

教育部審定

新課程標準適用

高中解析幾何學

全一冊

編著者 黃泰

修訂者 徐子豪

校閱者 段子燮

上海中華書局印行

教育審定二十四年五月卅一日執照教字第五十八號

民國二十二年四月發行
民國二十二年八月七版

新課程標準適用

高中解析幾何學(全一冊)

◎實價國幣六角四分
(匯費另加)

著者

徐子

校閱者

子

泰 豪 變

發行者

中華書局有限公司
陸費達

印刷者

上海華書局印刷所
澳門路

總發行處

上海華書局發行所
福州路

分發行處

各埠中華書局

權

序

我國於高中算學，向少良書，如解析幾何其一也。以致教者多取材於英文原本，然以東西異地，教育異制，而必按書以授，無怪教者之事倍而功半也。況曩序講學，一國之文化所繫，乃仰給於西文，殊爲不合。黃君階平，前在東南大學肄業時，對於算學甚有研究。畢業後講授於江蘇省立揚州中學高中部，常感英文原本之不合用，爰列取各書之精密者，就其平日所得，而刪蕪擷英，用中文輯之，以爲教本。年來成績甚著，日前以美國史蓋聶三氏解析幾何爲藍本，輯成高中解析幾何一書，請益於余。余覽其程序井然，於我國中學，甚爲適宜。而製曲線等之分類詳明，不憚繁述，尤可爲大學一年級之參考書。是真能融西哲之學爲國用者，因勸其付梓，以公國人，并深望其本斯志於幾何，三角，大代數者，亦有所貢獻。庶我國人講學不借乎外語也，特爲之序。

民國二十年四月段子燮序於國立中央大學算學系

序

解析幾何一科，通形數二者之郵，實爲高等算學之階梯，抑亦中等算學之一總結束，其重要可知。我國高中教授此科，大率採用英美原本，頗多不便。黃階平先生本其在江蘇省立南京中學揚州中學等校多年教學之經驗，以美人史、蓋、聶三氏 Smith, Gale, Neeley 著 New Analytic Geometry 及史、蓋二氏著 Elements of Analytic Geometry 二書爲藍本，編成是書，取材編制均甚合今日之需要。茲者教育部新頒高中課程標準，因受中華書局主人之囑，謹遵部頒標準解析幾何大意部份，并參考黃禹敷先生之批評（見圖書評論第一卷第八期），從事修訂。修訂時，自形式方面至內容方面，大抵仍保存原書固有面目，惜以時日倉促，不及商之於原著者，深以爲歉。

