

数学分支的思想方法丛书

明清河 主编

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

高等代数 的 思想与方法

◎ 刘振宇 著

山东大学出版社

数学分支的思想方法丛书

明清河 主编

高等代数的思想与方法

刘振宇 著

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等代数的思想与方法/刘振宇著. —济南:
山东大学出版社, 2009. 11
(数学分支的思想方法丛书/明清河主编)
ISBN 978-7-5607-3996-0

I. 高…

II. 刘…

III. 高等代数—思想方法

IV. 015

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 201399 号

山东大学出版社出版发行

(山东省济南市山大南路 27 号 邮政编码:250100)

山东省新华书店经销

济南景升印业有限公司印刷

850×1168 毫米 1/32 10.125 印张 252 千字

2009 年 11 月第 1 版 2009 年 11 月第 1 次印刷

定价:20.00 元

版权所有,盗印必究

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社营销部负责调换

《数学分支的思想方法丛书》

编委会

顾问	王梓坤	牛家骥		
主编	明清河			
成员	王 兵	杨艳萍	刘振宇	王开民
	秦孝艳	孙肖丽	吕长青	刘广德
	王 频	王雪梅	孙 敏	

总 序

数学科学是在历史上逐渐形成和发展起来的一种知识系统。这个知识系统是由一个个分支组成的,同时各个分支间又相互联系、相互交叉、相互作用,从而产生新的分支,促进数学的发展与壮大。

数学的每一个分支,在确立之前都有一个萌发、孕育的过程,总结和分析它们的系统发育过程、了解其思想方法的演变规律,对了解数学的发现与创新,有着重要的引导作用。当一个数学分支形成独立的体系后,其内容体系中又包含着该分支所特有的核心思想与常用方法。任何一个数学分支都是由具体的数学知识和蕴含的思想方法构筑起来的,数学知识是它的“躯体”,思想方法则是它的“灵魂”。思想方法寓于数学知识之中,是获取知识和发展思维的动力工具。

如果将数学的教与学仅仅看成是数学知识的传授与学习,将难以发挥数学的真正作用,只有领会和掌握数学的思想方法和精神实质,才能真正发挥数学在现实社会中的积极作用,充分显示数学的无穷威力与魅力,这应该是数学教育所努力追求的目标。

数学方法论是研究数学的发展规律、数学的思想方法以及数学中的发现、发明与创新法则的一门学问。对数学分支思想方法的研究,是数学方法论研究的一个新领域和具体方向。

关于数学分支思想方法的研究,既可以对数学分支的发现、发

展、创立过程中新观念、新思想、新方法、新见解及其演变规律进行研究,又可以对数学分支内容体系中蕴含的数学思想和方法进行研究。其主要研究内容主要包括:数学分支的起源与发展,数学分支的本质和特征,数学分支与现实世界的关系,数学分支的文化地位,数学分支的认识论与方法论价值,数学分支内部间的辩证关系与美学研究,数学分支形成过程与内容体系中的核心思想,数学分支各特定内容中的数学思想与常用方法等。其主要研究方式主要有:将数学哲学、数学史、数学教育相结合,将数学思想、数学知识、数学方法相结合。

《数学分支的思想方法丛书》是作者在数学方法论指导下,结合数学教学和科学研究的实践,经过长时间探讨的辛勤劳动成果,是数学方法论研究的新领域、新成果。本丛书主要从数学史、数学方法、数学哲学、数学教学、数学学习、数学美学等视角,对数学分支的思想方法进行研究,将数学分支的本质、内容、思想、方法以及发展历史有机地融会在一起。其显著特点是系统性、深刻性与思辨性,同时集知识性、思想性、故事性、史料性于一体。本丛书是提高科学文化素质和增长知识的理想读本,可作为大学数学专业的教材,亦可作为数学史研究的参考书目。同时,对从事数学史、数学哲学、数学方法论的研究人员也有很好的参考价值。

希望本丛书的出版能对数学方法论研究领域的扩展和应用起到应用的推动作用。

王梓坤

(中国科学院院士、原北京师范大学校长)

作者的话

数学思想方法是数学的灵魂,纵观数学发展史,我们不难发现,每一项重大成果的取得,往往与思想方法的创新有着密切的关系.数学的思想方法与数学成果一样,对数学的发展是同等重要的,都是数学的宝贵财富.研究数学思想方法对于掌握数学的认识规律,促进数学学科的发展,开展数学教育,培养数学能力,都有积极的作用.

