普通高等教育“十一五”规划教材

21世纪经管类创新教材

微积分教程

下册

陶前功　熊章绪　主编

科学出版社

www.sciencep.com

普通高等教育"十一五"规划教材
21世纪经管类创新教材

微积分教程

(下册)

陶前功　熊章绪　主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是依据教育部制定的《经济管理类数学课程教学基本要求》编写而成，例题全面，习题丰富，且分级安排，便于分级教学．全书分上、下两册，共12章，上册为1～6章，内容包括函数、极限与连续、一元微积分的概念、一元函数微分法、一元函数积分法、一元微积分的应用；下册为7～12章，内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微积分学、无穷级数、微分方程、差分方程、应用数学模型．

本书可作为高等学校经管类本科生教材使用，也可作为相关人员参考用书．

图书在版编目(CIP)数据

微积分教程．下册/陶前功，熊章绪主编．—北京：科学出版社，2009
普通高等教育"十一五"规划教材．21世纪经管类创新教材
ISBN 978-7-03-025356-9

Ⅰ．微…　Ⅱ．①陶…②熊…　Ⅲ．微积分—高等学校—教材　Ⅳ．O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第150108号

责任编辑：吉正霞／责任校对：董艳辉
责任印制：彭　超／封面设计：苏　波

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

武汉市科利德印务有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2009年8月第　一　版　　开本：B5(720×1 000)
2009年8月第一次印刷　　印张：20 3/4
印数：1—5 000　　字数：407 000

定价：33.80元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前言 FOREWORD

微积分是高等学校经管类学生的必修课,“对它的重要性无论作怎样的估计都不过分”. 但在当前我国高等教育大众化的条件下,微积分教学普遍存在着三个问题：一是相当一部分学生感到微积分太抽象,学起来难度大、困难多;二是微积分与经济学和管理学的衔接上存在问题,如经济学要用到定积分知识,但要到较晚才能讲到,往往影响教学质量;三是学完这门课后,往往只记住一些规则和算法,不会灵活地进行综合应用.

如何解决这些问题? 我们对产生上述问题的原因进行了认真分析,并提出解决问题的三项措施：一是进行分级教学;二是开设必要的习题课,加强辅导;三是编写一套既符合学生实际,又达到教育部有关课程的基本要求,且具有特色的创新教材.

在几年分级教学的实践中,我们在基本保持原内容体系的基础上做了一些改革的尝试,所编的讲义几经修订,形成了现在出版的这套教材. 它包括《微积分教程》(上、下册)、《微积分分级训练教程》.

本书为《微积分教程》下册,是微积分课程的主教材,内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微积分学、无穷级数、微分方程、差分方程、应用数学模型. 它具有如下特点：

(1) 本书是依据教育部制定的《经济管理类数学课程教学基本要求》,且顾及学生考研需要而编写的. 其起点不太高,但总体要

求不低，故其适用面较广.

(2) 尽量保持传统教材的优点，但在引进概念时，尽可能讲清其产生的背景，而对一些冗长烦琐的推理则略去，特别注重数学思想、几何直观、数值方法和逻辑思维等方面的训练.

(3) 例题全面，习题丰富，且分级安排，便于分级教学.

(4) 以译注方式对定理、概念、公式的理解与应用给出了进一步的总结.

(5) 书中专列一章介绍数学模型，将微积分知识与实际问题紧密联系，加强数学建模能力的培养.

(6) 与教材同步配套，简明实用地编写了“大学数学实验指导”，注重培养学生利用计算机求解数学模型的能力.

本书由陶前功、熊章绪任主编，曾艳妮任副主编，谢承义、陈兰、赵琼参编.

由于编者水平有限，书中疏漏及不足之处在所难免，敬请同行、读者不吝指正.

编　者

2009 年 6 月

目录

CONTENTS

第 7 章　向量代数与空间解析几何

7.1　空间直角坐标系

要用代数的方法来研究空间图形，我们可以仿照平面解析几何的方法，通过建立空间直角坐标系来建立空间的点与有序实数组之间的对应关系.