中央大學工科高材生邱侃君，曾演解書中各習題，在修訂時得其裨益不少，附誌於此，以表謝忱。

民國二十二年四月江陰徐子豪序

時次國立中央大學

中西名詞對照表

(一) 中西對照

第一數碼，指頁數；第二數碼，指節數；中文數字，指第幾習題。

三 畫

三級拋綫 Cubical parabola...183, 110

四 畫

中點跡 Diameter189, 112

內擺綫 Hypocycloid192, 113

分比 Ratio of division 10, 7

分點 Point of division 10, 7

切綫 Tangent115, 73

切點 Point of contact.....115, 73

心對稱 Center symmetry ... 24, 16

方向綫 Directed line 1, 1

五 畫

主軸 Transverse axis 88, 54

外心 Circumcentre 47, 六

外擺綫 Epicycloid193, 113

平移 Translation of axis ... 98, 64

平面曲綫 Higher plane curves.....168, 100

正向 Positive direction 1, 1

正坐標 Rectangular coördinates..... 3, 2

正射影 Orthogonal projection 47, 31

正焦點弦 Latus rectum 77, 45

正雙曲綫 Equilateral hyperbolas..... 95, 62

七 畫

判別式 Discriminant154, 90

坐標 Coördinates 2, 2

坐標軸 Coördinate axes 2, 2

拋綫 Parabola 75, 43

八 畫

值 Value..... 19, 9

垂心 Orthocentre ... 47, 六

法綫 Normal.....121, 77

法綫式 Normal form 49, 33

直綫族 System of lines 56, 36

長軸 Major axis 81, 48

附切綫 Subtangent123, 78

附法綫 Subnormal123, 78

九 畫

恆量 Invariant.....158, 92

相配中點跡 Conjugate diameters 190, 五一

相配雙曲綫 Conjugate hyperbolas..... 94, 60

負向 Negative direction. 1, 1

重心 Centroid 47, 六

限域 Range 19, 9

限制曲綫 Boundary curves...187, 108

十 畫

原點 Origin 1, 1

振幅 Amplitude170, 103

根軸 Radical axis..... 66, 41

連心綫 Line of centers 68, 41

配軸 Conjugate axis 88, 54

十一 畫

參變數 Parameter 56, 36

參變數方程式 Parametric equation179, 109

張綫 Open curve 29, 18

斜度 Slope	6, 4
斜坐標 Oblique coördinates	3, 2
移軸術 Transformation of axes	98, 64
週期 Period	169, 102
週期性 Periodicity	168, 102
週期函數 Periodic functions	169, 102
閉綫 Closed curve	28, 17
頂點 Vertex	76, 43

十二畫

單值函數 Single-valued function	19, 10
幾近綫 Asymptote	33, 20
無極 Infinity	29, 18
焦點半徑 Focal radii	130, 81
短軸 Minor axis	81, 48
象限 Quadrant	3, 2
超越函數 Transcendental function	168, 100
軸 Axes	2, 2
軸對稱 Axial symmetry	24, 16

十三畫

圓 Circle	60, 38
圓的漸伸綫 Involute of a circle	194, 113
極小 Minimum	31, 19
極大 Maximum	31, 19
極軸 Polar axis	134, 82
極點 Pole	134, 82
極坐標法 Polar co-ordinate	134, 82

極限地位 Limiting position	115, 73
準綫 Directrix	75, 43

十四畫

維尺曲綫 Witch	194, 113
複值函數 Multiple-valued function	19, 10

十五畫

數量 Magnitude	1, 1
模數 Modulus	175, 105
橫坐標 Abscissas	3, 2
蔓葉綫 Cissoid	184, 110

十六畫

橢圓 Ellipse	80, 48
錐綫 Conics	60, 37
錐綫族 Asystem of conics	111, 71

十七畫

點橢圓 Point ellipse	83, 50
環索綫 Strophoid	187, 111
縱坐標 Ordinates	3, 2

十八畫

擺綫 Cycloid	191, 113
轉移 Rotation of axis	98, 64
鎖綫 Closing lines	48, 31
雙曲綫 Hyperbola	87, 53

二十二畫

變態錐綫 Degeneration conic	154, 90
-------------------------	---------

3. 漸伸綫
 4. 漸伸綫
 5. 漸伸綫
 6. 漸伸綫
 7. 漸伸綫
 8. 漸伸綫
 9. 漸伸綫
 10. 漸伸綫
 11. 漸伸綫
 12. 漸伸綫
 13. 漸伸綫
 14. 漸伸綫
 15. 漸伸綫
 16. 漸伸綫
 17. 漸伸綫
 18. 漸伸綫
 19. 漸伸綫
 20. 漸伸綫
 21. 漸伸綫
 22. 漸伸綫
 23. 漸伸綫
 24. 漸伸綫
 25. 漸伸綫
 26. 漸伸綫
 27. 漸伸綫
 28. 漸伸綫
 29. 漸伸綫
 30. 漸伸綫
 31. 漸伸綫
 32. 漸伸綫
 33. 漸伸綫
 34. 漸伸綫
 35. 漸伸綫
 36. 漸伸綫
 37. 漸伸綫
 38. 漸伸綫
 39. 漸伸綫
 40. 漸伸綫
 41. 漸伸綫
 42. 漸伸綫
 43. 漸伸綫
 44. 漸伸綫
 45. 漸伸綫
 46. 漸伸綫
 47. 漸伸綫
 48. 漸伸綫
 49. 漸伸綫
 50. 漸伸綫
 51. 漸伸綫
 52. 漸伸綫
 53. 漸伸綫
 54. 漸伸綫
 55. 漸伸綫
 56. 漸伸綫
 57. 漸伸綫
 58. 漸伸綫
 59. 漸伸綫
 60. 漸伸綫
 61. 漸伸綫
 62. 漸伸綫
 63. 漸伸綫
 64. 漸伸綫
 65. 漸伸綫
 66. 漸伸綫
 67. 漸伸綫
 68. 漸伸綫
 69. 漸伸綫
 70. 漸伸綫
 71. 漸伸綫
 72. 漸伸綫
 73. 漸伸綫
 74. 漸伸綫
 75. 漸伸綫
 76. 漸伸綫
 77. 漸伸綫
 78. 漸伸綫
 79. 漸伸綫
 80. 漸伸綫
 81. 漸伸綫
 82. 漸伸綫
 83. 漸伸綫
 84. 漸伸綫
 85. 漸伸綫
 86. 漸伸綫
 87. 漸伸綫
 88. 漸伸綫
 89. 漸伸綫
 90. 漸伸綫
 91. 漸伸綫
 92. 漸伸綫
 93. 漸伸綫
 94. 漸伸綫
 95. 漸伸綫
 96. 漸伸綫
 97. 漸伸綫
 98. 漸伸綫
 99. 漸伸綫
 100. 漸伸綫

