“向前看”高考复习特版丛书

中国名牌大学

ZIZHUZHAOSHENG

自主招生

试题解析·数学

主　编　章　回

本册主编　张志朝

网络合作伙伴：中国教育在线高考频道（自主招生专栏）

http://gaokao.eol.cn/zizhu

教育科学出版社

Educational Science Publishing House

“向前看”高考复习特版丛书

中国名牌大学自主招生试题解析

数学

主　　编　章　回
本册主编　张志朝
编写人员　张志朝　徐　伟　许云峰
　　　　　孙东升　袁如标

请有社签发出了意见
2009.5.31.

教育科学出版社

责任编辑　韩敬波　曾　凯
责任印刷　曲凤玲

图书在版编目(CIP)数据

中国名牌大学自主招生试题解析. 数学/章回主编. 北京：教育科学出版社，2009.5
("向前看"高考复习特版丛书)
ISBN 978-7-5041-4700-4

Ⅰ. 中…　Ⅱ. 章…　Ⅲ. 数学课—高中—解题—升学参考资料　Ⅳ. G632.479

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第080222号

出版发行　教育科学出版社

社　址	北京·朝阳区安慧北里安园甲9号	市场部电话	010-64989009
邮　编	100101	编辑部电话	010-64989374
传　真	010-64891796	网　址	http://www.esph.com.cn

经　销	各地新华书店		
印　刷	盐城印刷总厂有限责任公司		
开　本	787毫米×1092毫米　1/16	版　次	2009年5月第1版
印　张	10	印　次	2009年5月第1次印刷
字　数	150千	定　价	20.00元

编写说明

一、缘起

自主招生是扩大高校自主权、深化高校招生录取制度改革的重要举措，也是选拔培养优秀创新人才、促进素质教育全面开展的有益探索. 2003年，教育部批准在清华大学、北京大学等22所高校中进行自主选拔录取改革试点. 2006年开始，上海交通大学、复旦大学自主选拔录取办法又有新突破，即部分有资格的上海考生只要通过高校组织的"申请资格测试"，就可以不用参加全国高考统考，面试决定录取结果. 到2009年，全国获批参与自主招生的高校已达76所，许多高校在录取比例上也取消了"控制在年度本科招生计划总数5%以内"的限制……越来越多的重点中学、考生和家长开始关注自主招生. 但就对自主招生的认识而言，包括自主招生的相关政策、各高校自主招生的实施办法、笔试面试的考查内容和考查形式等，还没有像高考那样被广泛了解. 不少中学在组织学生参加自主招生时由于缺乏系统了解，往往感觉无从下手；很多考生在准备自主招生复习时，常常无暇兼顾高考复习，很有可能顾此失彼，甚至高考"砸锅".

针对上述状况，我们联合中国教育在线，及时了解自主招生资讯，积极搜集高校自主招生试题，并约请了部分高校和知名中学名特优教师，认真研究相关政策，深入分析各类试题，并着力打通自主招生试题和一般高考试题的各个环节，耗时三年，策划编写了这套"向前看"高考复习特版丛书.

二、丛书名介绍

相对于高考选拔录取而言，高校自主招生是一个新生事物，它是新世纪我国教育改革发展的一个构成部分. 在关注一般高考的同时，了解并着力研究高校自主招生的相关内容无疑是具有前瞻性意义的. 具体表述如下：

第一，目前，已经开始自主招生的高校都是在国内排名靠前、学科设置齐全、综合实力拔尖的学校，参与这些学校的自主招生考试既能促进学生特长的发展和综合能力的培养，又能减轻学生参加高考和走进名校的压力.

第二，高校自主招生考试时间在每年高考之前，高校自主招生试题与普通高考试题有相通之处；了解高校自主招生、掌握各高校自主招生试题考查内容和考查形式，能有效地让学生明确普通高考的考查要求，一举两得.

第三，从各高校自主招生选拔考生的标准看，自主招生注重选拔综合素质高和有专项特长的学生，这一标准在一定程度上揭示了高校在人才培养方面的基本要求和目标，积极了解和参与自主招生对考生在大学的进一步深造和将来就业都是一个很好的铺垫和准备.

三、内容构成

丛书以中学课程设置的语文、数学、英语三个学科安排分册，每册均以高考复习的知识专题进行分类，每个专题包含“专题引导”、“真题解析”、“巩固练习”和“提升训练”四部分内容，“专题引导”侧重整体把握，概述高校自主招生试题(笔试)对本专题内容的考查情况和涉及此专题内容的常用解题思路等.“真题解析”筛选近年来名牌高校自主招生笔试真题进行点拨和评注，用实例的方式让考生掌握解题技巧，同时精选3道左右近三年的高考真题，供考生对两种考试形式进行比较学习.“巩固练习”和“提升训练”则选取少量高校自主招生的真题或模拟题，让考生进一步巩固提升.不同学科在栏目名称和题目编排方式上稍有差别.

