

# 高等微積分

趙訪熊著

商務印書館發行

高 等 微 積 分

趙 訪 熊 著

商 務 印 書 館 發 行

一九四九年十一月初版

\*\*\*\*\*  
\*\* 有 所 權 版 \*\*  
\*\* 究 必 印 翻 \*\*  
\*\*\*\*\*

高等微積分一冊

◆(50822.1)

基價叁拾柒元

印刷地點外另加運費

著 者 趙 訪 熊

發 行 人 陳 懋 解

上海河南中路

印 刷 所 商 務 印 刷 廠

發 行 所 商 務 印 書 館

各地

## 序

科學愈進步，則所應用之算學工具亦愈多。當今理工同學為深造計，除應熟諳初等微積分及微分方程外，尚須泛讀較高深之算學。惟理工同學，除專攻算學者外，對於高級算學個別各門，通常無充分時間及精力作有統系之自修，即對於各門之基本觀念，亦難得切實認識。高等微積分為繼承初等微積分及微分方程之算學課程。其目標即在介紹高級算學中較切實用各門之基本觀念及重要定理以適應理工同學之需要。

微積分之最基本觀念為“極限”之觀念。例如貫數，級數，積分之收斂性，函數之連續性及可微性，均基於極限之觀念。 $\epsilon$ 方法為現代算學之重要工具，亦為了解極限觀念之最經濟方法，若不用 $\epsilon$ 方法，則許多觀念不易了解；許多定理不易證明。故著者在本書內特別注重 $\epsilon$ 方法。最初即以此法證極限之定理，並用以證各種重要定理。此法初用似欠自然，惟較依賴直覺為切實可靠，時習之亦即純熟。讀者若早日養成以 $\epsilon$ 為思想工具之習慣，則可得高等分析之門徑，將來參考算學論文亦無困難矣。

函數級數，無窮積分，及瑕積分關於收斂性，一致收斂性，所定函數之連續性，可微性，逐項或在積分號下積分及微分性，各有相應並行定理，並有並行之證明。他若實變數函數論及複變數函數論，富氏級數及

勒氏級數，亦有並行定理。故若作聯合比較研究，則舉一反三，事半功倍。

複數爲平面矢量。複變函數爲平面矢量場。可微複變函數則爲一種有簡單物理意義之平面矢量場。故複變函數論可自矢量場得一物理解釋。某種矢量場問題則又可利用可微複變函數論求解。惟通常矢量分析實爲空間矢量分析，對於平面矢量之特殊性及運算方法恆不討論，著者在本書內特作平面矢量及複數之聯合討論，使平面矢量分析與複變函數論熔而爲一。

富氏級數及富氏積分爲算學物理之重要工具。著者特詳論其收斂定理及運算方法。惟偏微分方程，變分法，及橢圓積分，範圍均較廣泛，本書僅能作初步介紹。

運算微積爲一新興之算學工具。用以解決微分方程問題甚感簡捷。電機工程，航空工程，及物理同學已有利用此工具之需要。本書特設運算微積一章，以介紹其基本定理，公式及運算方法。

著者在清華大學理工二院勉力擔任此課程有年，深感無適用於我國理工學院之課本，乃匆促整理歷年講義編著是書。民國三十年承西南聯合大學工學院藍印是書初稿數冊，以供同學參考。該初稿蒙姜立夫先生及本書校訂人詳細指正，特此誌謝。惟自顧能薄而材謝，疵謬在所不免，尚望海內碩學有以教正之。

民國三十五年一月二十八日 趙訪熊序於昆明。

# 目 錄

第一章 集合 貫數及級數	1
1- 1. 集合	1
1- 2. 數系	2
1- 3. 無理數	2
1- 4. 實數	3
1- 5. 實數系	6
1- 6. 實數之四則	7
1- 7. 德氏實數分割	8
1- 8. 數集之特性	9
1- 9. 貫數及其極限	14
1-10. 極限之定理	17
1-11. 單調貫數	18
1-12. 級數	19
1-13. 級數收斂性判斷法	22
1-14. 條件收斂級數	25
1-15. 亞氏引理及定理	26
1-16. 級數運算法	28

