高等微積分

趙訪熊著

商務印書館發行

高等徽積分

趙訪熊著

商務印書館發行

一九四九年十一月初版

(50822·1)

高等微積分一册

基價叁拾柒元

印刷地點外另加運費

著作者 趙訪熊

發行人 陳懋解

上海河南中路

印刷所 商務印書館印刷廠

發行所 商務印書館

各地

序

科學愈進步，則所應用之算學工具亦愈多。當今理工同學爲深造計，除應熟諳初等微積分及微分方程外，尙須泛讀較高深之算學。惟理工同學,除專攻算學者外，對於高級算學個別各門，通常無充分時間及精力作有統系之自修,即對於各門之基本觀念,亦難得切實認識。高等微積分爲繼承初等微積分及微分方程之算學課程。其目標即在介紹高級算學中較切實用各門之基本觀念及重要定理以適應理工同學之需要。

微積分之最基本觀念爲"極限"之觀念。例如貫數，級數，積分之收斂性，函數之連續性及可微性，均基於極限之觀念。ϵ 方法爲現代算學之重要工具，亦爲了解極限觀念之最經濟方法,若不用 ϵ 方法，則許多觀念不易了解;許多定理不易證明。故著者在本書內特別注重 ϵ 方法。最初即以此法證極限之定理,並用以證各種重要定理。此法初用似欠自然,惟較依賴直覺爲切實可靠，時習之亦即純熟。讀者若早日養成以 ϵ 爲思想工具之習慣,則可得高等分析之門徑,將來參考算學論文亦無困難矣。

函數級數,無窮積分,及瑕積分關於收斂性,一致收斂性,所定函數之連續性,可微性，逐項或在積分號下積分及微分性，各有相應並行定理,並有並行之證明。他若實變數函數論及複變數函數論,富氏級數及

勒氏級數，亦有並行定理。故若作聯合比較研究，則舉一反三，事半功倍。

複數爲平面矢量。複變函數爲平面矢量場。可微複變函數則爲一種有簡單物理意義之平面矢量場。故複變函數論可自矢量場得一物理解釋。某種矢量場問題則又可利用可微複變函數論求解。惟通常矢量分析實爲空間矢量分析，對於平面矢量之特殊性及運算方法恆不討論，著者在本書內特作平面矢量及複數之聯合討論，使平面矢量分析與複變函數論熔而爲一。

富氏級數及富氏積分爲算學物理之重要工具。著者特詳論其收斂定理及運算方法。惟偏微分方程，變分法，及橢圓積分，範圍均較廣泛，本書僅能作初步介紹。

運算微積爲一新興之算學工具。用以解決微分方程問題甚感簡捷。電機工程，航空工程，及物理同學已有利用此工具之需要。本書特設運算微積一章，以介紹其基本定理，公式及運算方法。

著者在清華大學理工二院勉力擔任此課程有年，深感無適用於我國理工學院之課本，乃匆促整理歷年講義編著是書。民國三十年承西南聯合大學工學院藍印是書初稿數册，以供同學參考。該初稿蒙姜立夫先生及本書校訂人詳細指正，特此誌謝。惟自顧能薄而材譾，疵謬在所不免，倘望海內碩學有以教正之。

民國三十五年一月二十八日　　趙訪熊序於昆明。

目　錄

高等微積分

第一章 集合、貫數及級數

1-1. 集合

任何多個"元素"(Element)組成之集體名爲"集合"(Set)。設所論元素爲點 則稱此集合爲"點集"(Point set)。設所論元素爲數則稱此集合爲"數集"(Number set)。

設有一集合 k 及一關係 $<$ 滿足下列四個基本假設：

(0) k 中含兩個元素以上；

(1) 設 a, b 爲不同元素，則 $a<b$ 或 $b<a$；

(2) 設 $a<b$，則 a, b 爲不同元素；

(3) 設 $a<b$，$b<c$，則 $a<c$。

則名此集合爲"序集"(Ordered set)。其中 $<$ 爲表示一種關係之符號，所表之關係究爲何關係，所論元素究爲何物，則非純粹算學家所顧知者。

〔例 1〕設 k 爲全體正整數組成之集合，$<$ 解說爲"小於"則 $(k,<)$ 滿足序集之四個基本假設。故正整數集爲序集。

〔例 2〕設 k 爲圍坐圓桌吃飯之 a,b,c 三個人所組成之集合，$a<b$

解說爲“a 在 b 之左”，則$(k, <)$滿足序集之(0)，(1)，(2)三個基本假設而不滿足最後基本假設(3)。

設集合內含有無窮多個元素則名此集合爲“無窮集”(Infinite set)。設集合內僅含有窮多個元素，則名此集合爲“有窮集”(Finite set)。設集合內不含任何元素，則名爲“空集”(Empty set)。