7.1.1　空间直角坐标系

过空间一点 O 作三条两两相互垂直且具有相同单位长度的数轴 Ox，Oy 和 Oz，分别称为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）和 z 轴（竖或立轴）. 各轴的正方向符合右手法则，即当右手的四个手指指向 x 轴正方向，然后弯曲 $\pi/2$ 的角度转向 y 轴正方向时，竖起的大拇指的指向就是 z 轴的正方向. 它们的公共原点 O 称为坐标原点；每两条坐标轴确定一个平面，由 x 轴和 y 轴确定的平面称为 xOy 平面，由 y 轴和 z 轴及 z 轴和 x 轴所确定的平面分别称为 yOz 平面及 zOx 平面，三平面也称坐标平面. 这样就确定了空间直角坐标系，记为 $O\text{-}xyz$，如图 7.1.1 所示.

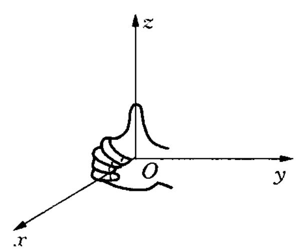


图 7.1.1

建立了空间直角坐标系，空间的点就可以用三个有序实数来表示.

设点 P 为空间的一点，过点 P 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的三个平面，它们与三个坐标轴分别交于 A，B 和 C 三个点. 点 A，B，C 分别称为点 P 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影. 设这三个投影点在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标分别为 x，y 和 z，于是空间一点 P 就唯一确定了一个有序实数组 x，y，z. 这三个有序实数 x，y 和 z 称为点 P 的坐标，记为 $P(x, y, z)$，其中数 x 称为点 P 的横坐标，数 y 称为点 P 的纵坐标，数 z 称为点 P 的竖（或立）坐标.

反过来，若任意给定三个有序数 x，y 和 z，在 x 轴、y 轴和 z 轴上分别取坐标为 x，y 和 z 的三个点 A，B 和 C，再过点 A，B 和 C 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的平面，则这三个平面的交点 P 就是由三个有序实数 x，y 和 z 所唯一确定的点，其坐标为 (x, y, z)（图 7.1.2）.

这样，空间的点就和三元有序实数组 (x, y, z) 之间建立了一一对应的关系.

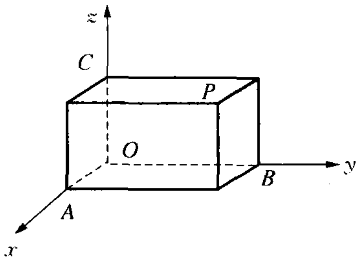


图 7.1.2

显然，原点 O 的坐标为(0, 0, 0)；x 轴、y 轴和 z 轴上点的坐标分别为 $(x, 0, 0)$，$(0, y, 0)$ 和 $(0, 0, z)$；坐标平面 xOy，yOz 和 zOx 上点的坐标分别为 $(x, y, 0)$，$(0, y, z)$，$(x, 0, z)$；点 $P(x, y, z)$ 关于 xOy 平面对称的点的坐标为 $(x, y, -z)$，关于 yOz 平面对称的点的坐标为 $(-x, y, z)$，关于 zOx 平面对称的点的坐标为 $(x, -y, z)$，关于 x 轴、y 轴和 z 轴的对称点分别为 $(x, -y, -z)$，$(-x, y, -z)$ 和 $(-x, -y, z)$，关于原点对称的点的坐标为 $(-x, -y, -z)$.

注 空间中任意一点的坐标都对应着一个三元有序实数组. 例如，图 7.1.2 中的点 A，虽然它在 x 轴上的坐标是 x，但是它在空间直角坐标系下的坐标却是 $(x, 0, 0)$，而不是 x.

