21世纪高等学校精品规划教材

弹性力学内容精要与典型题解

刘章军 编著

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

21世纪

高等学校精品规划教材

弹性力学内容精要与典型题解

刘章军　编著

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书共分两部分：第一部分为内容精要与典型例题，包括弹性力学各章基本理论的归纳总结，以及115道典型例题的解答与分析；第二部分为考试题库及其详解，包括精心设计的10套完整考试试题及每套试题的参考答案。两部分的例题相互独立，互不重复、互为补充而形成有机的整体。书中注重解题的透彻性、方法性和拓展性，同时对部分章节增加了"探讨与提高"，以便对特殊问题进行专题解析，意在拓宽学生的解题思路。本书中大部分例题为历年来全国重点高校考研真题，部分是作者独立创作的新题。

本书可作为高等学校土木、水利、机械、力学、交通、船舶等专业大学生和研究生学习与考试的辅导教材，也可作为大学教师和相关科研人员的参考书。

图书在版编目（C I P）数据

弹性力学内容精要与典型题解 / 刘章军编著. -- 北京 : 中国水利水电出版社, 2009.12

21世纪高等学校精品规划教材
ISBN 978-7-5084-7065-8

I. ①弹… II. ①刘… III. ①弹性力学－高等学校－教材 IV. ①O343

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第228415号

书　　名	21世纪高等学校精品规划教材 **弹性力学内容精要与典型题解**
作　　者	刘章军　编著
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（营销中心）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：（010）88383994、63202643 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	中国水利水电出版社微机排版中心
印　　刷	北京市兴怀印刷厂
规　　格	175mm×245mm　16开本　21.5印张　496千字
版　　次	2009年12月第1版　2009年12月第1次印刷
印　　数	0001—3000册
定　　价	**38.00元**

前言

弹性力学是一门与土木、水利、交通、机械、航空等工程实际密切相关的基础技术学科。学习弹性力学，一是要理解弹性力学的基本概念，掌握基本理论和基本方法；二是要重视实践，掌握弹性力学的解题思路及其工程应用。通过演算、分析一定数量的典型例题，可以加深对基本概念的理解，以及对基本理论和基本方法的应用，从而培养分析、解决工程实际问题的能力。同时，通过一定数量的考试试题的模拟、训练，可以大大提高学生的应试能力，并拓展知识面。希望本书有助于激发学生学习的积极性，提高学生的分析、综合和创新能力。

本书以弹性力学课程教学与考试基本要求的内容为主，共分两大部分：第一部分为内容精要与典型例题，主要按课程教学的基本内容分为10章：绪论；平面问题的基本理论；平面问题的直角坐标解答；平面问题的极坐标解答；空间问题的基本理论；空间问题的解答；等截面直杆的扭转；薄板的小挠度弯曲问题；能量原理与变分法；平面问题的有限单元法。第二部分为考试题库及其详解，这部分内容与第一部分内容相互独立，互不重复、互为补充而形成有机的整体，每套试题根据考试的类别不同，在试题的题型、内容及难度上均有所差异，以便适应于不同考生学习和考前训练使用。其中：

“内容精要”以提纲挈领的形式，列出各章的基本概念和基本公式，以及相关的物理意义和注明。这一部分既是对各章内容的归纳总结，也是对各章概念和公式的强调。

“典型例题”精选了一些较为典型、概念性较强、具有一定启发性和拓展性的例题。每道例题均给出了详细的解答过程，注重解题思路和分析讨论，并强调解题方法的拓展与应用。典型例题的编号按章的序号编排，以便读者阅读和查找。本书中所有带“*”号的例题，均精选于全国部分重点高校历年来研究生入学考试的试题，这些例题概念性和综合性较强，

具有很好的拓展性。部分章节还增加了“探讨与提高”、“归纳与小结”，旨在对少数专题进行深入分析，以便能够借以深化理解、拓展视野、提高理解能力和工程应用能力。

“考试题库及其详解”包括10套完整的考试试题及其参考答案，其中带“#”的试题可作为大学本科（自学）考试的学生学习模拟使用；带“##”的试题可作为参加硕士研究生入学考试的考生学习模拟使用；带“###”的试题可作为参加博士研究生入学考试的考生学习模拟使用。对每道考题而言，并不局限于本类考试，可以作为所有类别考试的考生学习使用。这部分内容对学习弹性力学的学生以及有志于报考研究生的考生均有所裨益。