(二) 西 中 對 照

第一數碼，指頁數；第二數碼，指節數；中文數字，指第幾習題。

A

Asystem of conics 錐綫族	111, 71
Abscissas 橫坐標	3, 2
Amplitude 振幅	170, 103
Asymptote 幾近綫	33, 20
Axes 軸	2, 2
Axial symmetry 軸對稱	24, 16

B

Boundary curves 限制曲綫	178, 108
----------------------	----------

C

Centroid 重心	47, 六
Center symmetry 心對稱	24, 16
Circle 圓	60, 38
Circumcentre 外心	47, 六
Cisoid 蔓葉綫	184, 110
Closed curve 閉綫	28, 17
Closing lines 鎖綫	48, 31
Conics 錐綫	60, 37
Conjugate axis 配軸	88, 54
Conjugate diameters 相配中點跡	190, 五一
Conjugate hyperbolas 相配雙曲綫	94, 60
Coördinates 坐標	2, 2
Coördinate axes 坐標軸	2, 2
Cubical parabola 三級拋綫	183, 110
Cycloid 擺綫	191, 113

D

Degeneration conic 變態錐綫	154, 90
Diameter 中點跡	189, 112

Directed line 方向綫	1, 1
Directrix 準綫	75, 43
Discriminant 判別式	154, 90

E

Ellipse 橢圓	80, 48
Epicycloid 外擺綫	193, 113
Equilateral hyperbolas 正雙曲綫	95, 62

F

Focal radii 焦點半徑	130, 81
------------------	---------

H

Higher plane curves 平面曲綫	168, 100
Hyperbola 雙曲綫	87, 53
Hypocycloid 內擺綫	192, 113

I

Infinity 無極	29, 18
Invariant 恆量	158, 92
Involute of a circle 圓的漸伸綫	194, 113

L

Latus rectum 正焦點弦	77, 45
Limiting position 極限地位	115, 73
Line of centers 連心綫	68, 41

M

Magnitude 數量	1, 1
Major axis 長軸	81, 48
Maximum 極大	31, 19

Minimum 極小	31, 19
Minor axis 短軸	81, 48
Modulus 模數	175, 105
Multiple-valued function 複值函數	19, 10

N

Negative direction 負向	1, 1
Normal 法綫	121, 77
Normal form 法綫式	49, 33

O

Oblique coördinates 斜坐標	3, 2
Open curve 張綫	29, 18
Ordinates 縱坐標	3, 2
Origin 原點	1, 1
Orthocentre 垂心	47, 六
Orthogonal projection 正射影	47, 31

P

Parabola 拋綫	75, 43
Parameter 參變數	56, 36
Parametric equation 參變數方程式	179, 109
Period 週期	169, 102
Periodic functions 週期函數	169, 102
Periodicity 週期性	169, 102
Point ellipse 點橢圓	83, 50
Point of contact 切點	115, 73
Point of division 分點	10, 7
Polar axis 極軸	134, 82
Polar co-ordinate 極坐標法	134, 82
Pole 極點	134, 82
Positive direction 正向	1, 1

Q

Quadrant 象限	3, 2
-------------------	------

R

Radical axis 根軸	66, 41
Range 限域	19, 9
Ratio of division 分比	10, 7
Rectangular coördinates 正坐標	3, 2
Rotation of axis 轉移	98, 64