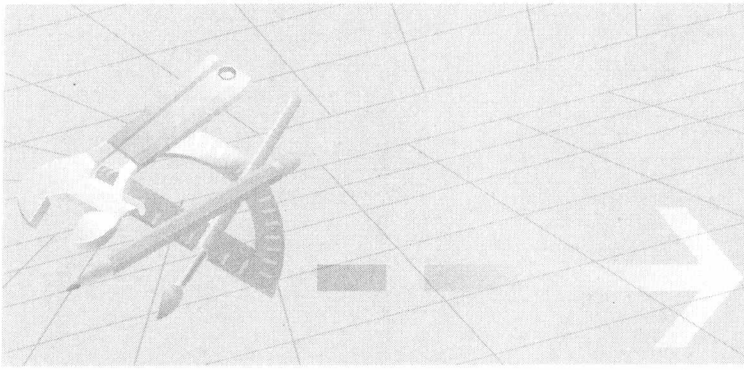
面试作为自主选拔过程中的一个重要环节，各个高校的不同考查内容和各异的考查形式常常会让考生不知所措.为此，我们把搜集到的面试题目根据内容精心分为11个类别，每个类别选取15道左右的题目进行研究，每个题目分别从“思路点拨”、“考查要点”和“应试提醒”三个方面进行解析，分别编排在“语文”和“英语”分册中，“语文”6类，“英语”5类.

此外，“语文”中还编排了部分政治、历史、地理真题，“数学”中编排了部分物理、化学、生物和计算机真题，以附录的形式编排.自主招生相关政策和部分高校自主选拔录取实施办法也以附录的形式编排.这样，丛书内容便基本囊括了自主招生备考的各个环节，方便学校和考生使用.

在丛书的策划编写过程中，我们通过多种渠道搜集高校近年的自主招生试题，对搜集到的试题也进行了较为细致的加工整理.当然由于编者水平有限，题目的表述和解析的文字内容仍或存在不足之处，专家和读者若有发现，还望不吝指教.另由于图书版面所限，编者搜集的试题未能尽数编入书中，有需要的读者和考生可以通过书后的联系方式与我们联系索要.

编者

2009.4



目录
Contents

专题一 集合与函数

专题引导

在自主招生考试中，对集合与函数的考查主要是以下两个方面：一是考查学生对集合知识与数学其他知识的综合应用水平；二是考查学生对函数知识掌握水平与利用函数、方程、不等式的相互关系，对具体问题进行分析，最终解决问题的水平.

由于集合与函数是高等函数的重要基础，更是高中数学的重要内容，所以近几年来的高考与自主招生考试，在选择、填空、解答三种题型中，每年都有集合与函数的问题，并且占有较大的比例.

学习要领

1. 由于函数的观点和方法贯穿高中数学的全过程，所以对函数内容的深刻理解与灵活运用对学习高中数学的其他内容至关重要.

2. 由于集合与函数是自主招生考试的重点，复习时建议把此讲内容分成集合，函数的概念、性质、图象，函数的应用三个部分进行系统的归纳，搞清重点、难点、易错点，及时总结规律和方法，以达到事半功倍的效果.

相关法则提点

集合的运算法则

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$$
$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$$
$$\complement_u(A\cup B)=(\complement_u A)\cap(\complement_u B)$$
$$\complement_u(A\cap B)=(\complement_u A)\cup(\complement_u B)$$

容斥原理

$$Card(A\cup B)=Card(A)+Card(B)-Card(A\cap B)$$

$$\begin{aligned}Card(A\cup B\cup C)=&Card(A)+Card(B)+Card(C)\\&-Card(A\cap B)-Card(A\cap C)\\&-Card(B\cap C)+Card(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

函数导数的四则运算法则

1. $(u\pm v)'=u'\pm v'$

2. $(uv)'=u'v+uv'$

3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

真题解析

例 1 (2009 年清华大学文科)

已知函数 $f(x)$是三次项系数为$\dfrac{a}{3}$的三次函数,并且有 $f'(x)-9x<0$ 的解集为$(1,2)$. (1) 若 $f'(x)+7a=0$ 仅有 1 解,求 $f'(x)$的表达式;(2) 若 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调增,求实数 a 的取值范围.

解: 由题设条件可设 $f(x)=\dfrac{a}{3}x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$.

于是 $f'(x)=ax^2+2a_2x+a_1$,由于 $f'(x)-9x<0$ 的解集为$(1,2)$.

$$\therefore\begin{cases}a+2a_2+a_1-9=0,\\4a+4a_2+a_1-18=0.\end{cases}$$

解之得:
$$\begin{cases}a_1=2a,\\2a_2=9-3a.\end{cases}$$

$\therefore f'(x)=ax^2+(9-3a)x+2a$.