本书在编写过程中参考了大量的文献和资料，因条件所限未能一一列出。值本书出版之际，谨向采用的研究生入学考试试题的命题人及其他参考文献的作者致以深切的谢意！感谢同济大学土木工程学院的陈建兵教授给予本书编写方面有益的建议和意见；感谢雷耀龙研究生为本书所作的认真、细致的校对工作。

本书的出版得到了三峡大学的大力资助，在此编者向三峡大学表示感谢！

由于编者水平所限，书中难免有疏漏之处，敬请广大读者和同行专家批评指正。

编 者

2009年11月

目录

第二部分　考试题库及其详解

第一部分　内容精要与典型例题

第1章　绪　　论

本章学习和需要掌握的主要内容：

1. 弹性力学的研究内容、对象和任务；
2. 弹性力学的基本物理量；
3. 弹性力学的研究方法；
4. 弹性力学的基本假定；
5. 弹性力学的一般原理。

1.1　内　容　精　要

1.1.1　弹性力学的研究内容、对象和任务

弹性力学又称弹性理论（Theory of Elasticity，或 Elasticity），是固体力学的一个分支，它是研究弹性体在力和温度变化等外界因素作用下所产生的应力、应变和位移，从而解决各类工程中所提出的强度、刚度和稳定问题。其研究对象是弹性体，主要为一般及复杂形状的构件、实体结构、板壳等。弹性力学与其他力学课程的比较见表1.1。

表1.1　　几门力学课程研究对象和内容的比较

课程名称	研究对象	研　究　内　容
理论力学	质点、质点系（刚体）	物体机械运动的一般规律，包括静力学、运动学和动力学3个部分
材料力学	杆状构件	构件在拉压、剪切、弯曲、扭转状态下的应力和位移
结构力学	杆件系统	桁架、刚架等杆系结构的约束力、内力与位移
弹性力学	弹性体	构件、平面体、空间体、板壳等结构的应力、应变和位移分析
塑性力学	弹塑性体	结构的弹塑性分析、设计

弹性力学作为一门基础技术学科，是近代工程技术的必要基础之一，在土木、水利、交通、机械、航空等工程学科中占有重要的地位。弹性力学的基本任务是：

（1）和材料力学、结构力学一起，综合地、不同层次地解决各类工程实际问题。

（2）校核初等力学理论所得结果的可靠性、精确性以及适用范围。

(3) 为后续课程的学习提供基本的理论基础。

对于工科学生而言，学习弹性力学的主要目的是：

(1) 理解和掌握弹性力学的基本理论（基本概念、基本方程和基本解法）以及一些问题的基本解答。

(2) 能够应用弹性力学的基本理论求解简单的弹性力学问题。

(3) 能更好地理解和掌握以往所学的力学课程及其应用范围，并能应用已有解答为工程实际服务。

(4) 能理解近似解法（差分法、变分法及有限单元法）的基本原理，并能应用近似解法解决工程实际问题。

(5) 能阅读弹性力学文献，为进一步学习其他力学课程打下基础。

1.1.2 弹性力学的基本物理量

弹性力学中经常用到的基本物理量有外力、应力、应变和位移。为此，需要了解各物理量的定义、符号、量纲、正负方向的规定，表 1.2 给出用直角坐标表示的各种基本物理量的情况。

表 1.2 直角坐标表示的各种基本物理量情况

基本物理量		平面问题	空间问题	量纲	正负方向的规定
外力（已知量）	体力	f_x，f_y	f_x，f_y，f_z	$L^{-2}MT^{-2}$ [力] [长度]$^{-3}$	沿坐标轴正方向为正，反之为负
	面力	$\overline{f}_x$，$\overline{f}_y$	$\overline{f}_x$，$\overline{f}_y$，$\overline{f}_z$	$L^{-1}MT^{-2}$ [力] [长度]$^{-2}$	沿坐标轴正方向为正，反之为负
未知量	正应力	σ_x，σ_y	σ_x，σ_y，σ_z	$L^{-1}MT^{-2}$ [力] [长度]$^{-2}$	正面正向、负面负向的为正，反之为负
	剪应力	τ_{xy}	τ_{xy}，τ_{yz}，τ_{zx}	$L^{-1}MT^{-2}$ [力] [长度]$^{-2}$	正面正向、负面负向的为正，反之为负
	正应变	ε_x，ε_y	ε_x，ε_y，ε_z	量纲一	线段伸长为正，反之为负
	剪应变	γ_{xy}	γ_{xy}，γ_{yz}，γ_{zx}	量纲一	线段间直夹角变小为正，反之为负
	位移	u，v	u，v，w	L [长度]	沿坐标轴正方向为正，反之为负