如图 7.1.3 所示，三个坐标平面把整个空间分成 8 个部分，每个部分称为一个卦限. 8 个卦限分别用罗马字 I, II, …, VIII 表示. 第一、第二、第三、第四卦限在坐标平面 xOy 之上，其中含有 x 轴、y 轴和 z 轴正半轴的那个卦限称为第一卦限，其他第二、第三、第四卦限的顺序依次按逆时针的方向确定，而第五、第六、第七、第八卦限在坐标平面 xOy 之下，依次排在第一、第二、第三、第四卦限的下面.

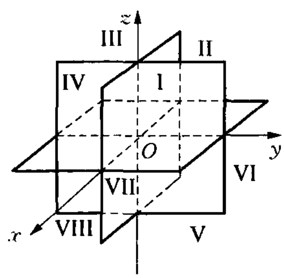


图 7.1.3

由 8 个卦限的分布，我们很容易知道各个卦限内的点(除去坐标平面上的点外)的坐标符号情况：

I(+, +, +)　　II(−, +, +)　　III(−, −, +)　　IV(+, −, +)

V(+, +, −)　　VI(−, +, −)　　VII(−, −, −)　　VIII(+, −, −)

在空间直角坐标系中，$x = x_0$，$y = y_0$，$z = z_0$ 是平行于坐标平面的三组平面：

$x = x_0$ 表示过点 $(x_0, 0, 0)$ 而平行于 yOz 平面的平面；

$y = y_0$ 表示过点 $(0, y_0, 0)$ 而平行于 zOx 平面的平面；

$z = z_0$ 表示过点 $(0, 0, z_0)$ 而平行于 xOy 平面的平面.

7.1.2 空间两点间的距离

设 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 是空间中的两点，求它们之间的距离 $|P_1P_2|$.

如图 7.1.4 所示，过点 P_1 和点 P_2 各作三个平面分别垂直于坐标轴，这 6 个平面构成一个以 P_1P_2 为对角线的长方体.

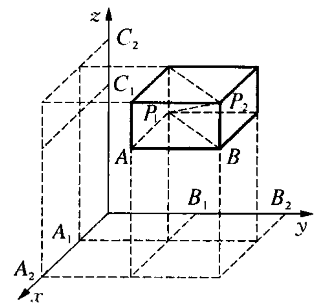


图 7.1.4

因为$\triangle P_1AB$，$\triangle P_1BP_2$ 是直角三角形，根据勾股定理得

$$|P_1P_2|^2=|P_1A|^2+|AB|^2+|BP_2|^2$$

而

$$|P_1A|=|A_1A_2|=|x_2-x_1|$$

$$|AB|=|B_1B_2|=|y_2-y_1|$$

$$|BP_2|=|C_1C_2|=|z_2-z_1|$$

所以，空间两点 P_1，P_2 间的距离为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

称为空间两点间的距离公式.

从这个公式易得空间一点 $P(x, y, z)$和原点 $O(0, 0, 0)$之间的距离为

$$|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

另外，结合我们以前学过的数轴上及平面上两点间的距离公式可以看出距离公式随维数增加所呈现出的规律.

例 7.1.1 已知两点 $A(3, -1, 2)$与 $B(3, 5, -2)$，在 z 轴上求一点 P，使 $|AP|=|BP|$.

解 因为点 P 在 z 轴上，故可设点 P 的坐标为$(0, 0, z)$. 由两点间距离公式得

$$|AP|=\sqrt{(0-3)^2+(0+1)^2+(z-2)^2}=\sqrt{14-4z+z^2}$$

$$|BP|=\sqrt{(0-3)^2+(0-5)^2+(z+2)^2}=\sqrt{38+4z+z^2}$$

由题设 $|AP|=|BP|$ 得

$$\sqrt{14-4z+z^2}=\sqrt{38+4z+z^2}$$

解得 $z=-3$，从而点 P 的坐标为$(0, 0, -3)$.