---

1-17. 子級數及重列級數 .....	31
1-18. 節套 .....	33
<b>第二章 函數</b> .....	<b>37</b>
2- 1. 函數 .....	37
2- 2. 函數之極限 .....	38
2- 3. 無窮大之鄰區 .....	41
2- 4. 連續性 .....	42
2- 5. 一致連續性 .....	45
2- 6. 連續函數定理 .....	46
2- 7. 微商 .....	50
2- 8. 洛氏定理 .....	53
2- 9. 中值定理 .....	54
2-10. 未定式 .....	55
2-11. 無窮小及無窮大 .....	62
2-12. 戴勞餘項定理 .....	66
<b>第三章 定積分</b> .....	<b>71</b>
3-1. 達布定理 .....	71
3-2. 可積性 .....	76
3-3. 定積分之特性 .....	80
3-4. 冏變函數 .....	84

---

3-5.	定積分所定之函數	90
3-6.	廣義定積分	92
3-7.	無窮積分	92
3-8.	無窮積分與級數	98
3-9.	瑕積分	108
第四章 函數級數		112
4-1.	函數級數	112
4-2.	一致收斂性	113
4-3.	函數級數定理	115
4-4.	冪級數	122
4-5.	冪級數之收斂半徑	124
4-6.	函數級數運算法	129
4-7.	強函數	133
第五章 含參數定積分所定之函數		143
5-1.	平面點集	143
5-2.	含參數定積分所定之函數	147
5-3.	含參數無窮積分所定之函數	155
5-4.	含參數瑕積分所定之函數	160
5-5.	累次求限問題	164
5-6.	$\Gamma$ 函數	170



5-7.	B函數	175
5-8.	狄氏積分	177
<b>第六章 矢量分析</b>		<b>183</b>
6- 1.	平面矢量	183
6- 2.	格林定理	186
6- 3.	格林恆等式	190
6- 4.	調和函數	193
6- 5.	全微分方程	200
6- 6.	曲線積分·傾斜量·發散量及旋轉量之解說	202
6- 7.	空間矢量	206
6- 8.	空間格林定理及格林恆等式	209
6- 9.	微分幾何	212
6-10.	施氏定理	217
6-11.	隱函數	220
6-12.	全微分方程	228
6-13.	推廣坐標系	234
<b>第七章 複變函數</b>		<b>243</b>
7-1.	複數及複變函數	243
7-2.	複變微商	245
7-3.	實變函數與複變函數	250

7- 4. 複變積分 .....	253
7- 5. 戴勞級數 .....	258
7- 6. 複變函數級數 .....	259
7- 7. 孤立異點及賸餘 .....	261
7- 8. 實積分之值 .....	267
7- 9. 圓函數及雙曲函數 .....	273
7-10. 有理函數 .....	278
7-11. 多值函數及黎曼疊面 .....	285
7-12. 平面位動 .....	292
7-13. 可微函數之唯一性 .....	298
<b>第八章 富氏級數及富氏積分 .....</b>	<b>303</b>
8- 1. 正交函數集 .....	303
8- 2. 正交函數級數之展開公式 .....	308
8- 3. 最小二乘漸近函數 .....	312
8- 4. 富氏級數 .....	315
8- 5. 狄氏積分式及收斂定理 .....	322
8- 6. 平均收斂性 .....	328
8- 7. 富氏級數運算法 .....	335
8- 8. 富氏級數之閉式 .....	346
8- 9. 週期之變換 .....	348
8-10. 富氏積分 .....	351

第九章	勒氏多項式及白氏函數	358
9-1.	勒氏多項式	358
9-2.	勒氏多項式之特性	360
9-3.	$x^n$ 之勒氏級數	369
9-4.	$P_n(\cos \theta)$ 之展開式	373
9-5.	收斂定理	375
9-6.	聯屬勒氏多項式	379
9-7.	白氏函數	381
9-8.	白氏函數之特性	387
9-9.	白氏函數之積分式	390
9-10.	白氏函數之根	393
9-11.	白氏函數級數	397
9-12.	變號白氏函數	399
第十章	運算微積	402
10-1.	拉氏積分	402
10-2.	拉氏變式	409
10-3.	反演拉氏變式	413
10-4.	普通運算公式	416
10-5.	幾種函數之拉氏變式	422
10-6.	白氏函數之拉氏變式	427