注 1. 本书的量纲采用国际单位制表示，其基本物理量为长度（L）、质量（M）和时间（T）。
2. 弹性力学中常采用直角坐标系(x，y，z)、极坐标系(ρ，φ)、柱坐标系(ρ，φ，z)和球坐标系(r，θ，φ)。
3. 正面是指外法线方向与坐标轴的正方向相一致的面；负面是指外法线方向与坐标轴的负方向相一致的面。

此外，需要强调的是：

(1) 对于外力，无论在哪一个位置的体力，在哪一个边界面上的面力均以沿坐标正方向为正。

(2) 应力的符号规定，无论是正应力还是剪应力，首先要分清是正面还是负面，然后正面正向、负面负向为正。

(3) 弹性力学与材料力学相比，正应力的符号规定两者是一致的；而剪应力的符

号规定则不完全相同，即材料力学中剪应力是以单元或其局部产生顺时针方向转动趋势的为正［图 1.1（*a*）］，而弹性力学的规定不同［图 1.1（*b*）］。

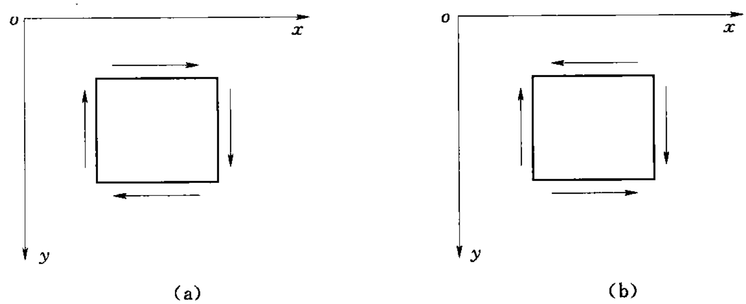

图 1.1

1.1.3 弹性力学的研究方法

在外力作用、边界约束或温度改变等条件下，弹性体区域内部各点的应力、应变和位移都是位置坐标的函数。求解这些未知函数必须考虑静力学、几何学和物理学 3 方面条件，分别建立 3 套方程，即根据微分体上力的平衡条件，建立平衡微分方程；根据微分线段上应变与位移之间的几何条件，建立几何方程；根据应力与应变之间的物理条件，建立物理方程。

此外，在弹性体的边界上，还必须考虑边界条件。即在给定面力的边界上，根据边界上的微分体的平衡条件，建立应力边界条件；在给定约束的边界上，根据边界上的约束条件，建立位移边界条件。

然后，在给定的边界条件下，求解弹性体区域内的基本方程（平衡微分方程、几何方程和物理方程），得到未知的应力、应变和位移。

从上述弹性力学的研究方法来看，它与材料力学既有相似之处，又有一定区别。弹性力学所研究的都是超静定问题，在弹性体区域内严格考虑了静力学、几何学和物理学 3 方面条件，在边界上严格考虑了静力条件或约束条件（尽管有时在次要边界上应用了圣维南原理进行放松，使得应力边界条件是近似满足的，但这只影响次要边界附近的局部区域）。而在材料力学的研究方法中，虽然也考虑了这几方面的条件，但为了简化计算，大多还对所研究的问题引入了附加假设，因而不是十分严格的。例如，在研究直梁受横向荷载作用下的弯曲时，在几何条件中，引入了平截面假设，由此导出应力、应变和位移沿横向直线分布；在平衡条件中，没有考虑挤压应力 σ_y 的影响，并且考虑的是有限部分 $\Delta V=\mathrm{d}x\cdot h\cdot 1$ 的平衡条件，而不是微分体的平衡条件。此外，在边界上，材料力学也没有如弹性力学一样，严格地满足所有的边界条件。

