt{1-x^2}\quad(-1\leqslant x\leqslant 1)$

或　$y=-\sqrt{1-x^2}\quad(-1\leqslant x\leqslant 1).$

它就变成了显函数(称每一个显函数为一个单值支,前一支表示上半圆,后一支表示下半圆)，这就叫隐函数显化(即解成显函数). 要注意的是：并非所有的隐函数都可以解成显函数，例如方程 $x+y-e^{xy}=0$ 就不能解成显函数.

二、函数的简单性质

1.函数的单调性

定义　设函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有定义，如果对于(a,b)内的任意两点 $x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在区间(a,b)内是单调增加的或单调减少的. 若恒有 $f(x_1)<f(x_2)$或 $f(x_1)>f(x_2)$，称为严格单调增加或严格单调减少.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数，单调函数必须指出它的单调区间. 例如函数$y=x^2$在区间$[0,+\infty)$内是单调增加的；在区间$(-\infty,0]$内是单调减少的；而在区间$(-\infty,+\infty)$内不是单调的.

判定函数 $y=f(x)$单调性的常用方法有：

(1) 用函数单调的定义

在给定的区间内任取两点 $x_1<x_2$，比较 $f(x_1)$与 $f(x_2)$的大小，再确定函数是单调增加还是单调减少.

(2) 用函数的导数符号判定

如果在某区间内恒有 $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$，则 $f(x)$在该区间内单调增加(单调减少).

通常都用第二种方法判定函数的单调性(留待第二章介绍).

2.函数的奇偶性

定义　设函数 $y=f(x)$的定义区间 D 关于坐标原点对称(即若 $x\in D$,则有$-x\in D$). 如果对于任意点 x，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为 D 内的偶函数；如果恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为 D 内的奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称.

奇函数的图形关于原点对称.

判定函数奇偶性的方法除了按奇偶性的定义外，还可以利用下列性质：

两个奇(偶)函数之和仍为奇(偶)函数；

两个奇(偶)函数之积必为偶函数；

奇函数与偶函数之积必为奇函数.

注意　很多函数既不是奇函数，也不是偶函数，即非奇非偶函数. 如 $y=x^2+\sin x$.

3.函数的周期性

定义　若存在常数 $T>0$，对于任意 x，恒有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $y=f(x)$为周期函数. 使得上述等式成立的最小正数 T，称为 $f(x)$的最小正周期，简称为函数 $f(x)$的周期.

例如 $y=\sin x$ 就是一个周期函数，周期 $T=2\pi$. 而 $y=\cos(x^2)$就不是周期函数.

需要注意的是：证明一个函数是否是周期函数，有时是很困难的，而且这个问题也是很次要的，不必花很多精力去研究它．另外，求一个函数的最小正周期有时是不可能的．例如常数函数 $y=c$（c 为常数）就是以任意正常数为周期的周期函数，显然很难求它的最小正周期．

4．函数的有界性

定义 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果存在正数 $M>0$，使得对于 (a,b) 内的任意一点 x，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的．否则，称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是无界的．

需要注意的是：

（1）函数的有界性是函数本身的性质，它与所讨论的问题的区间有关．例如 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，而 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是无界的，但在任何有限区间内它都是有界的．函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 内是无界的，而在 $[a,+\infty)$ 内是有界的（$a>0$ 且 a 是常数）．

（2）函数有界切不要与函数有上界或有下界混淆．例如 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是无界的，但它有下界零．而 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 内是无界的，但它有下界 1．

判定函数有界性通常利用闭区间上的连续函数必定为有界函数的性质，或利用基本初等函数的图形等．

三、初等函数

1．反函数

定义 设已知函数为 $y=f(x)$，如果由此解出的 $x=\varphi(y)$ 是一个函数，则称 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$．习惯上常用 x 作为自变量，用 y 作为因变量，因此将 $x=f^{-1}(y)$ 中的 y 换为 x，将 x 换为 y，从而得 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$．如图1－1所示．