7.1.3 n 维空间

我们知道，数轴上的点与实数一一对应，实数的全体即表示整条数轴；在平面直角坐标系中，其上的点与二元有序实数对(x, y)一一对应，所以所有实数对(x, y)的全体表示整个二维平面；在空间直角坐标系中，空间中的点与三元有序实数组(x, y, z)一一对应，从而三元有序实数组(x, y, z)的全体构成整个三维空间.

一般地，取定一个自然数 n，用 $R^n=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n)\mid x_i\in\mathbf{R}, i=1, 2, \cdots,$

$n\}$ 表示 n 元有序实数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的全体所构成的集合，则称 R^n 为 n 维(实)空间，而每个 n 元有序实数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$即为 n 维空间 R^n 中的一个点，数 x_i 表示该点的第 i 个坐标，当所有的 $x_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 都为零时，这个点称为 R^n 的坐标原点，记为 O. 类似地，n 维空间中任意两点 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$和 $Q(y_1, y_2, \cdots, y_n)$间的距离规定为

$$|PQ|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}$$

显然，$n=1, 2, 3$ 时，上述规定与数轴上、平面直角坐标系及空间直角坐标系中两点间距离的定义是一致的.

习 题 7.1

(A)

1. 指出下列各点在空间直角坐标系中的位置：

$A(1, -2, 3)$, $B(0, 2, 1)$, $C(-4, -3, 1)$, $D(2, 0, 0)$, $E(0, -1, 0)$, $F(-5, 2, 3)$

2. 求点(a, b, c)关于(1)原点；(2) 各坐标面；(3) 各坐标轴对称的点的坐标.

3. 自点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$分别作各坐标平面和各坐标轴的垂线，写出各垂足的坐标.

4. 求点 $M(4, -3, 5)$到各坐标平面和各坐标轴的距离.

5. 在 x 轴上求一点 P，使它与点 $P_0(4, 1, 2)$的距离为 $\sqrt{30}$.

(B)

1. 过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$分别作平行于 z 轴的直线和平行于 xOy 平面的平面，问它们上面的点的坐标有什么特点.

2. 求点$(1, -3, -2)$关于点$(-1, 2, -1)$对称的点的坐标.

3. 在 yOz 平面上，求与已知点 $A(3, 1, 2)$, $B(4, -2, -2)$和 $C(0, 5, 1)$等距离的点的坐标.

4. 一边长为 a 的立方体放置在 xOy 平面上，其底面的中心在坐标原点，底面的顶点在 x 轴和 y 轴上，求它各顶点的坐标.

5. 证明：以 $A(4, 1, 9)$, $B(10, -1, 6)$, $C(2, 4, 3)$为顶点的三角形是等腰直角三角形.

7.2 向量及其线性运算

7.2.1 向量的概念

在自然科学及工程技术中，有些量如距离、质量、温度、体积等，只有大小没有方向，这样的量称为数量(或标量)；还有些量如力、位移、速度、电场强度等，除了大小还有方向，这种既有大小又有方向的量称为向量(或矢量).

由定义可知，向量的两要素为大小和方向，那么如何将向量的两要素表示出来呢？在几何上，通常用空间中的一条带有方向的线段(即有向线段)来表示向量，有向线段的起点与终点分别称为向量的起点和终点. 如图 7.2.1 所示，将以 A 为起点 B 为终点的向量记为$\overrightarrow{AB}$. 为方便起见，常用黑体的字母 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}$, …来表示向量，手写时可用带箭头的小写字母$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$, …来表示向量. 所以向量$\overrightarrow{AB}$有时也写成 $\boldsymbol{a}$ 或$\vec{a}$.

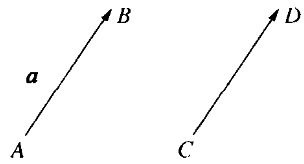


图 7.2.1

在选定单位长度后，有向线段的长度表示向量的大小，称为向量$\overrightarrow{AB}$的长度或模，记为$|\overrightarrow{AB}|$(或$|\boldsymbol{a}|$). 模为零的向量称为零向量，记为 $\mathbf{0}$. 零向量的方向是任意的. 规定 $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$. 模为 1 的向量称为单位向量，常用 $\boldsymbol{a}^0$ 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 具有同一方向的单位向量.