(1) 由于 $f'(x)+7a=0$ 仅有 1 解,且 $a\neq0$, $\therefore \Delta=(9-3a)^2-36a^2=0$,解之得 $a=1$ 或 $a=-3$. 又 $\because$ 不等式 $f'(x)-9x<0$ 的解集为$(1,2)$,

$\therefore a>0$,故 $a=1$. $\therefore f'(x)=x^2+6x+2$.

(2) 由于 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调增,$\therefore f'(x)=ax^2+(9-3a)x+2a\geqslant0$ 的解集为 R.

$\therefore \Delta=(9-3a)^2-8a^2\leqslant0$ 的解集即为所求. $\therefore$ 有 $a^2-54a+81\leqslant0$. $\therefore 27-18\sqrt{2}\leqslant a\leqslant27+18\sqrt{2}$.

评注: 该例涉及了导数、方程、二次函数与不等式等知识,所以较有深度.

例 2　(2008 年上海交通大学)

若 $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$, $g(x)=f^{-1}(x)$, 则 $g\left(\dfrac{3}{5}\right)=$________.

解: 设 $g\left(\dfrac{3}{5}\right)=f^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)=t$, 则 $f(t)=\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{2^t-1}{2^t+1}=\dfrac{3}{5}$, $\therefore t=2$.

评注: 解决反函数问题要特别注意利用原函数和反函数之间的关系,这样可以大大减少问题的运算量.

例 3　(2008 年上海交通大学)

函数 $y=\dfrac{x+1}{x^2+8}$ 的最大值为________.

解: 方法一:(“Δ”法)$\because$ $yx^2-x+8y-1=0$, $\therefore$ $\Delta=1-4y(8y-1)\geqslant 0$, $\therefore$ $-\dfrac{1}{8}\leqslant y\leqslant \dfrac{1}{4}$;

方法二:令 $x+1=t$, 则 $y=\dfrac{t}{t^2-2t+9}=\dfrac{1}{t+\dfrac{9}{t}-2}\leqslant \dfrac{1}{4}$.

评注: “Δ”法和基本不等式法是解决分式二次函数常用的方法.

例 4　(2008 年浙江大学)

$A=\left\{(x,y)\,\middle|\,(x-1)^2+(y-2)^2\leqslant \dfrac{5}{4}\right\}$, $B=\{(x,y)\mid |x-1|+2|y-2|\leqslant a\}$, $A\subseteq B$, 求 a 的取值范围.

解: 注意到问题的结构特点,可先换元化简,令 $X=x-1$, $Y=y-2$, 则问题等价转化为:$A_1=\left\{(X,Y)\,\middle|\,X^2+Y^2\leqslant \dfrac{5}{4}\right\}$, $B_1=\{(X,Y)\mid |X|+2|Y|\leqslant a\}$, $A_1\subseteq B_1$, 求 a 的取值范围.

注意到 A_1、B_1 是封闭点集区域,不但关于 x 轴、y 轴对称,而且关于坐标原点 O 对称,于是集中精力研究两点集在第一象限的关系即可. 通过画图(数形结合)容易发现,a 越大,越容易满足要求,最小的正数 a 恰好对应二者相切的情形,此时,圆心 $O(0,0)$ 到直线 $X+2Y=a$ 的距离等于半径,于是 $d=\dfrac{|-a|}{\sqrt{1+2^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, 临界的 $a=\dfrac{5}{2}$, 所以 a 的取值范围是 $a\geqslant \dfrac{5}{2}$.

评注: 本题着重于考查考生的连续化简能力(化归与转化的思想方法),对于有些难度较大的问题,需要采用分步渐进战术,并及时进行信息处理,积小胜为大胜,最后获得问题的完全解决. 这类试题若从新课程标准的要求看,考查了学生对数学的情感、态度及价值观,也考查了他们的韧性、耐力和顽强拼搏的信心和勇气.

例 5 (2008 年上海交通大学)

已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$，且 $f(x)=x$ 没有实数根，试判断 $f[f(x)]=x$ 是否有实数根？并证明你的结论.

解: 没有.