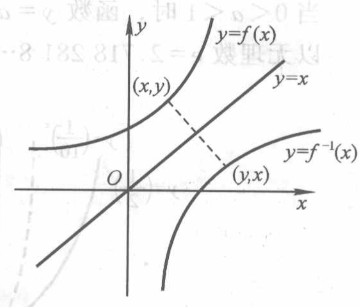

图 1－1

需要注意的是：

（1）由函数 $y=f(x)$（也称为直接函数）如能解出反函数 $x=\varphi(y)$，它们是同一个函数，其函数图形是同一条曲线．但是若将反函数中的 x 与 y 互换后得到 $y=\varphi(x)$，则 $y=f(x)$ 与 $y=\varphi(x)$ 的函数图形是关于直线 $y=x$ 对称的．

（2）若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 Z，且能解出唯一的反函数 $y=\varphi(x)$，则此时反函数的定义域为 Z，值域为 D．

求反函数的一般步骤为：

1° 在 $y=f(x)$ 中将 y 作为已知量，解出 x，即得 $x=\varphi(y)$；

2° 在 $x=\varphi(y)$ 中，将 x 与 y 位置互换，则得到 $y=f(x)$ 的反函数 $y=\varphi(x)$ 或 $y=f^{-1}(x)$．

在什么条件下直接函数 $y=f(x)$ 必有反函数存在呢？

定理（反函数存在定理） 如果函数 $y=f(x)$ 在定义区间 (a,b) 内是严格单调增加（或减少）的（值域为 (c,d)），则它必存在反函数 $y=f^{-1}(x)$，且在区间 (c,d) 内也是严格单调增加（或减少）的（见图 1－1）．

2．基本初等函数（也称为简单函数）

（1）常数 $y=c$

它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，图形是一条平行于 x 轴的直线．

（2）幂函数 $y=x^{\mu}$（μ 为实常数）

它的定义域随 μ 值的不同而不同，但不管 μ 的值是多少，它在 $(0,+\infty)$ 内总是有定义的．

当 $\mu>0$ 时，它的图形如图 1－2 所示，都通过原点 $(0,0)$ 和点 $(1,1)$，在 $(0,+\infty)$ 内严格单调增加

且无界.

当 $\mu<0$ 时，它的图形如图 1－3 所示，都通过点(1,1)，在$(0,+\infty)$内严格单调减少且无界，曲线以 x 轴和 y 轴为渐近线.

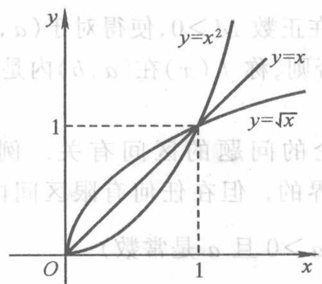

图 1－2

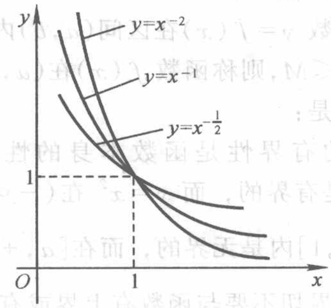

图 1－3

(3) 指数函数　$y=a^x$　($a>0$ 且 $a\neq1$)

它的定义域是$(-\infty,+\infty)$，不论 x 为何值，总有 $a^x>0$，且 $a^0=1$，所以它的图形(如图 1－4 所示)总是在 x 轴的上方，且通过点(0,1).

当 $a>1$ 时，函数 $y=a^x$ 严格单调增加且无界，曲线以 x 轴的负半轴为渐近线；

当 $0<a<1$ 时，函数 $y=a^x$ 严格单调减少且无界，曲线以 x 轴的正半轴为渐近线.

以无理数 e＝2.718 281 8…为底的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 是微积分中常用的指数函数.