《高等代数》是大学数学专业的一门重要的专业基础课,也是理工科大学各专业的工具课程,是进一步学习后续课程的必备基础,更是进一步研究代数学不可或缺的基础.研究高等代数的思想方法对于掌握代数学的认识和发展规律,培养代数学能力,促进代数学学科发展都将会起到积极推动作用.

在多年讲授《高等代数》课程的过程中,我经常听到学生这样的说法:老师,我一听就会,但到了自己做题目就不知怎么处理了,特别是证明题目.这是初学者的一个普遍现象,也是《高等代数》内容高度抽象性的具体体现.事实上,很多人学习后能动口但不能动手.也就是说内容似乎懂了,甚至达到了“耳熟能详”的地步,但碰到实际问题时仍然“束手无策”.这说明分析问题、解决问题的能力较差,内容的体系感差,不能有机地统一起来,归根结底是缺少思想方法理论的支持所致.

从到大学工作起,就有幸加入了多项国家级和省级数学方法

论领域立项课题的研究,跟随多位专家学习、研究数学方法论,并应用于教学当中,积极积累数学方法论的教学实践经验.近几年结合自己十多年的教学经验,并通过大量资料的查询、专家的咨询、同行的商榷,逐步积累、形成了本书的整体思路与结构框架.

本书通过多角度、深层次、全方位地整理、讨论、研究,挖掘了高等代数中所包含的常用数学思想、数学方法和蕴含的哲学思想和美学思想,系统地整理出《高等代数》课程中各部分内容的典型的、重要的、系统的数学思想方法,并通过经典内容与典型例题等思想方法的载体贯穿全书,来全面展示高等代数中的包含的数学思想方法和哲学、美学思想.全书共分为四个部分:第一部分(第一章)就《高等代数》中典型的重要的数学思想方法进行了探讨和分析,具体思想方法包括符号化的思想方法、矩阵的思想方法、公理化的思想方法、结构的思维方法;第二部分(第二章到第十章)针对《高等代数》中的具体内容(包括多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换、 λ -矩阵、欧氏空间等)中所体现的重要数学思想方法进行了探讨和分析,具体思想方法包括函数和方程的思想方法、分解的思想方法、构造的思想方法、归纳与演绎的思想方法、分析与综合的思想方法、猜想的思想方法、降阶与递推的思想方法、结构的思维方法、转化的思想方法、关系映射反演的思想方法、联想类比的思想方法、分类讨论的思想(也称逻辑划分的思想)方法、连续的思想方法、数形结合的思想方法、同构的思想方法、化归的思想方法、同一的思想方法等;第三部分(第十一章)对《高等代数》中所蕴含的哲学思想进行了挖掘和分析,具体思想方法包括普遍联系的哲学思想、抽象与具体的思想、特殊化与一般化的思想方法、否定与肯定的思想(包括反证与反例的思想方法)、有限与无限的思想、近似与精确的思想、常量与变量的思想、连续与离散的思想等;第四部分(第十二章)对《高等代数》中所体现的美学思想进行了探讨和分析,具体有符号美、抽象美、奇异

美、简洁美、统一美、形式美、对称美、和谐美、实用美。

在本书的写作过程中,著名数学家、中国科学院院士王梓坤先生给予亲切鼓励,枣庄学院明清河教授给予关心、指导和支持,作者才鼓足勇气、坚定信心沥血完成,在此表示衷心感谢.全国优秀教师、享受国务院特殊津贴专家牛家骥教授对本书提出建设性意见,同时给予思想方法论的具体指导,刘永辉教授和巩子坤教授以及数学与信息科学系代数小组提出若干宝贵意见,作者还参阅了许多专家学者的研究成果,在此一并表示感谢.