方法一：$f(x)-x=ax^2+(b-1)x+c=0$ 无实数根，

$$\Delta=(b-1)^2-4ac<0;\ f[f(x)]-x=0.$$

$$a(ax^2+bx+c)^2+b(ax^2+bx+c)+c-x=0.$$

$$a(ax^2+bx+c)^2-ax^2+ax^2+b(ax^2+bx+c)+c-x=0.$$

$$a(ax^2+bx+c-x)(ax^2+bx+c+x)+(b+1)ax^2+(b^2-1)x+c(b+1)=0.$$

$$a[ax^2+(b-1)x+c][ax^2+(b+1)x+c]+(b+1)[ax^2+(b-1)x+c]=0.$$

$$[ax^2+(b-1)x+c][a^2x^2+a(b+1)x+b+ac+1]=0.$$

于是有 $ax^2+(b-1)x+c=0$ 或 $a^2x^2+a(b+1)x+ac+b+1=0$.

$$\Delta_1=(b-1)^2-4ac<0;$$

$$\Delta_2=a^2(b+1)^2-4a^2(ac+b+1)=a^2[(b-1)^2-4ac-4]<-4a^2<0.$$

故均不存在实数根.

方法二：若 $a>0$，则 $f(x)>x$（$\because$ 若存在 x，使 $f(x)\leqslant x$，则由于 $y=f(x)$ 的图象是开口向上的抛物线，因此，必存在 x，使 $f(x)>x$. 于是 $f(x)=x$ 有实数根，这就产生了矛盾）.

于是 $f[f(x)]>f(x)>x$；

若 $a<0$，则 $f(x)<x$；

于是 $f[f(x)]<f(x)<x$；

所以 $f[f(x)]=x$ 没有实数根.

评注: 由于 $f(x)=x$ 的根一定是 $f[f(x)]=x$ 的根，再考虑到本题的结论，我们就有：若 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$，则 $f(x)=x$ 有根的充要条件是 $f[f(x)]=x$ 有根. 当然，我们还应该清楚的是，$f[f(x)]=x$ 的根未必都是 $f(x)=x$ 的根. 因此，$\{x\mid f(x)=x\}\subseteq\{x\mid f[f(x)]=x\}$.

例 6 (2007 年清华大学)

对于集合 $M\subseteq\mathbf{R}^2$，称 M 为开集，当且仅当 $\forall P_0\in M$，$\exists r>0$，使得 $\{P\in\mathbf{R}^2\mid |PP_0|<r\}\subseteq M$. 判断集合 $\{(x,y)\mid 4x+2y-5>0\}$ 与 $\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y>0\}$ 是否为开集，并证明你的结论.

解: (1) 集合 $\{(x,y)\mid 4x+2y-5>0\}$ 是开集. $\forall P_0(x_0,y_0)\in\{(x,y)\mid 4x+2y-5>0\}$，取 r 为 P_0 到直线 $4x+2y-5=0$ 的距离，则 $\{P\in\mathbf{R}^2\mid |PP_0|<r\}\subseteq\{(x,y)\mid 4x+2y-5>0\}$. 因此，集合 $\{(x,y)\mid 4x+2y-5>0\}$ 为开集.

(2) 集合$\{(x, y) \mid x \geqslant 0, y > 0\}$不是开集. 取$(0, 1) \in \{(x, y) \mid x \geqslant 0, y > 0\}$，则对任意的$r > 0$，$\{P \in \mathbf{R}^2 \mid |PP_0| < r\} \not\subseteq \{(x, y) \mid x \geqslant 0, y > 0\}$，故它不是开集.

评注： 这里所说的开集，其实就是平面上的一个区域，而区域的边界不属于区域内. 若区域的边界(或者是一部分边界)属于区域内，则该区域表示的点集就不是开集.

例 7 (2007 年清华大学)

求函数 $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ 的单调区间及极值.

解： 易知：$f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ 的定义域为$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

$f'(x) = \dfrac{e^x}{x^2}(x-1)$，$f'(x) < 0 \Rightarrow$ 当$x < 0$或$0 < x < 1$时，$f(x)$单调递减，$f'(x) > 0 \Rightarrow$ 当$x > 1$时 $f(x)$ 单调递增.

由此可知，$f(x)$ 存在极小值 $f(1) = e$，但不存在极大值.

评注： 本例考查了函数单调性与它的导数取值之间的关系. 通过本例的求解，我们感受到了：如果与函数的草图相结合，借助函数图象的一些特征，则确定的单调性就不会发生错误.

例 8 (2007 年北京大学)

设 $f(x) = x^2 - 53x + 196 + |x^2 - 53x + 196|$，求 $f(1) + f(2) + \cdots + f(50)$.

解： 由 $x^2 - 53x + 196 = (x-4)(x-49) \leqslant 0$，可得 $4 \leqslant x \leqslant 49$.