一般地说，由于材料力学建立的是近似理论，因而得出的解答是近似的。但是，对于细长的杆状构件，材料力学解答的精度是足够的，满足工程上的要求。对于非杆状构件，用材料力学方法得到的解答，往往具有较大的误差。这也是为什么材料力学只研究和适用于杆件问题的原因。

1.1.4 弹性力学的基本假定

弹性力学的 5 个基本假定，就是概括了弹性力学研究对象的主要因素而建立的一

种力学计算模型。即弹性力学是研究理想弹性体（符合物体材料性质的4个基本假定，即连续性、完全弹性、均匀性和各向同性）的小变形问题，这也就确定了弹性力学的研究范围。

弹性力学的基本假定在建立弹性力学基本方程中的作用如下：

(1) 连续性假定：假定物体是连续的。这样，物体内的所有物理量都可以用连续函数来表示，因而在数学推导时可方便地运用数学分析工具。

(2) 完全弹性假定：假定物体是完全弹性的，在一般的弹性力学中，完全弹性这一假定，还包含了线性弹性这一概念。因此，弹性体中的应力和应变之间服从胡克定律，从而使物理方程成为线性的代数方程。

(3) 均匀性假定：假定所研究的物体是用同一类型的均匀材料组成的。因此，材料的物理性质（如弹性常数）均与坐标位置无关。这样，在处理问题时可取出物体内任一部分进行分析，然后将分析的结果用于整个物体。

(4) 各向同性假定：假定物体在不同的方向上具有相同的物理性质，因而物体的弹性常数与坐标方向无关。

(5) 小变形假定：假定物体变形后，整个物体所有各点的位移都远远小于物体原来的尺寸，而且应变和转角都远小于1。这样，在研究物体的平衡时，可不考虑由于变形引起的物体尺寸和位置的变化；在建立几何方程时，可以略去应变、转角的二次幂或二次乘积及以上的项。从而，弹性力学中的平衡微分方程和几何方程都简化为线性的方程。

1.1.5 弹性力学的一般原理

弹性力学的一般原理主要包括：圣维南原理、叠加原理和解的唯一性定理。

1. 圣维南（Saint－Venant）原理

圣维南原理也称局部性原理。它可表述为：若把作用在物体局部边界上的面力，用另一组与它静力等效（即有相同的主矢量和主矩）的力系来代替，则在力系作用区域的附近应力分布将有显著的改变，但在远处所受的影响可以不计。

应该指出，对于薄壁杆件应用圣维南原理时，要求力的作用区域必须与壁厚尺寸大致相当，否则将会导致严重的错误。

2. 叠加原理

在小变形和线弹性的条件下，作用在物体上的几组荷载所产生的总效应（应力和变形），等于每组荷载单独作用效应的总和。

应该指出，叠加原理除了小变形和线弹性这两个假定外，还要求一种荷载的作用不会引起另一种荷载的作用发生性质的变化，否则叠加原理也不能适用。例如，在细长杆件的纵横弯曲问题中，横向荷载引起的弯曲变形将使轴向荷载产生附加的弯曲效应，因此，叠加原理不能适用。

3. 解的唯一性定理

假设弹性体受已知体力作用，在物体的边界上，或者面力已知，或者位移已知，或者一部分边界上面力已知，而另一部分边界上位移已知，则在弹性体平衡时，物体内各点的应力与应变是唯一的，对于后两者情况，位移也是唯一的。

弹性力学解的唯一性定理的重要性在于它为逆解法和半逆解法提供了理论依据。

1.2 典 型 例 题

【例 1.1*】 如图 1.2 (a) 所示的受轴向拉伸的变截面薄板，若采用材料力学方法计算其应力时，所得结果是否总能满足杆段［图 1.2 (b) 所示部分］和微元体［图 1.2 (c) 所示部分］的平衡？若采用弹性力学方法，其结果又将如何？