若两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模相等且方向相同，则称这两个向量相等，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 如图 7.2.1 所示，$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$的长度相等且方向相同，因此它们是相等的向量，即$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

由此可见，一个向量在空间平行移动后，仍为相同的向量. 也就是说，两个向量是否相等与它们的起点无关，只由它们的模和方向决定，这样的向量称为自由向量. 除另有说明外，本书研究的向量均为自由向量.

这样我们就可以定义两个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的夹角：将 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 进行平移，使它们共起点，则它们所在的两条射线之间的夹角 $\theta\,(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 称为两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记为$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$. 特别地，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时 $\theta=0$；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时 $\theta=\pi$.

与 $\boldsymbol{a}$ 大小相等而方向相反的向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记为$-\boldsymbol{a}$，显然 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$.

如果两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同或相反，则称这两个向量平行，记为 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$. 零向量的方向是任意的，故可认为零向量平行于任何向量.

若两个非零向量的起点放在同一点时，它们的终点和公共起点在同一直线上，则称这两向量共线. 显然平行向量都是共线的.

类似地，设有 $k\ (k\geqslant 3)$ 个向量，如果将它们的起点放在同一点时，它们的终点和公共起点在同一平面上，就称这 k 个向量共面.

7.2.2 向量的线性运算

1. 向量的加减法

在物理学中，求作用于同一点的两个不共线的力的合力是用“平行四边形法则”. 如图 7.2.2 所示，两个力$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$的合力是以$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$为邻边的平行四边形的对角线$\overrightarrow{AC}$.

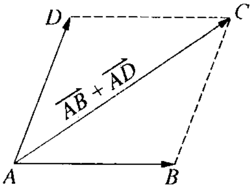


图 7.2.2

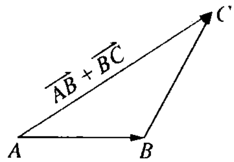


图 7.2.3

又如位移：一质点从点 A 出发到点 B 的位移为$\overrightarrow{AB}$，再从点 B 到点 C 的位移为$\overrightarrow{BC}$，则两次位移$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$的结果，相当于位移$\overrightarrow{AC}$，即两个位移的合位移可用"三角形法则"求出，如图 7.2.3 所示.

由图 7.2.2 及图 7.2.3 可见，求位移用的"三角形法则"与求合力用的"平行四边形法则"虽然形式不同，但实质却是一致的.

从上面位移与力的合成法中，我们抽象出向量加法的定义.

定义 7.2.1 设给定两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点，作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 AC，则向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

上述求两向量和的方法称为向量相加的三角形法则.

向量加法的三角形法则可以推广到有限多个向量相加的情形. 例如，求 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$ 的和，可以根据三角形法则相加如下：如图 7.2.4 所示，将前一向量的终点作为下一向量的起点，依次作 $\overrightarrow{A_0A_1}=\boldsymbol{a}_1$，$\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_2$，$\overrightarrow{A_2A_3}=\boldsymbol{a}_3$，…，$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_n$，则称以第一向量起点 A_0 为起点，最后一向量终点 A_n 为终点的向量 $\overrightarrow{A_0A_n}$为 n 个向量的和，记为

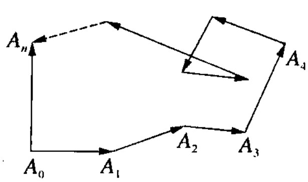


图 7.2.4

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\cdots+\boldsymbol{a}_n=\overrightarrow{A_0A_n}$$

注 当 $n\geqslant 3$ 时，A_0，A_1，A_2，…，A_n 不一定共面. 特别地，当向量 $\boldsymbol{a}_n$ 的终点 A_n 与向量 $\boldsymbol{a}_1$ 的起点 A_0 重合时，$\overrightarrow{A_0A_n}=\boldsymbol{0}$，即

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{0}$$

向量相加的平行四边形法则，读者可以根据图 7.2.2 自己给出定义.