$\therefore f(4) = f(5) = \cdots = f(49) = 0$.

$$\begin{aligned}
\therefore\quad & f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(50) \\
&= f(1) + f(2) + f(3) + f(50) \\
&= 2(1^2 - 53 \times 1 + 196) + 2(2^2 - 53 \times 2 + 196) \\
&\quad + 2(3^2 - 53 \times 3 + 196) + 2(50^2 - 53 \times 50 + 196) \\
&= 2(1^2 + 2^2 + 3^2 + 50^2) - 2 \times 53(1 + 2 + 3 + 50) \\
&\quad + 2 \times 4 \times 196 = 5\,028 - 5\,936 + 1\,568 = 660.
\end{aligned}$$

评注： 由于函数 $f(x)$表达式的结构特点，我们可以发现当且仅当 $y = x^2 - 53x + 196 \leqslant 0$ 时，$f(x) = 0$. 这样在所求的和式中，我们只要求那些使 $x^2 - 53x + 196 > 0$ 的 x 值的函数值的和.

例 9 (2007 年江苏预赛)

已知 $f(x) = |x+1| + |x+2| + \cdots + |x+2\,007| + |x-1| + |x-2| + \cdots + |x-2\,007|$ $(x \in \mathbf{R})$，且 $f(a^2 - 3a + 2) = f(a-1)$，则 a 的值有　(　　)

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 无数个

解： 由题设知 $f(x)$ 为偶函数，则考虑在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，恒有

$$f(x)=2\times(1+2+3+\cdots+2\,007)=2\,008\times 2\,007.$$

所以当 $-1\leqslant a^2-3a+2\leqslant 1$，且 $-1\leqslant a-1\leqslant 1$ 时，恒有 $f(a^2-3a+2)=f(a-1)$.

由于不等式 $-1\leqslant a^2-3a+2\leqslant 1$ 的解集为 $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\leqslant a\leqslant\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$，不等式 $-1\leqslant a-1\leqslant 1$ 的解集为 $0\leqslant a\leqslant 2$. 因此当 $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\leqslant a\leqslant 2$ 时，恒有 $f(a^2-3a+2)=f(a-1)$. 故选 D.

评注： 本题我们并没有去对 $x\in\mathbf{R}$ 来进行求解，而是根据函数特征，选取了特殊区间来判断，特殊值法解选择题的优势体现得淋漓尽致！

例 10 （2007 年江西预赛）

设 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$，又记：

$$f_1(x)=f(x),\ f_{k+1}(x)=f(f_k(x)),\ k=1,2,\cdots,\ \text{则}\ f_{2\,007}(x)=(\quad)$$

A. $\dfrac{1+x}{1-x}$　　B. $\dfrac{x-1}{x+1}$　　C. x　　D. $-\dfrac{1}{x}$

解： $f_1(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$，$f_2(x)=\dfrac{1+f_1}{1-f_1}=-\dfrac{1}{x}$，$f_3(x)=\dfrac{1+f_2}{1-f_2}=\dfrac{x-1}{x+1}$，$f_4(x)=\dfrac{1+f_3}{1-f_3}=x$，据此，$f_{4n+1}(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$，$f_{4n+2}(x)=-\dfrac{1}{x}$，$f_{4n+3}(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$，$f_{4n}(x)=x$，因 2 007 为“$4n+3$”型，故选 B.

评注： 这是一个类似于数列类型的求函数解析式的问题. 寻找规律是我们解题的直觉！

例 11 （2007 年湖北预赛）

定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 既是奇函数又是周期函数，若 $f(x)$ 的最小正周期是 π，且当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(x)=\sin x$，则 $f\left(\dfrac{8}{3}\pi\right)$ 的值为　(　　)

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $-\dfrac{1}{2}$

解： 根据题设条件可知

$$f\left(\frac{8}{3}\pi\right)=f\left(-\frac{\pi}{3}+3\pi\right)=f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故选 B.

评注： 由于自变量 $\dfrac{8}{3}\pi\notin\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以本例求解的关键是利用函数的周期性和奇偶

性转化自变量,并且要转化到区间$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right)$内,才能获得所求的值.

例 12 (2006 年复旦大学)

试构造函数 $f(x)$, $g(x)$,其定义域为$(0,\ 1)$,值域为$[0,\ 1]$,并且对于任意 $a\in[0,\ 1]$, $f(x)=a$ 只有一解,而 $g(x)=a$ 有无穷多个解.

解: (1) 设 $f(x)=\begin{cases}h(x) & x\in\mathbf{Q}\cap(0,\ 1)((0,\ 1)\text{ 中有理数})\\ x & x\in\mathbf{Q}^C\cap(0,\ 1)((0,\ 1)\text{ 中无理数})\end{cases}$,

下面构造满足条件的 $h(x)$.

① 将$(0,\ 1)$中的有理数$\frac{q}{p}$($q<p$,既约真分数)排序:先按分母排序,同分母按分子排序,则排序唯一(可数)$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, …

② 再将$[0,\ 1]$中的有理数排序:0, 1 在排序之前即 0, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, …

③ $h(x)$将 1, 2 中排序的数字一一对应即:

$$h\left(\frac{1}{2}\right)=0,\ h\left(\frac{1}{3}\right)=1,\ h\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2},\ \cdots$$

显然对任意 $a\in[0,\ 1]$, $f(x)=a$ 只有一解.