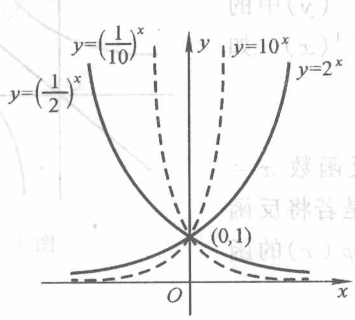

图 1－4

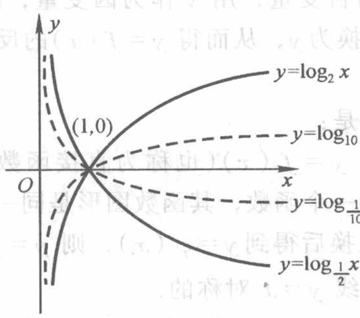

图 1－5

(4) 对数函数　$y=\log_a x$　($a>0$ 且 $a\neq1$)

它的定义域为$(0,+\infty)$，不论 a 为何值，对数曲线(如图 1－5 所示)都过点(1,0).

当 $a>1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 严格单调增加且无界，曲线以 y 轴的负半轴为渐近线；

当 $0<a<1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 严格单调减少且无界，曲线以 y 轴的正半轴为渐近线.

以 10 为底的对数函数叫做常用对数，简记为 $y=\lg x$.

以无理数 e 为底的对数函数叫做自然对数，简记为 $y=\ln x$，它是微积分中常用的对数函数.

(5) 三角函数

三角函数有以下六个：

正弦函数 $y=\sin x$，　余弦函数 $y=\cos x$，

正切函数 $y=\tan x$，　余切函数 $y=\cot x$，

正割函数 $y=\sec x$，　余割函数 $y=\csc x$.

在微积分中，三角函数的自变量 x 一律以“弧度”为单位．例如 $x=1$ 就表示 1 个弧度(1 弧度约为 $57°17'44.8''$).

正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，是奇函数且是周期为 2π 的周期函数，其图形如图 1-6 所示.

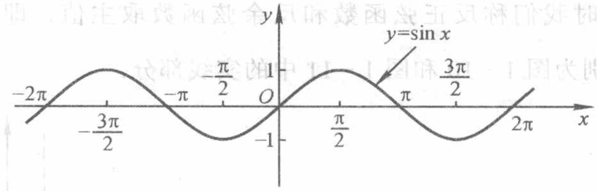

图 1-6

余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，是偶函数且是周期为 2π 的周期函数，其图形如图 1-7 所示.

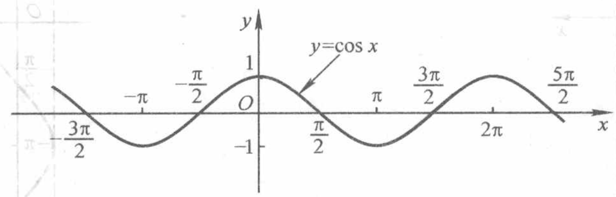

图 1-7

因为$|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，所以 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是有界函数.

正切函数 $y=\tan x$ 的定义域为$x\neq(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$的一切实数，是奇函数且是周期为 π 的周期函数，其图形如图 1-8 所示.

余切函数 $y=\cot x$ 的定义域为$x\neq k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$的一切实数，是奇函数且是周期为 π 的周期函数，其图形如图 1-9 所示.

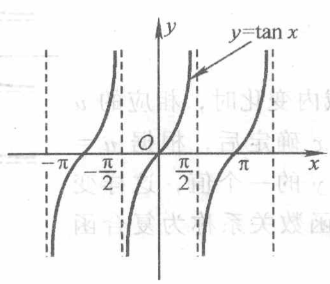

图 1-8

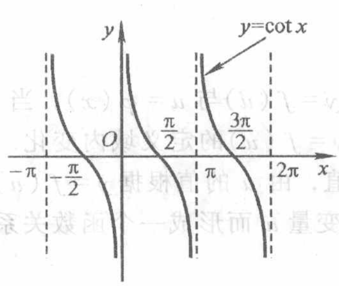

图 1-9

正割函数 $y=\sec x$ 与余割函数 $y=\csc x$ 分别是余弦函数与正弦函数的倒数，即

$$\sec x=\frac{1}{\cos x},\quad \csc x=\frac{1}{\sin x}.$$

它们都是以 2π 为周期的周期函数，并且在开区间$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内都是无界函数.