向量的加法满足下列运算规律：

(i) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ (交换律)；

(ii) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ (结合律).

对于(i)，根据向量相加的三角形法则，由图 7.2.2，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$

所以向量的加法满足交换律.

对于(ii)，如图 7.2.5 所示，先作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，再与 $\boldsymbol{c}$ 相加，即得和 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$，若将 $\boldsymbol{a}$

与 $(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ 相加，由图可得同一结果，所以向量的加法满足结合律.

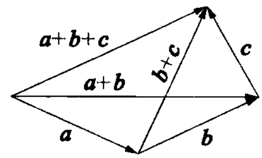


图 7.2.5

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，则 $-\boldsymbol{a}$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 的负向量. 由此我们规定两向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差为

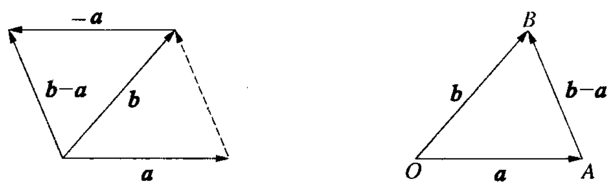
$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$$

即把向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上，便得 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$（图 7.2.6(a)）.

特别地，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时，有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$$

显然，若从点 O 作两向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则由定义可知，以向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 为起点，以 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 为终点的向量 $\overrightarrow{AB}$ 即为 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$（图 7.2.6(b)）.



(a) (b)

图 7.2.6

由三角形两边之和大于第三边的原理，可得

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \qquad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

其中等号当且仅当 $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$ 时成立.

2. 数与向量的乘法

定义 7.2.2 设 λ 为给定实数，则 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积称为向量的数乘，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$. 它是一向量，按下面的规定来确定：它的模为

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|$$

它的方向为当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 同向，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 反向，当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，这时它的方向是任意的.

特别地，当 $\lambda=\pm1$ 时，有

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a} \qquad (-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$$

利用向量的数乘，非零向量 $\boldsymbol{a}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{a}^0$$

并由此得到

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$

即非零向量除以它的模的结果是一个与它同向的单位向量，这一过程又称将向量

单位化.

设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是给定的两个向量,而 λ 与 u 是两个任意常数,则数与向量的乘法满足下列运算规律:

(i) $(\lambda u)\boldsymbol{a} = \lambda(u\boldsymbol{a}) = u(\lambda\boldsymbol{a})$ (结合律);

(ii) $(\lambda + u)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + u\boldsymbol{a}$, $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$ (分配律).

读者可从图 7.2.7 中看出结合律、分配律的几何表示(这里设 $\lambda > 0$, $u > 0$).

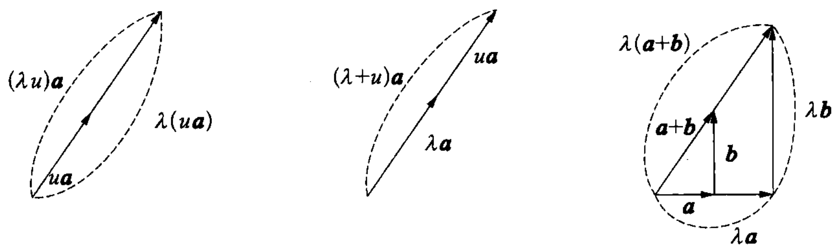


图 7.2.7

向量的加减法及向量的数乘运算统称为向量的线性运算.

例 7.2.1 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{v}=-2\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}-\frac{2}{3}\boldsymbol{c}$. 试用 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 表示 $3\boldsymbol{u}-6\boldsymbol{v}$.