(2) 设 $g(x)=\left|\sin\frac{1}{x}\right|$ $(x\in(0,\ 1))$,则对于任意 $a\in[0,\ 1]$, $g(x)=a$ 有无穷多个解.

评注: 这里对 $h(x)$的构造是关键,其原理是有理数的任意两个无限子集之间都可以建立一一对应关系.

例 13 (2006 年清华大学)

已知 $f(x)$满足:对实数 a, b 有 $f(a\cdot b)=af(b)+bf(a)$,且$|f(x)|\leqslant 1$,求证:$f(x)$恒为零.

(可用以下结论:若$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$, $|f(x)|\leqslant M$, M 为一常数,那么$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\cdot g(x)=0$)

解: 由条件,若 a, b 为实数有 $f(a\cdot b)=af(b)+bf(a)$. ①

令 $a=b=0$,得 $f(0)=0$,令 $a=b=1$,得 $f(1)=0$, $a=b=-1$ 得 $f(-1)=0$.

下面用反证法证明.设至少存在一点 x_0 使得 $f(x_0)\neq 0$,显然 $x_0\neq 0$, $x_0\neq\pm 1$,若$|x_0|>1$,对正整数 n 反复利用①式得 $f(x_0^n)=nx_0^{n-1}f(x_0)$,即$\frac{f(x_0^n)}{nx_0^{n-1}}=f(x_0)\neq 0$. ②

考虑 $n\to\infty$ 时,$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{nx_0^{n-1}}=0$,而此时 $n\to\infty\Rightarrow nx_0^{n-1}\to\infty$,由条件$|f(x)|\leqslant 1$ 及结论

$\lim g(x)=0$，$|f(x)|\leqslant M$，M为一常数，那么$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x))\cdot g(x)=0$，于是②式在$n\to\infty$时矛盾，所以对任意的$|x|\geqslant 1$，有$f(x)=0$；若存在$0<|x_0|<1$，使得$f(x_0)\neq 0$，从而由条件知$f(1)=f\left(x_0\cdot\dfrac{1}{x_0}\right)=x_0\cdot f\left(\dfrac{1}{x_0}\right)+\dfrac{1}{x_0}f(x_0)=0$，所以$f\left(\dfrac{1}{x_0}\right)\neq 0$，同样，对正整数$n$反复利用①式得$f(x_0^{-n})=\dfrac{n}{x_0^{n-1}}f(x_0^{-1})$，即$\dfrac{x_0^{n-1}}{n}f(x_0^{-n})=f(x_0^{-1})\neq 0$，与前面的证明完全类似，该式两边在$n\to\infty$时矛盾，所以不存在$0<|x_0|<1$，使得$f(x_0)\neq 0$. 综上所述，对任意实数$x$，$f(x)$恒为零.

评注：这是一道集抽象函数、数列的极限及高等数学背景于一体的综合题. 在方法上，首先用特殊值法探路，继而以反证法(题意蕴涵要证结论为：对任意实数x都有$f(x)=0$，这就具有了使用反证法处理问题的一般特点)寻找矛盾，这时，因为反设中某点x_0满足$f(x_0)\neq 0$是一个有限值，如何才能把$x\to\infty$的这个无限的条件给用上，实现有限到无限的转化呢？我们想到可以让$n\to\infty$，但此时$\lim\limits_{n\to\infty}x_0^n$并不总是存在的，从而分类讨论及根据$x_0$的不同取值范围采取不同的推理形式就自然而然了.

例 14　(2006 年上海交通大学)

若有函数$f(x,y)=a(x)b(y)+c(x)d(y)$，其中$a(x)$，$c(x)$为关于x的多项式，$b(y)$，$d(y)$为关于y的多项式，则称$f(x,y)$为P类函数. 判断下列函数是否是P类函数，并说明理由.

(1) $1+xy$；(2) $1+xy+x^2y^2$.

解：(1) $1+xy=1\cdot 1+x\cdot y$，其中$a(x)=1$，$b(y)=1$，$c(x)=x$，$d(y)=y$，所以$1+xy$是P类函数.

(2) $1+xy+x^2y^2$不是P类函数. 理由如下：若$1+xy+x^2y^2$是P类函数，那么$a(x)$，$c(x)$与$b(y)$，$d(y)$的最高次数都不应该超过两次，否则，$a(x)$与$b(y)$、$c(x)$与$d(y)$乘积中次数高于2次的对应项的系数之和为零，从而可得：$a(x)$与$c(x)$的对应项系数成比例(或者是$b(y)$与$d(y)$的对应项系数成比例). 这样，$1+xy+x^2y^2=p(x)q(y)$，而这是不可能的. 证法与下面的一样. 故可知$a(x)$，$c(x)$，$b(y)$，$d(y)$的次数均不超过2次.