(6) 反三角函数

常见的反三角函数有以下四个：

反正弦函数 $y=\arcsin x$，　反余弦函数 $y=\arccos x$，

反正切函数 $y=\arctan x$，　反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$.

它们是作为相应三角函数的反函数定义出来的. 由于 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 在定义域内不单调，它们

的反函数不唯一，所以对于 $y=\sin x$ 只考虑 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，对于 $y=\cos x$，只考虑 $x\in[0,\pi]$，以使它们单调，其反函数存在．此时我们称反正弦函数和反余弦函数取主值，即 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$．它们的图形分别为图 1－10 和图 1－11 中的实线部分．

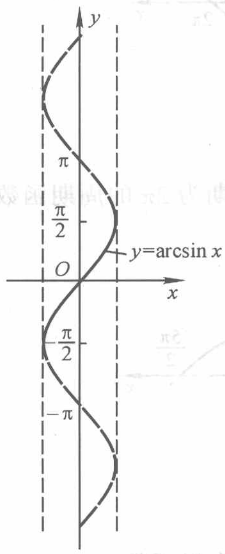

图 1－10

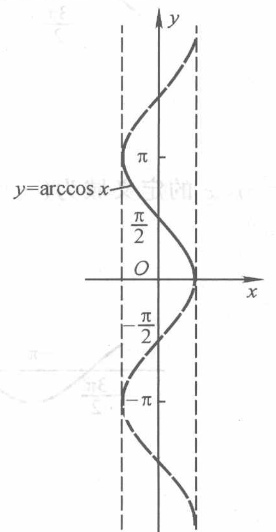

图 1－11

$y=\arcsin x$ 和 $y=\arccos x$ 的定义域都是 $[-1,1]$．

同理，对于反正切函数 $y=\arctan x$ 和反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ 也是分别取主值，即 $-\frac{\pi}{2}<\arctan x<\frac{\pi}{2}$ 和 $0<\operatorname{arccot} x<\pi$．反正切函数的图形如图 1－12 中的实线部分．

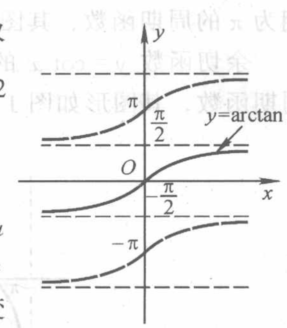

图 1－12

3. 复合函数

定义　设函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$，当 x 在定义域内变化时，相应的 $u=\varphi(x)$ 的值也在 $y=f(u)$ 的定义域内变化．因此，当 x 确定后，根据 $u=\varphi(x)$ 就得到 u 的值，由 u 的值根据 $y=f(u)$ 又确定了 y 的一个值，这样变量 x 与 y 之间通过变量 u 而形成一个函数关系，这样的函数关系称为复合函数．记为

$$y=f[\varphi(x)],$$

其中 x 称为自变量，u 为中间变量，y 为因变量(即函数)．

必须注意：不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的．例如

$$y=\arcsin u \quad 与 \quad u=x^2+2$$

就不能复合成一个复合函数．这是因为在 $(-\infty,+\infty)$ 内的任何 x 值所对应的 $u=x^2+2\geqslant 2$，都不能使 $y=\arcsin u$ 有意义．

另外，复合函数不仅可以有一个中间变量，还可以有更多的中间变量，如 u，v，w，t 等，即可以通过多次复合得到一个函数．

对于复合函数，我们必须会正确分析它是怎样由基本初等函数复合而成的，这在微积分的学习中是非常重要的！请读者给以足够的重视．

4. 初等函数

定义　由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合而成并能用一个解析式表示的函数，称为

初等函数.

例如 $y=\sin(x^2-x)$,

$y=\ln^3\arctan\sqrt{x}$,

$y=2^{\cos\frac{1}{x}}+\dfrac{x}{1+x^2}-3$,

它们都是初等函数.