S

Single-valued function 單值函數	19, 10
Slope 斜度	6, 4
Strophoid 環索綫	187, 111
Subtangent 附切綫	123, 78
Subnormal 附法綫	123, 78
System of lines 直綫族	56, 36

T

Tangent 切綫	115, 73
Transcendental function 超越函數	168, 100
Transformation of axes 移軸術	98, 64
Translation of axis 平移	98, 64
Transverse axis 主軸	88, 54

V

Value 值	19, 9
Vertex 頂點	76, 43

W

Witch 維尺曲綫	194, 113
------------------	----------

新課程標準適用

高中解析幾何學目次

	頁數
第一章 點及坐標.....	1—18
第二章 函數變跡總論.....	19—41
第三章 一次式的變跡 直線.....	42—59
第四章 二次式的變跡 圓.....	60—74
第五章 二次式的變跡 拋線 橢圓 雙曲線.....	75—97
第六章 移軸術.....	98—114
第七章 切線.....	115—133
第八章 極坐標.....	134—151
第九章 一般二次方程式.....	152—167
第十章 高級平面曲線.....	168—196

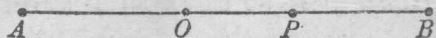
新課程標準適用

高中解析幾何學

第一章

點 及 坐 標

1. 方向綫段 點,是幾何學上的一個基本原素。他位置的相關性質和數學上的數量(Magnitude)一樣,所以要決定一點的位置,必須與其他標準點或綫相關乃可。如於直綫 AB 上,要確定 P 點位置,必須另取一點 O ,作為標準,再量 O, P 距離,則 P 點的位置定了。此 OP 之長,稱為 P 點在 AB 綫上的坐標,而 O 點叫做原點(Origin)。



通常原點的右向,稱為正向(Positive direction),其左向稱為負向(Negative direction),所以 P 點在原點右方,其坐標恆為正,若在原點左方,則為負。

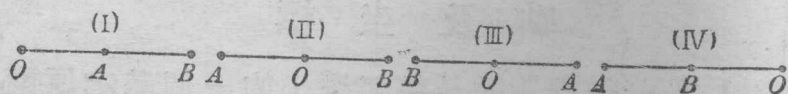
凡一直綫,已確定了方向的,便叫做方向綫(Directed line)。如 AB 綫,從 A 到 B 是正向,則以符號 $\overrightarrow{AB}$ 或 AB 表之。若寫成 BA ,就表示其長與 $\overrightarrow{AB}$ 等,而方向相反,

所以 $BA = -AB$.

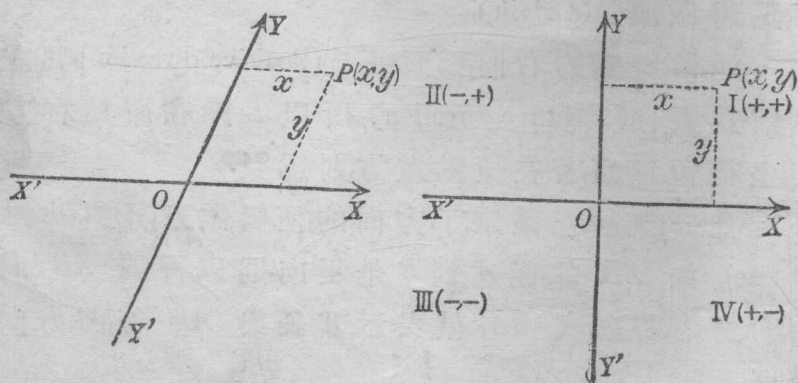
在一方向綫上,取一點 O 做原點,則其他任何兩點 A, B 間的距離,總有下面的關係:

$$AB = OB - OA.$$

讀者試就下列種種情形分別驗之:



2. 點之坐標 上節僅述 P 點在一直綫上.若 P 點在一平面內,要決定他的位置,須取相交兩方向綫做軸(Axes),如 $X'X$ 與 $Y'Y$ 相交於 O ,然後作過 P 點與此兩軸平行的直綫,如下圖,自 P 點至其與二軸交點距離,叫做 P 點的坐標(Coördinates),方向綫 $X'X$ 與 $Y'Y$ 叫做坐標軸, O 點叫做原點.