10-7. 拉氏變式公式表	433
10-8. 尋常平直常係數微分方程	438
10-9. 電錶問題	441
10-10. 拉氏變式之部分分數級數展開式	446
10-11. 琴弦波動	449
10-12. 直線熱流	453
10-13. 幾個無窮實積分之值	457
<b>第十一章 偏微分方程</b>	<b>464</b>
11-1. 拉氏方程及其特解	464
11-2. 應用問題	470
11-3. 波動微分方程	474
11-4. 熱流微分方程	478
11-5. 偏微分方程雜例	481
11-6. 一級偏微分方程	486
<b>第十二章 橢圓積分</b>	<b>496</b>
12-1. 第一種橢圓積分	496
12-2. 可用第一種橢圓積分求值之積分	498
12-3. 橢圓函數	506
12-4. 橢圓函數加法公式	509
12-5. 複變橢圓函數	511

12-6.	$u$ 與 $\sin u$ 之相應圖	516
12-7.	第二及第三種橢圓積分	521
12-8.	樊氏橢圓函數	523

### 第十三章 變分法 ..... 529

13-1.	相對極線	529
13-2.	歐拉方程之初積分	533
13-3.	推廣至 $n$ 個因變數	539
13-4.	哈氏原理	541
13-5.	限制變分	550
13-6.	變端點問題	553
13-7.	推廣至兩個及三個自變數	557

### 附錄

參考書	563
索引	568
譯名	572

# 高等微積分

## 第一章 集合、貫數及級數

### 1-1. 集合

任何多個“元素”(Element)組成之集體名為“集合”(Set)。設所論元素為點 則稱此集合為“點集”(Point set)。設所論元素為數則稱此集合為“數集”(Number set)。

設有一集合  $k$  及一關係  $<$  滿足下列四個基本假設：

(0)  $k$  中含兩個元素以上；

(1) 設  $a, b$  為不同元素, 則  $a < b$  或  $b < a$ ;

(2) 設  $a < b$ , 則  $a, b$  為不同元素;

(3) 設  $a < b, b < c$ , 則  $a < c$ 。

則名此集合為“序集”(Ordered set)。其中  $<$  為表示一種關係之符號, 所表之關係究為何關係, 所論元素究為何物, 則非純粹算學家所願知者。

[例 1] 設  $k$  為全體正整數組成之集合,  $<$  解說為“小於”則  $(k, <)$  滿足序集之四個基本假設。故正整數集為序集。

[例 2] 設  $k$  為圍坐圓桌吃飯之  $a, b, c$  三個人所組成之集合,  $a < b$

解說爲“ $a$  在  $b$  之左”，則  $(k, <)$  滿足序集之 (0), (1), (2) 三個基本假設而不滿足最後基本假設 (3)。

設集合內含有無窮多個元素則名此集合爲“無窮集”(Infinite set)。設集合內僅含有窮多個元素，則名此集合爲“有窮集”(Finite set)。設集合內不含任何元素，則名爲“空集”(Empty set)。

例如全體正整數組成之數集爲一無窮數集，小於十之正整數組成之數集爲一有窮數集，小於一之正整數組成之數集，則爲一空數集。

設給定序集內之任何二不同元素  $a$  及  $c$ ,  $a < c$ , 此序集內恆有元素  $b$  使  $a < b$  及  $b < c$ , 則名此序集爲“密集”(Dense set)。

〔例〕正整數集非密集，因給定二鄰接正整數  $a$  及  $c$ , 並無正整數  $b$  使  $a < b$  及  $b < c$  也。

### 1-2. 數系

全體正整數組成之數集名爲“正整數系”。正整數系內任何二數之和及積仍爲系內之一數，其差及商未必在系內。

創零及負整數而加入正整數系即成“整數系”，此系內任何二數之和，差，及積仍在系內，其商仍未必在系內。

創任何二整數之商 (0 不准爲除數) 而名爲“分數”或“有理數”。全體分數組成之數集名爲“分數系”或“有理數系”。此系內任何二數之和，差，積，商 (0 不准爲除數) 仍在系內。有理數系爲序集並爲密集。

