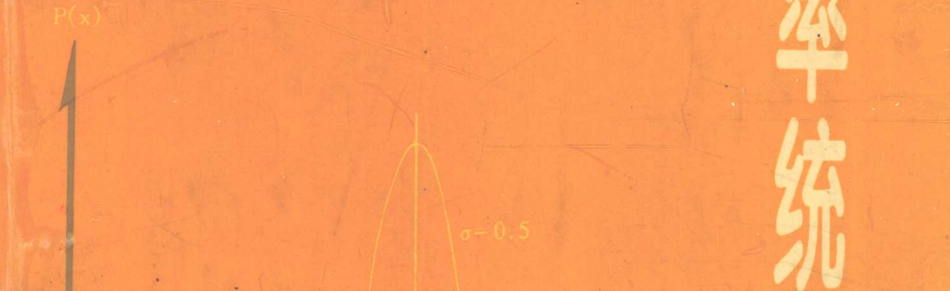
财经类高等数学系列教材 3

王明惠 主编

概率统计



中国金融出版社

财经类高等数学系列教材

主　编　郭青峰

副主编　李庆高　王明惠

　　　　杨冬莲　熊福生

（第四分册）

概率统计

本册主编　王明惠

中国金融出版社

责任编辑：邓瑞锁
封面设计：孔维云
责任印制：谷晓虹

图书在版编目(CIP)数据

概率统计/王明惠主编.-北京：中国金融出版社，1996.8
财经类高等数学系列教材
ISBN 7-5049-1670-6
Ⅰ.概…
Ⅱ.王…
Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材
Ⅳ.021
中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 16349 号

出版：
发行：中国金融出版社
社址：北京广安门外小红庙南里 3 号
邮编：100055
经销：新华书店
印刷：北京广益印刷厂
开本：850 毫米×1168 毫米 1/32
印张：11.125
字数：320 千字
版次：1996 年 8 月第 1 版
印次：1996 年 8 月第 1 次印刷
印数：1—6100
定价：16.70 元

编写说明

随着我国经济改革的深入发展和社会主义市场经济体制的建立和完善，经济管理水平日益提高，经济决策的科学化、计量化和经济理论的数学化已成为必然趋势。因此，未来社会对高等财经人才的数学素质和专业水平的要求也会越来越高。为了适应这一发展趋势的需要，我们编写了这套“财经类高等数学系列教材”。

“财经类高等数学系列教材”是根据《高等学校财经类专业核心课程教学大纲》的要求编写的。这套教材吸取了《经济数学基础》教材的优点，并且更加突出了基本概念、基本知识和基本技能训练的要求，进一步体现了高等数学作为一门基础理论课的功能，以加强对学生数学素质的培养；同时，对教材的体系结构也力求更为科学合理；另外，增加了《线性规划》一个分册，以培养学生应用数学方法解决经济问题的能力。

财经类高等数学系列教材包括《微积分》、《线性代数》、《概率统计》和《线性规划》四个分册。全书由湖南财经学院党委书记兼院长郭青峰教授主编，李庆高、王明惠、杨冬莲和熊福生任副主编。

本册《概率统计》力图做到在总结财经类高等数学的教学实践的基础上，体现财经类专业教学改革的需要。近几年来，涌现了一些新型的经济类专业，有些专业对概率论和数理统计提出了更高的要求。但考虑到为适应财经类各个专业的需要，我们更加强调了基本理论和基本方法的掌握。既考虑学科的系统性和科学性，又有教学上的灵活性和适应性。为使读者易于领会它的基本概念，注意说明了各概念的现实背景和实际含义。对于一些较冗长的证明则直接引用结论而略去了证明过程，以便于在有限的授课时数内，不增加证明过程的负担。有些章节加了“*”号，可供教学时灵活掌握。如因授课时数的限制，这些加“*”号的内容可以略去，并不影响下一章节的学习。在内容的选取上，我们力求既适合财经专业的需要，又避免引入过多的经济概念，以减少教与学的困难。每章末都配备了一定数量的习题，以供学生练习。