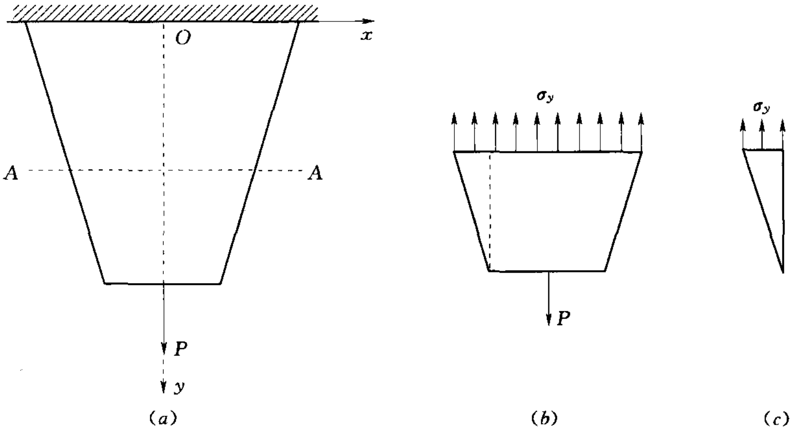

图 1.2

解 若按材料力学方法计算受轴向拉伸变截面薄板的应力时，假定了横截面上无剪应力，正应力均匀分布，即 $\tau_{yx}=0$，$\sigma_y=P/A_0$（其中 A_0 为 A—A 处的横截面面积），同时假定薄板的纵向纤维互不挤压，即 $\sigma_x=0$。若取整个杆件的某一段加以分析，如图 1.2 (b) 所示，显然能够满足平衡条件；若在杆件的边界上取一微元体，其各个面上的应力分布如图 1.2 (c) 所示，显然它不能平衡。可见，对于此问题，材料力学的解答是错误的。

按弹性力学方法计算时，在杆内任一点处取微元体，使其满足平衡条件，如图 1.3 (a) 所示；在杆件的边界上，对于图 1.2 (c) 所示微元体的两个互相垂直的截面上都有正应力和剪应力，即图 1.3 (b) 所示，此时边界上的微元体也是满足平衡条件的，即满足应力边界条件。因此，弹性力学方法可以保证杆件的任一点都满足平衡条件。故弹性力学方法计算的结果总能满足杆段平衡和微元体平衡，因而是正确解答。

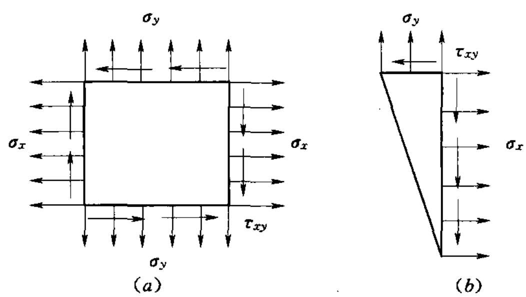

图 1.3

第 2 章　平面问题的基本理论

本章学习和需要掌握的主要内容：

1. 两类平面问题的基本概念；
2. 平面问题的基本方程：平衡微分方程、几何方程和物理方程；
3. 平面问题的边界条件：应力边界条件、位移边界条件和混合边界条件，以及圣维南原理的应用；
4. 平面问题的两条求解途径：按位移求解和按应力求解；
5. 平面问题中相容方程和应力函数的概念；
6. 平面问题中一点应力状态的分析。

2.1 内　容　精　要

2.1.1 两类平面问题的基本概念

当物体的形状和所受外力或约束具有某些特征时，可以将三维空间问题简化为二维平面问题。所谓平面问题，一是基本未知量均是平面（xy 面）内的物理量；二是这些基本未知量仅是坐标 x、y 两变量的函数。平面问题可分为平面应力问题和平面应变问题，图 2.1（a）、（b）分别是平面应力问题和平面应变问题的典型实例。

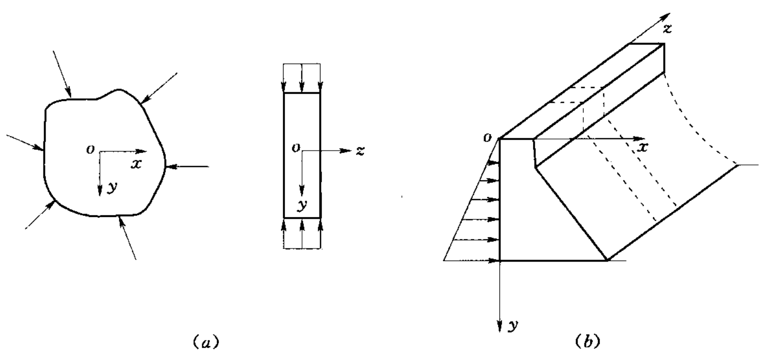

图 2.1

1. 平面应力问题的基本条件

弹性体是等厚度的薄板［在图 2.1（a）中沿 z 向是等厚度的］；体力、面力和约束都只有 xy 平面内的量（f_x，f_y；$\overline{f}_x$，$\overline{f}_y$；$\overline{u}$，$\overline{v}$），都不沿 z 向变化；并且面力和约束只作用于板边，在板面上没有任何面力和约束的作用。