本书是在思想方法论的观点下,对高等代数作了一些尝试性研究,以期抛砖引玉,本书的出版也鞭策自己继续努力.书中整理和归纳的一些思想方法、理论和典型例题有些是作者在执教过程中积累的经验和体会,有些是得益于代数学专家和学者的部分研究成果,如有不当之处,请告知作者(liuzhenyu@uzz.edu.cn),当十分感激.作者虽然为本书的理想效果作出很大努力,但限于时间仓促和作者的学识水平,本书中难免有诸多片面、不妥和不足之处,甚至可能会出现错误,恳请代数学界的前辈、同行和广大读者批评指正.

刘振宇
2009年9月

目 录

总 序	(1)
作者的话	(1)
 第一章 高等代数中的数学思想方法概述	(1)
§ 1.1 高等代数中的数学思想方法概述	(1)
§ 1.2 高等代数中的符号化思想	(6)
§ 1.3 高等代数体现的矩阵思想方法	(17)
§ 1.4 高等代数体现的公理化思想方法	(32)
§ 1.5 高等代数体现的结构思想方法	(40)
 第二章 多项式中的数学思想方法	(55)
§ 2.1 多项式中的函数和方程的思想	(55)
§ 2.2 多项式中的分解的思想方法	(57)
§ 2.3 多项式理论中构造的思想方法	(60)
§ 2.4 多项式理论中归纳与演绎的思想方法	(63)
§ 2.5 多项式理论中分析与综合的思想方法	(68)
 第三章 行列式中的数学思想方法	(72)
§ 3.1 行列式中函数和方程的思想方法	(72)
§ 3.2 行列式中的分解的思想方法	(76)

§ 3.3	行列式中的构造的思想方法	(79)
§ 3.4	行列式中的归纳与演绎的思想方法	(82)
§ 3.5	行列式中的分析与综合的思想方法	(86)
§ 3.6	行列式中的猜想的思想方法	(89)
§ 3.7	行列式中的降阶与递推的思想方法	(93)
第四章	线性方程组中的数学思想方法	(103)
§ 4.1	线性方程组中的结构的思想	(103)
§ 4.2	线性方程组中的转化的思想方法	(112)
§ 4.3	线性方程组中的关系、映射、反演的思想方法	(114)
§ 4.4	线性方程组中的构造的思想方法	(118)
§ 4.5	线性方程组中的联想与类比的思想方法	(121)
§ 4.6	线性方程组中的分析与综合的思想方法	(123)
第五章	矩阵中的数学思想方法	(127)
§ 5.1	矩阵中的分类讨论的思想方法	(127)
§ 5.2	矩阵中的连续的思想方法	(129)
§ 5.3	矩阵中分解的思想方法	(132)
§ 5.4	矩阵中的构造的思想方法	(147)
§ 5.5	矩阵中的归纳与演绎的思想方法	(149)
§ 5.6	矩阵中的分析与综合的思想方法	(151)
第六章	二次型中的数学思想方法	(153)
§ 6.1	二次型中的数形结合的思想方法	(153)
§ 6.2	二次型中的转化的思想方法	(155)
§ 6.3	二次型中的分解的思想方法	(159)
§ 6.4	二次型中的分类讨论的思想方法	(162)
§ 6.5	二次型中的关系、映射、反演的方法	(164)

§ 6.6	二次型中的构造的思想方法	(166)
§ 6.7	二次型中的联想与类比的思想方法	(169)
§ 6.8	二次型中的归纳与演绎的思想方法	(171)
§ 6.9	二次型中的分析与综合的思想方法	(175)
第七章	线性空间中的数学思想方法	(179)
§ 7.1	线性空间中的同构的思想方法	(179)
§ 7.2	线性空间中的转化的思想方法	(185)
§ 7.3	线性空间中的分解的思想方法	(187)
§ 7.4	线性空间中的关系、映射、反演的思想方法	(188)
§ 7.5	线性空间中的构造的思想方法	(190)
§ 7.6	线性空间中的归纳与演绎的思想方法	(194)
§ 7.7	线性空间中的分析与综合的思想方法	(196)
第八章	线性变换中的数学思想方法	(198)
§ 8.1	线性变换中的函数和方程的思想方法	(198)
§ 8.2	线性变换中的转化的思想方法	(201)
§ 8.3	线性变换中的分解的思想方法	(203)
§ 8.4	线性变换中的分类讨论的思想方法	(205)
§ 8.5	线性变换中的关系、映射、反演的思想方法	(206)
§ 8.6	线性变换中的构造的思想方法	(208)
§ 8.7	线性变换中的联想与类比的思想方法	(210)
§ 8.8	线性变换中的归纳与演绎的思想方法	(211)
§ 8.9	线性变换中的分析与综合的思想方法	(215)
第九章	λ-矩阵中的数学思想方法	(219)
§ 9.1	λ -矩阵中的联想与类比的思想方法	(219)
§ 9.2	矩阵中的转化的思想方法	(221)