《概率统计》分册由王明惠（一、二、三章）、李亚琼（四、五、九章）、汪端洋（六、七、八章）编写，由袁桓教授主审。

整套《财经类高等数学系列教材》的出版，得到了中国金融出版社和我院教务处的大力支持，在此一并表示衷心感谢。

由于水平有限，本套教材中难免存在某些不足之处，欢迎读者和同行们批评指正。

《财经类高等数学系列教材》编写组

1996 年 5 月

目　　录

引　言

客观世界中存在着各种各样的现象，概括起来可分为两大类：**确定性现象**和**随机现象**。

确定性现象指的是在一定的条件下必然出现（或必然不出现）某一种结果的现象。例如纯水在一个标准大气压下，当温度升高到100℃时必然沸腾；平面上的一个动点到一定点的距离不变时，该动点运动的轨迹必然是一个圆；将一重物抛出，在地球引力的作用下必然要下落。这些都是确定性现象。

随机现象指的是在一定的条件下，可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，事先不能准确地预言究竟会出现哪一种结果的现象。例如，将一枚硬币向桌面上抛出，结果可能是“正面”向上，也可能是“反面”向上，事先无法预言究竟是哪一面向上；某人向某一目标射击时，炮弹可能落在目标附近的任一点处，但事先无法准确地预言究竟会落在哪一点；从一批同型号的产品中任取一件进行检验，结果可能是正品，也可能是次品，还可能是废品，事先无法预言究竟会取到哪一种等级的产品。这些都是随机现象的典型例子。这些现象有一个共同的特点是：即使是在完全相同（假设可以做到）的条件下重复进行观察，每一次出现的结果也会不尽相同，事先无法准确地预言究竟会出现哪一种结果。这种特点称为**随机性**。

产生这种随机性的原因是复杂的，因为任何一种现象都不是孤立的，它总是受着各种各样因素的影响。这些因素有些是主要的，有些是次要的，有些甚至是微不足道的；有些是可以控制的，而有些则是无法控制的、是随机的。而人们对某一现象进行观察或实验时，往往只对一些主要的、可以控制的因素加以控制，对某些随机因素却无法控制，而这些随机因素时隐时现，时强时弱，从而造成结果的不确定性。例如在向某一目标射击时，尽管射手认真地进行瞄准，然而射手的技术、炮弹的质量、射击时的气温、风力、风向，甚至射手当时的情绪的微小变化等

等都将影响射击的效果，造成结果的不确定性，从而事先无法预言落弹点的准确位置。可见随机现象是客观存在的，并且与我们的生产、生活密切相关。随着生产的发展和社会的进步，随机现象已越来越引起人们的关注，希望了解和研究它，并掌握它的规律。

随机现象有没有规律呢？对于一个随机现象，如果只就对它作的某一次观察而言，我们是无法准确地预言究竟会出现哪一种结果，呈现出随机性，似乎没有规律可言。然而人们通过长期的实践和观察，发现随机现象并非毫无规律可言，而是有它内在的客观规律的。例如，有史料记载，法国数学家拉普拉斯曾对新生婴儿的性别作过统计，他根据伦敦、彼得堡、柏林及全法国的统计资料得出几乎完全一致的男婴出生数与全体婴儿出生数的比值为$\frac{22}{43}\approx 51.16\%$，但用巴黎 40 年间(1745 年—1784 年)的资料得出的比值却为$\frac{25}{49}\approx 51.02\%$，经调查，发现巴黎附近某地区有抛弃男婴的习俗，通过修正后仍得出比值为$\frac{22}{43}$。上述事实说明，对于一个随机现象，就某一次观察而言，它的结果具有随机性。但是，若在相同条件下大量地重复进行，它的结果就呈现出某种规律性。这种规律性称为随机现象的**统计规律性**。

恩格斯曾经指出："在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律。"① 概率论与数理统计学正是研究随机现象的统计规律的数学学科。

概率论与数理统计是本教材的两大部分，它们有着密切的联系，但又有各自的独立性。通常认为概率论是数理统计的理论基础，数理统计则是概率论的一种应用。

概率论起源于 17 世纪中叶(或更早一些)，它的产生与航海事业的发展有着密切的联系，然而最早刺激数学家思考的特殊问题是来自于赌博者的请求。法国数学家费尔马和帕斯卡曾在通信中讨论过有关分赌本的问题，但是最早的一篇论文《论赌博中的计算》却是一位年轻的

---

① 《马克斯恩格斯选集》第四卷，第 243 页。

荷兰数学家惠更斯于1655年发表的。以后随着天文、物理、生物等学科发展的需要，促使许多数学家投入了概率论的研究，使它的理论逐步得到充实和完善，不过它的严格的数学基础的建立却是本世纪的事情，前苏联的数学家柯尔莫戈洛夫在他1933年发表的《概率论的基本概念》一书中，系统地表述了概率论公理化系统，第一次把概率论建立在严密的逻辑基础之上，从而使它的发展开始了全新的一页。