### 1-3. 無理數

有理數系並不能包含一切實用之數。

定理 1-1. 設正整數  $m$  非另一正整數之平方，則無有理數  $r$  使

$r^2 = m$ , 亦即  $\sqrt{m}$  非有理數。

【證】設此定理為謬，則有一正有理數  $r$  使  $r^2 = m$ 。寫  $r = \frac{p}{q}$ ,  $p, q$  各為正整數，並約簡之令  $q$  為最小之正整數使  $\frac{p}{q} = r$ 。設  $n$  為最大之正整數使  $n^2 < m$ ，則  $(n+1)^2 > m$ ，

故有  $n^2 < m < (n+1)^2$ 。

因  $m = \frac{p^2}{q^2}$ ，故  $(nq)^2 < p^2 < [(n+1)q]^2$ ，

即  $nq < p < (n+1)q$ ，

故有  $0 < p - nq < q$ 。

惟因  $m = \frac{p^2}{q^2}$ ，故  $\frac{p}{q} = \frac{mq}{p} = \frac{mq - np}{p - nq} = r$ 。

故  $q$  並非最小之正整數使  $\frac{p}{q} = r$ 。此矛盾證明此定理。

非有理數之數名為“無理數”。例如  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots$  皆無理數。

#### 1-4. 實數

德氏有理數分割定義：設有一分割法分有理數系為  $A, B$  二數集使

D1.  $A, B$  均非空集；

D2. 任何有理數必在  $A$  或  $B$ ；

D3.  $A$  之任何數小於  $B$  之任何數；

D4.  $A$  無最大數。

則名此分割法為“德氏有理數分割”(Dedekind cut of rational numbers) 以  $(A, B)$  表之。

〔例〕作有理數分割如下：



- { 1. 0 及負數皆在  $A$ ,  
 { 2. 正有理數  $r$ , 以下法分之:

設  $r^2 < 2$ , 則  $r$  在  $A$ ,

設  $r^2 > 2$ , 則  $r$  在  $B$ 。

茲證此分割爲德氏分割:

(1) 0 在  $A$ , 2 在  $B$ , 故合  $D1$ 。

(2) 準定理 1-1, 知無有理數  $r$  使  $r^2=2$ , 故合  $D2$ 。

(3)  $A$  中之負數及 0 顯然小於  $B$  中各數, 設  $a$  爲  $A$  之任何正數,

$b$  爲  $B$  之任何數, 則

$$a^2 < 2 < b^2,$$

故  $a < b$ , 故合  $D3$ 。

(4) 設  $A$  有最大數  $a$ , 則  $a^2 < 2$ ,  $a$  爲正有理數。

選正有理數  $h$  使  $h < a$  及  $\frac{2-a^2}{3a}$ ,

$$\text{則 } (a+h)^2 < a^2 + 2ah + ah < a^2 + 2 - a^2 = 2$$

故  $a+h$  大於  $a$  而仍在  $A$ , 此矛盾證明  $A$  無最大數, 故合  $D4$ 。

定理 1-2. 設  $(A, B)$  爲德氏有理數分割, 則給定任何正有理數  $\epsilon$ , 不論如何小, 即有  $A$  中之一數  $a$ ,  $B$  中之一數  $\beta$ , 使  $\beta - a < \epsilon$ 。

【證】任意選  $A$  中之一數  $a$ ,  $B$  中之一數  $b$ 。

$\frac{a+b}{2}$  爲有理數, 設此數在  $A$ , 則名爲  $a_1$  名  $b$  爲  $b_1$ ; 設此數在  $B$ , 則名爲  $b_1$ , 而名  $a$  爲  $a_1$ 。今有

$$b_1 - a_1 = \frac{b - a}{2}。$$