§ 9.3	λ -矩阵中的关系、映射、反演的思想方法	(224)
§ 9.4	矩阵中的构造的思想方法	(228)
第十章	欧氏空间中的数学思想方法	(230)
§ 10.1	欧氏空间中的函数和方程的思想	(230)
§ 10.2	欧氏空间中的构造的思想方法	(232)
§ 10.3	欧氏空间中的联想与类比的思想方法	(233)
§ 10.4	欧氏空间中的分析与综合的思想方法	(235)
§ 10.5	欧氏空间中的分类讨论的思想方法	(236)
§ 10.6	欧氏空间中的关系、映射、反演的思想方法	(238)
第十一章	高等代数蕴含的哲学思想	(240)
§ 11.1	普遍联系的思想	(241)
§ 11.2	抽象与具体的思想	(246)
§ 11.3	特殊化与一般化的思想方法	(247)
§ 11.4	否定与肯定的思想	(264)
§ 11.5	有限与无限的思想	(280)
§ 11.6	近似与精确的思想	(282)
第十二章	高等代数体现的美学思想	(285)
§ 12.1	数学美	(285)
§ 12.2	高等代数中的数学美	(293)

第一章 高等代数中的 数学思想方法概述

代数是搞清楚世界上数量关系的智力工具.

——英国数学家 Alfred North Whitehead(1861~1947)

高等代数是数学专业的专业基础课程,是后续课程学习的必备基础.高等代数主要研究对象是多项式、矩阵、二次型、线性变换、双线性函数等线性结构(即线性空间)的线性性质,主要内容包括多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换、欧几里得空间和双线性函数.主要研究方法有公理化、结构、同构、类比、猜想等思想方法.

本章概括介绍高等代数中的几种核心的数学思想方法,包括符号化的思想方法、矩阵的思想方法、公理化的思想方法和结构的思想方法.

§ 1.1 高等代数中的数学思想方法概述

1.1.1 数学思想方法概述

在某种意义上讲,客观存在的一切事物都是质和量的统一体,事物的质和量每时每刻都在发生着变化,事物的质变和量变是密切联系、相互影响的.现实世界中,对事物的研究一般离不开量的

考察和分析.从某种意义上讲,数学是研究事物的量、量的关系和量的变化的科学.为了更准确地把握事物的质,更精确地研究事物的量,有必要研究数学科学,要研究数学,概括、凝结和总结数学的思想和数学的方法是很有必要的.

一般来讲,数学思想是指人们对数学内容的本质认识,对数学事实、概念和理论体系的本质认识,是数学认知的高度概括和科学的抽象,属于对数学规律的理性认识的范畴,数学思想是数学科学的核心与灵魂.

在数学研究和教学中,不仅要注重数学知识的学习、探索、研究、传承和发展,更重要的是要注重揭示数学知识发生、发展过程和解决问题过程中蕴含的思想方法,也就是数学思想方法.

数学思想方法在人的能力培养和素质提高等方面具有重要作用.通常所讲的数学思想的内容很多,范围也很广,常用的基本数学思想有符号化的思想、结构的思维、矩阵的思维、函数和方程的思维、逻辑划分的思维(亦称“分类讨论思维”)、数形结合的思维、分解的思维、公理化的思维、转化的思维.