数理统计学主要研究如何合理地收集观察数据，并进行整理、分析，进而对有关问题进行推断。"统计"最早是指收集国情资料，从这一意义而言，统计的起源可以追溯到很早的历史年代，如我国3000多年前的周朝就保存有收征钱粮以及人口、征兵等的记录。但是数理统计学的主要发展还是在上世纪后半期和本世纪初，它的内容已远远超出了简单的收集数据的工作。随着工业、农业、科学技术的进步与发展，特别是计算机这一有力工具的出现，不但刺激了数理统计学的发展，而且使它的应用也更为深入与普及。

概率论与数理统计不仅内容丰富，而且应用广泛。它不但在工业、农业、军事、经济等各个部门得到广泛应用，同时它还是信息论、控制论、可靠信理论、人工智能等许多新兴学科的基础。拉普拉斯曾说过："值得注意的是，这门起源于靠碰运气取胜的游戏的科学，竟然成了人类知识最重要的一部分。"① 这正是对概率论与数理统计这门学科的最生动、最恰当的评价。

① 转引自《数学精英》，〔美〕E. T. 贝尔著，徐源译，第82页。

第一章　随机事件与概率

§1.1　随机事件

一、随机试验

为研究随机现象的统计规律，常常需要进行大量的观察或实验. 对随机现象进行的观察或实验，统称为**随机试验**，简称**试验**，用字母 E 表示.

每一个试验都有一定的条件和目的，条件实现一次就是一次试验.

例如，E_1：抛一枚硬币，观察正、反面向上的情况；

E_2：从 0，1，…，9 十个数码中任取一个，观察取到的结果；

E_3：从一批产品中（设其中有正品，也有次品）任取一件，观察取出的是否是正品；

E_4：观察某种布匹的日销售量；

E_5：观察某电话台一分钟内收到的呼叫次数；

E_6：记录某地一昼夜的最高气温和最低气温.

这些都是随机试验的例子，分析这些例子不难发现随机试验具有以下几个特点：

1. 一个试验可以在相同条件下重复进行（**可重复性**）；
2. 每次试验之前，不能准确预言究竟出现哪一种结果（**随机性**）；
3. 每次试验之前可以确定一切可能出现的结果，并且每次试验中有且仅有其中某一个出现（**确定性**）.

以后提到的试验均指随机试验.

二、随机事件

（一）随机事件

在一定的条件下可能出现也可能不出现的结果，称为这一条件下的**随机事件**，简称**事件**. 随机事件常用大写的拉丁字母 A、B、C、…等表

示. 随机试验的每一个可能的结果都是随机事件，因此也常将随机事件称为相应的随机试验中的随机事件.

例如上述试验 E_1 中，"正面向上"就是"投一枚硬币"条件下的随机事件；E_2 中"取到数 0""取到数 1"…"取到数 9""取到偶数""取到大于 6 的数"等等，均为"从 0，1，…，9 中任取一数"这一条件下的随机事件.

（二）基本事件与复合事件

对于一个随机试验来说，有一些事件是最简单、最基本的事件. 例如上述试验 E_2 中，我们用 A_i 表示事件"取到数 i"，$i=0,1,\cdots,9$，用 B 表示事件"取到大于 6 的数"，考察事件 B 与 A_7、A_8、A_9 的关系可知，所谓事件 B 发生了，就是事件 A_7、A_8、A_9 中某一个发生了，反之，只要 A_7、A_8、A_9 中任何一个发生了，也就是事件 B 发生了. 在这种意义下，我们说事件 B 可以分解为三个事件 A_7、A_8、A_9. 而 A_7、A_8、A_9 则不能再这样分解为别的事件了. 我们说 A_7、A_8、A_9 是这试验中最简单的不能再分解的事件. 除此之外，A_0、A_1…、A_6 也有这种特征. 我们把随机试验的最简单的不能再分解的事件称为该试验的**基本事件**. 由若干个基本事件组合而成的事件，称为**复合事件**. 上述 A_0、A_1…、A_9 均为基本事件，B 为复合事件.

（三）必然事件与不可能事件

在一定的条件下，一定出现的结果称为这个条件下的**必然事件**，用字母 Ω 表示. 在一定的条件下，一定不出现的结果称为这个条件下的**不可能事件**，用字母 $\varnothing$ 表示.