例如全體正整數組成之數集爲一無窮數集，小於十之正整數組成之數集爲一有窮數集，小於一之正整數組成之數集，則爲一空數集。

設給定序集內之任何二不同元素 a 及 c，$a<c$，此序集內恆有元素 b 使 $a<b$ 及 $b<c$，則名此序集爲“密集”(Dense set)。

〔例〕正整數集非密集，因給定二鄰接正整數 a 及 c，並無正整數 b 使 $a<b$ 及 $b<c$ 也。

1-2. 數系

全體正整數組成之數集名爲“正整數系”。正整數系內任何二數之和及積仍爲系內之一數，其差及商未必在系內。

創零及負整數而加入正整數系卽成“整數系”，此系內任何二數之和，差，及積仍在系內，其商仍未必在系內。

創任何二整數之商(0不准爲除數)而名爲“分數”或“有理數”。全體分數組成之數集名爲“分數系”或“有理數系”。此系內任何二數之和，差，積，商(0不准爲除數)仍在系內。有理數系爲序集並爲密集。

1-3. 無理數

有理數系並不能包含一切實用之數。

定理 1-1. 設正整數 m 非另一正整數之平方，則無有理數 r 使

$r^2=m$，亦即 $\sqrt{m}$ 非有理數。

【證】設此定理爲謬，則有一正有理數 r 使 $r^2=m$。寫 $r=\frac{p}{q}$，p,q 各爲正整數，並約簡之令 q 爲最小之正整數使 $\frac{p}{q}=r$。設 n 爲最大之正整數使 $n^2<m$，則 $(n+1)^2>m$，

故有
$$n^2<m<(n+1)^2。$$

因 $m=\frac{p^2}{q^2}$，故 $(nq)^2<p^2<[(n+1)q]^2$，

即
$$nq<p<(n+1)q,$$

故有
$$0<p-nq<q。$$

惟因 $m=\frac{p^2}{q^2}$，故 $\frac{p}{q}=\frac{mq}{p}=\frac{mq-np}{p-nq}=r$。

故 q 並非最小之正整數使 $\frac{p}{q}=r$。此矛盾證明此定理。

非有理數之數名爲"無理數"。例如 $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5},\cdots\cdots$ 皆無理數。

1-4. 實數

德氏有理數分劃定義：設有一分劃法分有理數系爲 A,B 二數集使

$D1$. A,B 均非空集；

$D2$. 任何有理數必在 A 或 B；

$D3$. A 之任何數小於 B 之任何數；

$D4$. A 無最大數。

則名此分劃法爲"德氏有理數分劃" (Dedekind cut of rational numbers) 以 (A,B) 表之。

〔例〕作有理數分劃如下：

$$\begin{cases}1.\ 0\text{ 及負數皆在 }A,\\ 2.\ \text{正有理數 }r\text{, 以下法分之:}\end{cases}$$

設 $r^2<2$，則 r 在 A，

設 $r^2<2$，則 r 在 B。

茲證此分割爲德氏分割:

(1) 0 在 A，2 在 B，故合 $D1$。

(2) 準定理 1-1，知無有理數 r 使 $r^2=2$，故合 $D2$。

(3) A 中之負數及 0 顯然小於 B 中各數，設 a 爲 A 之任何正數，b 爲 B 之任何數，則

$$a^2<2<b^2,$$

故 $a<b$，故合 $D3$。

(4) 設 A 有最大數 a，則 $a^2<2$，a 爲正有理數。

選正有理數 h 使　　$h<a$ 及 $\dfrac{2-a^2}{3a}$，

則　　$(a+h)^2<a^2+2ah+ah<a^2+2-a^2=2$

故 $a+h$ 大於 a 而仍在 A，此矛盾證明 A 無最大數，故合 $D4$。

定理 1-2. 設 (A,B) 爲德氏有理數分割，則給定任何正有理數 ϵ 後，不論如何小，卽有 A 中之一數 α，B 中之一數 β，使 $\beta-\alpha<\epsilon$。

【證】任意選 A 中之一數 a，B 中之一數 b。

$\dfrac{a+b}{2}$ 爲有理數，設此數在 A，則名爲 a_1 名 b 爲 b_1；設此數在 B，則名爲 b_1，而名 a 爲 a_1。今有

$$b_1-a_1=\frac{b-a}{2}。$$