一般来讲,数学方法就是根据研究对象的特点,借助于数学所提供的概念、理论、形式、方法和技巧,对研究对象进行的分析、描述、推导和计算,从而达到揭示事物本质和发展变化规律的一种研究方法.

数学方法是数学思想在具体数学认识过程中的具体反映和体现,是探索、提出、研究和解决数学问题、实践数学思想过程中的所用的手段和工具,数学方法是数学思想的主体与灵魂.常见的解决数学问题的基本数学思想方法有:

数学思维方法,是数学中思考问题的基本方法,常用的数学思维方法有分析的方法、综合的方法、抽象的方法、概括的方法、观察的方法、试验的方法、联想类比的方法、猜想的方法、归纳的方法、演绎的方法、化归的方法、一般化与特殊化的方法……

数学解题方法,是数学中解决问题的具体方法,常用的数学解题方法有配方法、换元法、消元法、代入法、待定系数法、参数法、构造的方法、拆分的方法……

数学证明方法,是数学理论中的逻辑推理的方法,常用的数学证明方法包括演绎的方法、归纳法(完全归纳法)的方法、直接证明的方法、间接证明的方法、反证的方法、同一的方法、综合的方法、分析的方法、数学归纳法(第一数学归纳法、第二数学归纳法原理、反向归纳法、多重归纳法、无穷递降法等)、轮换证法、循环证明、抽屉原理……

数学思想和数学方法是科学研究中重要的认识手段和辅助工具. 马克思认为:一门科学,只有当它成功地运用数学时,才能达到真正完善的地步.

数学作为科学研究的工具,数学思想方法具有以下特点:

(1)高度的概括性. 弗里德里希·恩格斯给数学的定义是:“数学是关于客观世界数量关系和空间形式的科学.”从某种意义上讲,数学是所有涉及数量关系和空间形式的科学研究的高度概括,都蕴含着的丰富的数学内容、思想和方法.

(2)具体的抽象性. 数学是研究客观世界数量关系和空间形式的工具性科学,如果撇开具体事物和具体科学的内容实质,从纯粹形态上研究数和形的关系,那么数学的研究对象和内容就变成了一种脱离客观实在的抽象的符号系统.

(3)严密的精确性. 客观世界具有逻辑上的必然性和量的确定性,这就决定了数学中严谨的概念体系、严格的逻辑推理、严密的理论推导、精准的结论和计算的结果都具有精确性.

(4)广泛的普适性. 数学通过对研究对象的高度抽象,建立起脱离具体内容实质和普遍意义的数量形式关系. 这种具有普遍意义的形式关系不但具有内容抽象的广泛性,而且也具有应用的广泛性.

数学思想方法在当今社会的科学研究和社会研究中起着重要的推动作用,主要表现在:

(1)数学思想方法为科学研究提供了一种简明精确的形式化语言和辩证思维的表现形式.数学不仅是一种形式化的语言,而且也是逻辑和辩证思维的语言.如果舍弃精确的数学语言而用自然语言,科学将会像离开拐杖的老人,难以进行深入研究和健康地向前发展.

(2)数学思想方法为科学研究提供了定量分析和理论计算的方法.数学思想方法的运用往往是把一门科学从“文字化描述性”科学发展成为“数字化精确性”科学,它起到杠杆和桥梁的作用.现代科学技术越来越离不开数学的分析、推导和计算.

(3)数学思想方法为科学研究提供了逻辑推理和科学抽象的工具.自然科学中有很多重要的科学结论,就是经数学的抽象和理论推导完成的.难以想象离开科学抽象的现代数学工具和方法,科学将会怎样,世界将会怎样.

1.1.2 高等代数中的数学思想方法概述

高等代数是数学类专业的一门必修的专业基础课程,也是后续课程学习的必备基础.高等代数主要研究对象是多项式、矩阵、二次型、线性变换、双线性函数等线性结构(即线性空间)的线性性质,主要内容包括多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换、欧几里得空间和双线性函数.主要研究方法有公理化、结构、同构、类比、猜想等思想方法.

高等代数中蕴含着丰富的基本数学思想,其内容中体现的基本数学思想主要有:

符号化的思想

结构的思想

函数和方程的思想