设$1+xy+x^2y^2=(a_1x^2+a_2x+a_3)(b_1y^2+b_2y+b_3)+(c_1x^2+c_2x+c_3)(d_1y^2+d_2y+d_3)$，展开后，由对应项的系数相等可得：$\begin{cases}a_1b_1+c_1d_1=1\\a_1b_2+c_1d_2=0,\\a_1b_3+c_1d_3=0\end{cases}$ $\begin{cases}a_2b_2+c_2d_2=1\\a_2b_1+c_2d_1=0,\\a_2b_3+c_2d_3=0\end{cases}$ $\begin{cases}a_3b_1+c_3d_1=0\\a_3b_2+c_3d_2=0,\\a_3b_3+c_3d_3=1\end{cases}$所以$b_1$，$b_2$，$b_3$与$d_1$，$d_2$，$d_3$对应成比例，这样就有$1+xy+x^2y^2=(e_1x^2+e_2x+e_3)(f_1y^2+f_2y+f_3)$，于是有$\begin{cases}e_1f_1=1\\e_2f_2=1\\e_3f_3=1\end{cases}$和$\begin{cases}e_1f_2=0\\e_1f_3=0.\\e_2f_1=0\end{cases}$因为当$e_1f_2=0$时，$e_1=0$或$f_2=0$，这和$e_1f_1=1$及$e_2f_2=1$相矛盾，从而可知$1+xy+x^2y^2$不是$P$类函数.

评注：在对$1+xy+x^2y^2$是否为P类函数的判断中，我们两次采用了反证法. 可见

反证法在相关问题的求证中，其作用不仅显著，有时甚至是不可替代的.

例 15　(2005 年复旦大学)

设 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid \log_2(x^2-x-1)>0\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}\mid 2^x-2^{1-x}>1\}$，则 $A\cup B^C=$________(B^C 表示 B 在 $\mathbf{R}$ 上的补集).

解：由 $\log_2(x^2-x-1)>0$ 得 $x^2-x-1>1$，即 $x^2-x-2>0$，$\therefore x<-1$ 或 $x>2$；由 $2^x-2^{1-x}>1$ 得 $x>1$，所以 A：$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$，$B$：$(1,+\infty)$，故 $B^C=\{x\mid x\leqslant 1\}$，所以有 $A\cup B^C=(-\infty,1]\cup(2,+\infty)$.

评注：集合的运算是集合知识的重点，在解决这类问题时，一定要注意区分概念，本例中要注意的是补集的概念，特别要注意区间的端点.

例 16　(2005 年复旦大学)

定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)(x\neq 1)$ 满足 $f(x)+2f\left(\dfrac{x+2\,002}{x-1}\right)=4\,015-x$，则 $f(2\,004)=$________.

解：令 $\dfrac{x+2\,002}{x-1}=t$，则 $x=\dfrac{t+2\,002}{t-1}$，从而有

$$\begin{cases}f(t)+2f\left(\dfrac{t+2\,002}{t-1}\right)=4\,015-t\\ f\left(\dfrac{t+2\,002}{t-1}\right)+2f(t)=4\,015-\dfrac{t+2\,002}{t-1}\end{cases}\text{，解之得}$$

$$f(t)=\frac{1}{3}\left(4\,013+t-\frac{4\,006}{t-1}\right)\text{，则 } f(2\,004)=2\,005.$$

评注：这是一类函数方程的问题，求解的策略是构造一个方程组并解之.

例 17　(2005 年上海交通大学)

若 $y=\dfrac{ax^2+8x+b}{x^2+1}$ 的最大值为 9，最小值为 1，求满足条件的实数 a，b.

解：函数的定义域为 R. 由 $y=\dfrac{ax^2+8x+b}{x^2+1}$ 得 $(a-y)x^2+8x+b-y=0$.

若 $a-y=0$，则 $x=\dfrac{y-b}{8}\in\mathbf{R}$；

若 $a-y\neq 0$，由 $D\geqslant 0$ 得 $64-4(a-y)(b-y)\geqslant 0$，即 $(a-y)(b-y)-16\leqslant 0$. 由题意知 1 和 9 是方程 $y^2-(a+b)y+ab-16=0$ 的两个根，所以 $\begin{cases}1+9=a+b\\1\times 9=ab-16\end{cases}$，解得 $a=b=5$.

评注: 该种分式型函数,当定义域为 **R** 时,可以用判别式法求函数的值域,而当定义域不为 **R** 时,不能用此法求函数的值域,但可用来求函数的最值.