根据这一条件，可以得出：

（1）由于板面上无面力和约束作用，以及薄板很薄，可以认为薄板中各点的应力分量$\sigma_z=\tau_{zx}=\tau_{zy}=0$。因此，薄板中各点只有平行于$xy$面的3个应力分量（$\sigma_x$，$\sigma_y$，$\tau_{xy}$）。

（2）由于物体形状和外力、约束都沿z向不变化。因此，应力分量都只是坐标x、y两变量的函数。

可见，所谓平面应力问题，就是只有平面应力分量（σ_x，σ_y，τ_{xy}）存在，且它们都只是坐标x、y的函数的弹性力学问题。

2. 平面应变问题的基本条件

弹性体为等截面的长柱体［图2.1（b）］；体力、面力和约束条件与平面应力问题类似，只有xy平面内的体力（f_x，f_y），面力（$\overline{f}_x$，$\overline{f}_y$）和约束（$\overline{u}$，$\overline{v}$）的作用，且都不沿z向变化。为此，可以得出：

（1）因为柱体很长，可以认为任一截面（垂直于z的平面）都是对称面，因此位移$w=0$，而只有平面位移分量（u，v），故有时也称平面位移问题；同样地，由于对称性，应变分量$\varepsilon_z=\gamma_{zx}=\gamma_{zy}=0$，而只有平面应变分量（$\varepsilon_x$，$\varepsilon_y$，$\gamma_{xy}$），所以称为平面应变问题。

（2）由于物体的截面形状、外力及约束都沿z向不变化。因此，应变分量都只是坐标x、y两变量的函数。

可见，所谓平面应变问题，就是只有平面应变分量（ε_x，ε_y，γ_{xy}）存在，且它们都只是坐标x、y的函数的弹性力学问题。

2.1.2 平面问题的基本方程

弹性力学平面问题的基本未知量有8个，即3个应力分量（σ_x，σ_y，τ_{xy}）、3个应变分量（ε_x，ε_y，γ_{xy}）及2个位移分量（u，v），它们都是以坐标x、y为自变量的函数。为了求解这8个基本未知量，需要建立弹性力学平面问题的基本方程和边界条件，其中基本方程包括：2个平衡微分方程，3个几何方程，3个物理方程，见表2.1。

表2.1 平面问题的基本方程、物理关系及基本假定

名称	基本方程的表达式	表示物理量的关系	应用的基本假定
平衡微分方程	$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+f_x=0$ $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+f_y=0$　（2.1）	表示应力分量与体力分量之间的关系	连续性，小变形
几何方程	$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}$，$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}$， $\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$　（2.2）	表示应变分量与位移分量之间的关系	连续性，小变形
物理方程	$\varepsilon_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-\mu\sigma_y)$ $\varepsilon_y=\frac{1}{E}(\sigma_y-\mu\sigma_x)$　（2.3a） $\gamma_{xy}=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}$ （平面应力问题） $\varepsilon_x=\frac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_x-\frac{\mu}{1-\mu}\sigma_y\right)$ $\varepsilon_y=\frac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_y-\frac{\mu}{1-\mu}\sigma_x\right)$　（2.3b） $\gamma_{xy}=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}$ （平面应变问题）	表示应变分量与应力分量之间的关系	连续性，完全弹性，均匀性，各向同性

注　由于应力分量$\tau_{xy}=\tau_{yx}$，应变分量$\gamma_{xy}=\gamma_{yx}$，因此只作为一个独立未知的应力分量与应变分量来处理。