如上述试验 E_2 中，"取到的数小于 10"就是一个必然事件，"取到的数为 1.5"则是一个不可能事件.

必然事件和不可能事件都是在试验之前可以准确预言的，不是随机事件. 但为了方便起见，将它们均看作特殊的随机事件.

三、样本空间

在概率论中，将随机事件表示成集合的形式将使问题变得简洁明了. 仍以上述试验 E_2 为例，事件 $A_1=$"取到数 1"，可用集合 $\{1\}$ 表示，即 $A_1=\{1\}$；事件 $B=$"取到的数大于 6"可用集合 $\{7,8,9\}$ 表示，即 $B=\{7,8,9\}$.

一般地，我们将事件 A 定义为某一个集合. 称事件 A 发生，则是指该集合中有且仅有某一个元素出现.

基本事件用只含一个元素的单点集表示，复合事件则用与之有关的基本事件所含的元素构成的集合表示.

对于一个随机试验 E，若要将它的所有的随机事件全部写出来常常是困难和复杂的，然而我们可以事先明确它所有的基本事件. 由试验 E 的所有的基本事件所含的元素构成的集合称为 E 的**样本空间**，记作 Ω. 样本空间的元素称为**样本点**，用 ω 表示. 于是基本事件与复合事件都是样本空间的子集. 由于每一次试验时，必然有 Ω 中的一个元素出现，因此若将样本空间作为一个事件，则是必然事件.

根据随机试验的确定性特点，对于一个试验，我们总是假定它的样本空间是事先给定的.

写出前面所列试验 $E_k(k=1,2,\cdots,6)$ 的样本空间 Ω_k 如下：

$\Omega_1=\{$正面，反面$\}$；

$\Omega_2=\{0,1,2,\cdots,9\}$；

$\Omega_3=\{$正品，次品$\}$；

$\Omega_4=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant M\}$，其中 M 为最大销售量；

$\Omega_5=\{0,1,2,\cdots\}$；

$\Omega_6=\{(x,y)\mid T_0\leqslant x<y\leqslant T_1\}$，其中 x 表示最低气温，y 表示最高气温，$[T_0,T_1]$则表示该地气温的最大变化范围.

值得注意的是，样本空间的确定取决于基本事件，而基本事件的确定又取决于试验的条件和观察目的. 如在试验 E_5 中，将观察目的改为各次电话的通话时间，则样本空间就应为$\{t\mid 0<t<+\infty\}$.

只含有限个或可列个样本点的样本空间称为**离散样本空间**. 对于离散样本空间，它的任何子集都是事件.

四、事件的关系和运算

我们引进了样本空间，并建立了事件和集合间的联系，于是事件的关系和运算完全可以运用集合间的关系和运算来处理. 这里我们先假设 A、B、C、$\cdots$等为同一个试验中的事件.

(一)事件的包含与相等

在一次试验中，如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称**事件 A 包含于事件 B**（或**事件 B 包含事件 A**），记作 $A\subset B$（或 $B\supset A$）.

例如从 0,1,2,…,9 十个数中任取一个，设 A＝“取到数 2”，B＝“取到偶数”，则 $A\subset B$.

如果事件 A、B 满足：$A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称**事件 A 与事件 B 相等**，或称**事件 A 与 B 等价**，记作 $A=B$.

（二）事件的和（并）

事件 A 与事件 B 至少有一个发生（事件 A 发生或事件 B 发生）仍是一个事件，并称此事件为 **A 与 B 的和（并）**，记作 $A\cup B$（或 $A+B$）.

例如产品检验时，质量是否合格取决于产品的重量和高度两个指标，设 A＝“重量不合格”，B＝“高度不合格”，C＝“产品质量不合格”，则有 $C=A\cup B$.

类似地，$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 称为 **n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和**，它表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生；$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示**事件 $A_1,A_2,\cdots$ 中至少有一个发生**.

（三）事件的积（交）

事件 A 与 B 同时发生仍是一个事件，称此事件为**事件 A 与事件 B 的积（交）**，记作 $A\cap B$（或 AB）.

例如，设 A＝“产品重量合格”，B＝“产品高度合格”，C＝“产品合格”，若规定产品的重量与高度都合格，则产品合格，那么就有 $C=A\cap B$.

类似地，$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 称为事件 **$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积**，它表示**事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生**；$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示**事件 $A_1,A_2,\cdots$ 同时发生**.