例 18 (2005 年复旦大学)

定义在 **R** 上的函数 $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$, $S_n=f\left(\dfrac{1}{n}\right)+f\left(\dfrac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$, $n=2$, 3, $\cdots$

(1) 求 S_n;(2) 问是否存在常数 $M>0$, 使得 $\forall n\geqslant 2$,有 $\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_3}+\cdots+\dfrac{1}{S_{n+1}}\leqslant M$.

解: $f(x)+f(1-x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}+\dfrac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\dfrac{4^x}{4^x+2}+\dfrac{4}{4+2\times 4^x}=1.$

(1) $$2S_n=f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$=\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{n-2}{n}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)\right]=n-1.$$
$$S_n=\frac{n-1}{2}.$$

(2) 假设不存在常数 M(反证法)

$$\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_{n+1}}=\frac{2}{1}+\frac{2}{2}+\cdots+\frac{2}{n}=2\left(\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

设 $2^k\leqslant n<2^{k+1}$,则 $\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{2^{k+1}}$.

$$\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{n}=\frac{1}{1}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k-1}\right)+\cdots$$
$$>\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{8}+\cdots+2^{k-1}\times\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}k>\frac{1}{2}(\log_2 n-1).$$

评注: 先得到函数 $f(x)$的图象关于点$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$对称,再由倒序相加法求解,通过反证法结合放缩法证明 $\dfrac{1}{S_2}+\dfrac{1}{S_3}+\cdots+\dfrac{1}{S_{n+1}}$ 不收敛.

例 19 (2004 年复旦大学)

若存在 M,使任意 $t\in D$(D 为函数 $f(x)$的定义域),都有 $|f(x)|\leqslant M$, 则称函数 $f(x)$有界. 问函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x\in\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$上是否有界?

解: 否.取 $0<x=\dfrac{1}{k\pi+\dfrac{\pi}{2}}<\dfrac{1}{2}$ $(k\in\mathbf{N}^{+})$,则 $f(x)=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$,当 k 趋向于正无穷时,$f(x)$ 趋向于正无穷.

评注: 通过取特殊值,确定函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上可以趋向无穷大,从而确定其不是有界的.

例 20 (2004 年上海交通大学)

$f(x)=ax^4+x^3+(5-8a)x^2+6x-9a$, $x\in\mathbf{R}$, $a\in\mathbf{R}$, 证明:(1) 总有 $f(x)=0$;(2) 总有 $f(x)\neq 0$.

解: (1) $f(x)=ax^4+x^3+(5-8a)x^2+6x-9a$ 可以改写为 $f(x)=(x^4-8x^2-9)a+x^3+5x^2+6x=(x+3)(x-3)(x^2+1)a+x(x+3)(x+2)$,显然当 $x=-3$ 时,$f(x)=0$,即总存在 x_0,使得 $f(x)=0$.

(2) 假设对所有的 x,都有 $f(x)=0$,则有 $ax^4+x^3+(5-8a)x^2+6x-9a=0$,显然这样的实数 a 值不存在,故假设不成立.这表明对所有的实数 x,总有 $f(x)\neq 0$.

评注: (1) 首先要准确地理解题意,"总有 $f(x)=0$"意思是"存在实数 x_0,使得 $f(x)=0$";"总有 $f(x)\neq 0$"意思是"一定存在实数 x_0,使得 $f(x)\neq 0$";(2) 对于第(2)个问题的处理,可以考虑用反证法.

例 21 (2004 年上海交通大学)

$f_1(x)=\dfrac{1-x}{x+1}$,对于一切自然数 n,都有 $f_{n+1}(x)=f_1[f_n(x)]$,且 $f_{36}(x)=f_6(x)$,求 $f_{28}(x)$.

解: 由条件知 $f_2(x)=f_1(f_1(x))=\dfrac{1-\dfrac{1-x}{x+1}}{\dfrac{1-x}{x+1}+1}=x$, $f_3(x)=f_1(f_2(x))=\dfrac{1-x}{x+1}$, $f_4(x)=f_1(f_3(x))=x$, ….

于是:$f_1(x)=f_3(x)=f_5(x)=\cdots=f_{2n-1}(x)$ $(n\in\mathbf{N}^*)$;

$f_2(x)=f_4(x)=f_6(x)=\cdots=f_{2n}(x)$ $(n\in\mathbf{N}^*)$,所以 $f_{28}(x)=x$.

评注: 本题实际上考查观察能力以及函数的迭代知识,能从具体的问题中发现规律.此外,题目中的条件 $f_{36}(x)=f_6(x)$ 实际上是多余的.

例 22 (2003 年同济大学保送生考试)

$f(x)$ 是周期为 2 的函数,在区间 $[-1,1]$ 上,$f(x)=|x|$,则 $f\left(2m+\dfrac{3}{2}\right)=$ ________ (m 为整数).