解
$$3\boldsymbol{u}-6\boldsymbol{v} = 3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}) - 6\left(-2\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}-\frac{2}{3}\boldsymbol{c}\right)$$
$$= (3+12)\boldsymbol{a} + \left(3-\frac{3}{2}\right)\boldsymbol{b} + (-9+4)\boldsymbol{c} = 15\boldsymbol{a} + \frac{3}{2}\boldsymbol{b} - 5\boldsymbol{c}$$

例 7.2.2 在平行四边形 $ABCD$ 中,设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 试用 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$. 如图 7.2.8 所示,M 是平行四边形对角线的交点.

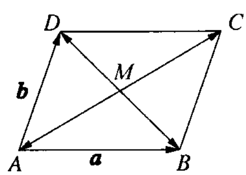


图 7.2.8

解 因为平行四边形对角线相互平分,所以
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$$
即
$$2\overrightarrow{MA} = -(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$
从而
$$\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$
又因为
$$\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

同理,可得
$$\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \qquad \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$$

由数与向量相乘的定义可知,$\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 平行,因此我们常用数与向量的乘积来说明两向量的平行关系.

定理 7.2.1 设向量 $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$，则向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ 使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证 条件的充分性是显然的. 下面证明必要性.

设 $\boldsymbol{b}\,/\!/\,\boldsymbol{a}$，取 $|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时 λ 取正，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时 λ 取负，即有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 这是因为此时 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向，且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$$

此时 λ 是唯一的，若不然，则存在实数 u，使 $\boldsymbol{b}=u\boldsymbol{a}$. 于是两式相减得

$$(\lambda-u)\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$$

即

$$|\lambda-u||\boldsymbol{a}|=0$$

而 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，故 $|\lambda-u|=0$，即 $\lambda=u$.

注 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行也是共线的，所以定理 7.2.1 也可作为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件.

3. 向量的坐标表示

为了沟通数与形之间的联系，我们将向量放到空间直角坐标系 $Oxyz$ 中加以考虑.

建立空间直角坐标系 $Oxyz$，设 $\boldsymbol{a}$ 为空间中的一向量，平移 $\boldsymbol{a}$ 使其起点在原点 O，若其终点 A 的坐标为 (x, y, z)，则向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$ 就唯一对应有序数组 (x, y, z)；反之，对于给定的一个有序数组 (x, y, z)，在空间能唯一确定一点 $A(x, y, z)$，从而确定一个向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$. 即向量与有序数组 (x, y, z) 之间建立了一一对应关系. 我们称这个数组 (x, y, z) 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，记为 $\boldsymbol{a}=\{x, y, z\}$. 其中 x，y，z 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的分量.

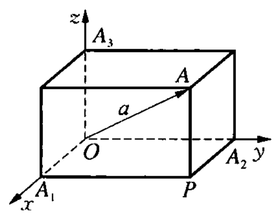


图 7.2.9

沿 x 轴、y 轴和 z 轴正向的三个单位向量称为空间直角坐标系的基本单位向量，分别记为 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$. 如图 7.2.9 所示，过 $\boldsymbol{a}$ 向量的终点 A 作垂直于三坐标轴的平面，与横、纵、竖轴分别交于 $A_1(x, 0, 0)$，$A_2(0, y, 0)$，$A_3(0, 0, z)$，则向量 $\overrightarrow{OA_1}$，$\overrightarrow{OA_2}$，$\overrightarrow{OA_3}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 在坐标轴上的分向量. 由向量的加法可知

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1P}+\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}$$

由于 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 是分别沿 x 轴、y 轴和 z 轴正向的单位向量，由数乘向量定义可得

$$\overrightarrow{OA_1}=x\boldsymbol{i} \qquad \overrightarrow{OA_2}=y\boldsymbol{j} \qquad \overrightarrow{OA_3}=z\boldsymbol{k}$$

于是

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

称为 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式. 显然

$$\boldsymbol{i}=\{1, 0, 0\} \qquad \boldsymbol{j}=\{0, 1, 0\} \qquad \boldsymbol{k}=\{0, 0, 1\}$$