（四）事件的差

事件 A 发生但事件 B 不发生仍是一个事件，称此事件为**事件 A 与 B 的差**，记作 $A-B$.

例如在从 0,1,2,…,9 中任取一数的试验中，若设 A＝“取到的数为偶数”，B＝“取到的数小于 5”，C＝“取到数 6 或 8”，则 $C=A-B$.

（五）互不相容（互斥）事件

若事件 A 与 B 不能同时发生，则称**事件 A 与 B 互不相容**（或互斥），记作 $\boldsymbol{A \cap B = \varnothing}$.

例如在上述取数试验中，若设 $A=$“取到数 2”，$B=$“取到奇数”，则事件 A 与 B 互不相容，即 $A \cap B=\varnothing$.

（六）对立（逆）事件

若事件 B 等于 Ω 与事件 A 的差 $\Omega-A$，则称事件 B 为**事件 A 的对立（或逆）事件**，记作 $\boldsymbol{\overline{A}=B}$. 显然这里 A、B 满足关系：$\boldsymbol{A \cup B=\Omega}$，**且** $\boldsymbol{A \cap B=\varnothing}$，即就每次试验而言，$A$ 与 B 至少有一个发生且仅有一个发生. 如果 B 为 A 的对立事件，则 A 也是 B 的对立事件，故也称 A 与 B **互为对立（或互逆）事件**.

仍以上述取数试验为例，若设 $A=$“取到偶数”，$B=$“取到奇数”，则 A 与 B 互为对立事件.

显然，如果 A 与 B 互为对立事件，则 A 与 B 一定互不相容，反之，如果 A 与 B 互不相容，则 A 与 B 不一定是对立事件.

关于对立事件，有下列关系成立：

$\overline{(\overline{A})}=A$；

$A\overline{A}=\varnothing$，$A \cup \overline{A}=\Omega$；

$A\overline{B}=A-B=A-AB$；

若 $A \subset B$，则 $\overline{A} \supset \overline{B}$；

$\overline{\varnothing}=\Omega$，$\overline{\Omega}=\varnothing$.

（七）完备事件组

若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足：$A_iA_j=\varnothing$，$(i \neq j, i, j=1,2,\cdots,n)$，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i=\Omega$，即在每次试验中，事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中有且仅有一个发生，**则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成一个完备事件组**. 类似地，对于可列个事件 A_1，$A_2, \cdots, A_n, \cdots$，如果满足 $A_iA_j=\varnothing\,(i \neq j, i, j=1,2,\cdots)$，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i=\Omega$，则称 **$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 构成一个完备事件组**. 特别地，若 A 与 B 为对立事件，则 A、B 也构成一个完备事件组.

事件间的各种关系和运算，可用文氏图表示如下（图 1-1）：

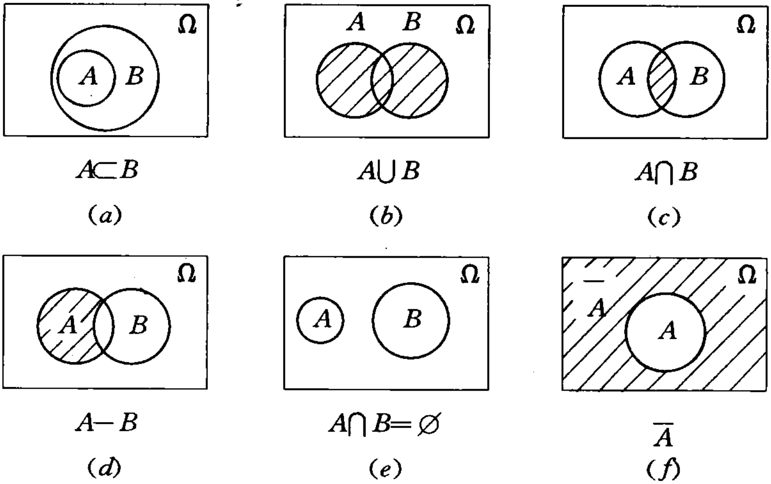


图1-1

五、事件的运算性质

随机事件的运算满足以下基本性质：

(一)交换律

$$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A;$$

(二)结合律

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,$$
$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C;$$

(三)分配律

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),$$
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C);$$

(四)德·摩根律

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B};$$

分配律和德·摩根律均可推广到有限个或可列无穷多个事件的情形.如

$$(\bigcup_i A_i)\cap B=\bigcup_i A_iB;$$
$$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A_i}, \overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A_i}.$$