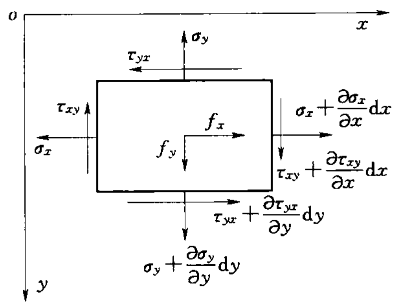

图 2.2

平衡微分方程表示区域内任一点微分体的平衡条件，如图 2.2 所示。由于弹性力学考虑的是每一个微分体的平衡，必然保证了有限部分和整体的平衡。因此，弹性力学对平衡条件的考虑是严格和精确的。这与理论力学所考虑的整体平衡以及材料力学所考虑的有限部分平衡是有所差异的。

几何方程表示区域内任一点的微分线段上应变与位移之间的几何关系，它实质上是一种变形的连续性条件。即变形前物体是连续的，变形后物体也应保持连续。

在推导平衡微分方程和几何方程时，都应用了连续性和小变形这两个基本假定，而没有应用有关材料力学性质的基本假定（如均匀性、各向同性、完全弹性），因此，平衡微分方程和几何方程属于普适方程，其适用条件是符合连续性和小变形假定。

物理方程表示应力分量与应变分量之间的物理关系。在理想弹性体（即满足连续性、完全弹性、均匀性和各向同性）的条件下，物理方程即为广义胡克定律。此外，在平面应力问题的物理方程中，将 E、μ 分别换成 $E/(1-\mu^2)$ 和 $\mu/(1-\mu)$，便可得到平面应变问题的物理方程。反之，若将平面应变问题中的 E、μ 分别换成 $E(1+2\mu)/(1+\mu)^2$ 和 $\mu/(1+\mu)$，就可得到平面应力问题的物理方程。

2.1.3　平面问题的边界条件

边界条件表示在边界上位移与约束之间的连续关系，或应力与面力之间的平衡关系。它可以分为应力边界条件、位移边界条件和混合边界条件。弹性力学平面问题的 3 类边界条件如表 2.2 所示，其中 S_σ、S_u 分别表示面力、位移已知的边界，l 和 m 则是边界面外法线的方向余弦。

表 2.2　　平面问题的边界条件

应力边界条件	位移边界条件	混合边界条件
在应力边界 S_σ 上： $l\sigma_x+m\tau_{xy}=\overline{f}_x$ $l\tau_{xy}+m\sigma_y=\overline{f}_y$　　(2.4)	在位移边界 S_u 上： $u=\overline{u}$，$v=\overline{v}$　　(2.5)	$u=\overline{u}$，$v=\overline{v}$（在 S_u 上） $l\sigma_x+m\tau_{xy}=\overline{f}_x$ $l\tau_{xy}+m\sigma_y=\overline{f}_y$　（在 S_u 上）

应力边界条件实质上是边界点上微分体的平衡条件，如图 2.3 所示（注：图中未标明体力分量，因其为高阶微量）；位移边界条件实质上是变形连续条件在约束边界上的体现。

圣维南原理（也称局部效应原理）：如果把物体的一小部分边界上的面力，变换为分布不同但静力等效的面力（主矢量相同，对于同一点的主矩也相同），那么，近处的应力分布将有显著的改变，但是远处所受的影响可以不计。

在应力边界上应用圣维南原理，就是在次要边界（小边界或局部边界）上，将精

确的应力边界条件［即式（2.4）］代换为主矢量相同，对于同一点的主矩也相同的静力等效条件。

在弹性力学问题的求解中，常常在局部边界上用近似的积分的应力边界条件代替严格的应力边界条件，从而使问题的求解大为简化。

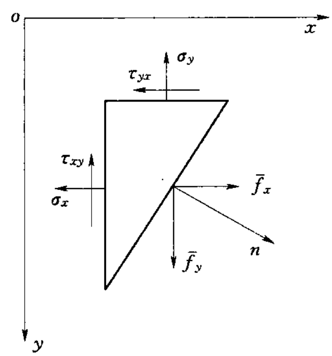

图 2.3

2.1.4 平面问题的两条求解途径

弹性力学平面问题共有 8 个未知函数（3 个应力分量、3 个应变分量和 2 个位移分量），它们必须满足区域内的平衡微分方程、几何方程和物理方程，以及在边界上的应力或位移边界条件。一般有下列两条求解途径：

位移法（按位移求解的方法）：取位移分量为基本未知函数，从基本方程和应力边界条件中消去应力和应变分量，导出用位移表示的平衡微分方程和用位移表示的应力边界条件。并由此求出位移分量，通过几何方程求出应变分量，再由物理方程求出应力分量。