第二节 极 限

一、数列的极限

1.数列的概念

定义 按一定顺序排列的一列数 x_1, x_2, …, x_n, …称为无穷数列，简称数列，记作 $\{x_n\}$. 数列中的每一个数叫做数列的项，第 n 项 x_n 叫做数列的一般项或通项. 例如:

(1) $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{3}{4}$, …, $\dfrac{n}{n+1}$, …

(2) 2, 4, 8, …, 2^n, …

(3) $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{8}$, …, $\dfrac{1}{2^n}$, …

(4) 2, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{4}{3}$, …, $\dfrac{n+(-1)^{n+1}}{n}$, …

都是数列，它们的一般项依次为

$$\frac{n}{n+1},\ 2^n,\ \frac{1}{2^n},\ \frac{n+(-1)^{n+1}}{n}$$

数列 $\{x_n\}$ 可看作自变量为正整数 n 的函数:

$$x_n=f(n),$$

它的定义域是全体正整数，当自变量 n 依次取 1, 2, 3, …等一切正整数时，对应的函数值就排成数列 $\{x_n\}$.

2.数列的极限

定义 对于数列 $\{x_n\}$，如果当 $n\to\infty$ 时，x_n 无限地趋于一个确定的常数 A，则称为 n 趋于无穷大时，数列 $\{x_n\}$ 以常数 A 为极限，或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A \quad 或 \quad x_n\to A \quad (当\ n\to\infty 时).$$

否则，称数列 $\{x_n\}$ 没有极限. 如果数列没有极限，就称数列是发散的.

数列极限的几何意义是：将常数 A 和数列的每一项 x_1, x_2, …, x_n, …依次用数轴上的点表示，若数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限，就表示当 n 趋于无穷大时，点 x_n 可以无限靠近点 A，即点 x_n 与点 A 之间的距离 $|x_n-A|$ 趋于零.

例如：$x_n=1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$，当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to 1$,

即 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)=1$,

或 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|x_n-1|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

3.数列极限的性质

定理 1(唯一性) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则其极限值必定唯一.

定理 2(有界性)　若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则它必定有界.

注意：这个定理反过来不一定成立，也就是说，有界数列不一定收敛.

例如：$x_n=(-1)^{n+1}$是有界的，但 x_n 无极限.

当 $n=2k+1\quad(k=0,1,2,\cdots)$时，　$x_n=1$，

当 $n=2k\quad(k=0,1,2,\cdots)$时，　$x_n=-1$，

所以当 $n\to\infty$时，x_n 不趋于一个确定的常数，即 $\{x_n\}$ 发散.

4.数列极限存在准则

准则Ⅰ　(两面夹准则也称为夹逼准则)

如果数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件：

(1) $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n\quad(n=1,2,3,\cdots)$，

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$，

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

准则Ⅱ　单调有界数列必有极限.

5. 数列极限的四则运算定理

定理 3　如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A\pm B$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)\cdot(\lim\limits_{n\to\infty}y_n)=A\cdot B$.

(3) 当$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B\neq0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\dfrac{A}{B}$.

二、函数的极限

1. 当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$的极限

(1) 当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$的极限

定义　如果当 x 无限地趋于x_0 时，函数 $f(x)$无限地趋于一个确定的常数 A，则称当$x\to x_0$时，函数 $f(x)$的极限(值)为 A，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\quad\text{或}\quad f(x)\to A\ (\text{当 }x\to x_0\text{ 时}).$$

(2) 当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$的左(或右)极限

定义　如果当 x 从x_0 的左边(或右边)无限地趋于 x_0 时，函数 $f(x)$无限地趋于一个确定的常数 A，则称当$x\to x_0$时，函数 $f(x)$的左(或右)极限是 A，记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0-0)=A\quad(\text{或 }\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0+0)=A).$$

例 1　设函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x>0,\end{cases}$　求 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$.

分析　$f(x)$的左极限是从零的左边趋于零，因此有

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(x-1)=-1.$$

同理

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(x+1)=1.$$

显然，当 $x\to0$ 时，$f(x)$的左、右极限不相等.(参见图 1－13).

例 2　设函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}\quad(x\neq1)$，求 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$和 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$.

分析　极限定义中的 $x\to x_0$ 是 x 无限地趋于x_0，即 $x\neq x_0$，因此当 $x\neq1$ 时，$f(x)=x+1$，