应力法（按应力求解的方法）：取应力分量为基本未知函数，从基本方程和边界条件中消去位移和应变分量，导出用应力表示的相容方程和边界条件。并由此求出应力分量，再求出应变分量和位移分量。

（1）按位移求解平面问题时，位移分量（u，v）必须满足下列全部条件：

1）用位移表示的平衡微分方程（平面应力问题）：

$$\left.\begin{aligned}\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)+f_x=0\\ \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)+f_y=0\end{aligned}\right\}\tag{2.6}$$

2）用位移表示的应力边界条件（平面应力问题）：

$$\left.\begin{aligned}\frac{E}{1-\mu^2}\left[l\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+m\,\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]=\bar{f}_x\\ \frac{E}{1-\mu^2}\left[m\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+l\,\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]=\bar{f}_y\end{aligned}\right\}\quad（在\ S_\sigma\ 上）\tag{2.7}$$

3）位移边界条件，即式（2.5）：

$$u=\bar{u},v=\bar{v}\qquad（在\ S_u\ 上）$$

对于平面应变问题，需将式（2.6）与式（2.7）中的 E、μ 分别换成 $E/(1-\mu^2)$ 和 $\mu/(1-\mu)$。

（2）按应力求解平面问题时，应力分量（σ_x，σ_y，τ_{xy}）必须满足下列全部条件：

1）平衡微分方程，即式（2.1）：

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+f_x=0,\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+f_y=0$$

2）用应力表示的相容方程（平面应力问题）：

$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=-(1+\mu)\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}\right)\tag{2.8}$$

3）应力边界条件（假定全部为应力边界条件），即式（2.4）：

$$l\sigma_x+m\tau_{xy}=\overline{f}_x,l\tau_{xy}+m\sigma_y=\overline{f}_y \quad (\text{在 } S=S_\sigma \text{ 上})$$

对于多连体，还须满足位移单值条件。

2.1.5　平面问题的相容方程和应力函数

相容方程，也称应变协调方程，其物理意义在于：

（1）相容方程是连续体中位移连续性的必然结果。在物体的连续性假定下，位移必然是连续的，由此导出几何方程，并进一步可导出相容方程。

（2）相容方程是应变所对应的位移存在且连续的必要条件。当应变分量满足相容方程后，可以求出对应的位移分量，这说明位移是存在的而且必然连续。反之，不满足相容方程的应变分量，不是物体中实际存在的，也求不出对应的位移。

表 2.3 给出了用应力分量、应变分量以及应力函数表示的不同形式。

表 2.3　　相容方程的表示形式

名　称		平面应力问题	平面应变问题
用应力表示	一般情况	$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=-(1+\mu)\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}\right)$ (2.8a)	$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=-\frac{1}{1-\mu}\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}\right)$ (2.8b)
	常体力	$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=0$　(2.9)	
用应变表示		$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}$　(2.10)	
用应力函数表示（常体力情况）		$\nabla^4\Phi(x,y)=0$　(2.11)	

注　式（2.8）～式（2.11）的物理意义都表示连续条件。

在常体力情况下，用应力表示的相容方程可简化为式（2.9），而平衡微分方程式（2.1）的解可直接得出，即引入应力函数 $\Phi(x,y)$，平衡微分方程的全解为：

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-xf_x,\sigma_y=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-yf_y,\tau_{xy}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \tag{2.12a}$$

或

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2},\sigma_y=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2},\tau_{xy}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}-yf_x-xf_y \tag{2.12b}$$

事实上，还可写出很多不同形式，只要给出平衡微分方程式（2.1）的任意一个特解。

在常体力情况下，按应力求解平面问题，可归结为求解一个应力函数 Φ，它必须满足在区域内的相容方程式（2.11），在边界上的应力边界条件式（2.4）（假定全部为应力边界条件）；在多连体中，还须满足位移单值条件。

2.1.6　平面问题中一点的应力状态

应力是与作用面有关的。σ_x、σ_y 和 τ_{xy} 作为基本未知量，仅表示一点的 xy 坐标面上的应力分量。对于过此点的任一斜截面上的全应力 p 可以分解为沿坐标向的分量