P 點與 x 軸平行的坐標,叫做橫坐標(Abscissas);同 y 軸平行的坐標,叫做縱坐標(Ordinates). P 點的坐標量,常書爲 $P(x, y)$,在前的文字常代橫坐標,在後的文字常代縱坐標.

兩坐標軸的交角,本無一定,通常分做兩種:(1)兩坐標軸不垂直時,叫斜坐標(Oblique coördinates);(2)兩坐標軸相垂直,便叫正坐標(Rectangular coördinates).

正坐標的運算,較簡於斜坐標,解析幾何上的討論,凡未指明斜坐標時,均指正坐標.

兩軸相交,將平面分而爲四,其每部分,稱爲象限(Quadrant).依反鐘向的次序,名爲 I, II, III, IV 四象限,看上頁右圖.

以原點爲標準,再按方向的正負,則第一象限的縱橫坐標皆爲正;第二象限的縱坐標爲正,橫的爲負;第三象限的縱橫坐標皆爲負;第四象限縱的爲負,橫的爲正.讀者學三角時當知道了.

3. 兩點的距離公式 定理 任意兩點 $P_1(x_1, y_1)$ $P_2(x_2, y_2)$ 間的距離公式爲

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (1)$$

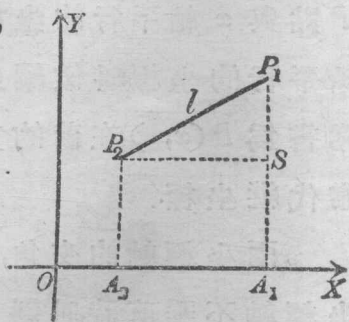
證 作 P_1, P_2 的縱坐標，
再作 $P_2S \parallel x$ 軸，得直角三角形
 P_1P_2S 。

$$P_1S = y_1 - y_2$$

$$P_2S = x_1 - x_2$$

$$P_1P_2 = \sqrt{P_1S^2 + P_2S^2}$$

$$\therefore l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



如果 P_1, P_2 在不同的象限內，也可依同法證明。

例 題

求 $P_1(4, 5), P_2(-4, -2)$ 間

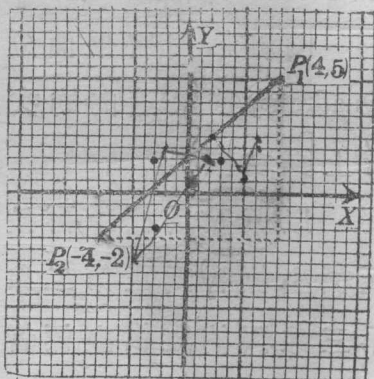
的距離。

解 已知 $x_1 = 4, x_2 = -4,$

$$y_1 = 5, y_2 = -2.$$

$$\therefore l = \sqrt{(4+4)^2 + (5+2)^2}$$

$$= 10.6.$$



習 題 一

1. 作以下各點：(0, 2), (3, -1), (4, 7), (-3, 6), (-4, 3), (-5, -8), (1, -7), (-9, 11), (9, 0).

2. 作下面的三角形：

(a) $(2,3), (-2,5), (-5,-7)$.

(b) $(-1,8), (-3,-4), (6,5)$.

(c) $(-7,-4), (0,3), (5,-7)$.

3. 求下列兩點間的距離:

(a) $(1,3), (-5,-7)$.

(c) $(5,8), (0,-3)$.

(b) $(2,-3), (-3,2)$.

(d) $(-1,-2), (3,4)$.

4. 求一個動點的軌跡: (a) 其橫坐標恆為 5. (b) 其縱坐標恆為 7. (c) 其縱橫兩坐標相等. (d) 其縱橫兩坐標同值異號.

5. 求 2 題中各三角形的周圍.

6. 已知下列兩點間的距離, 求 x 或 y .

(a) $P_1(0, 1), P_2(x, 6)$.

$l=10. = \sqrt{(0-x)^2 + (1-6)^2}$

(b) $P_1(-3, 5), P_2(x, -6)$.

$l=16. = \sqrt{x^2 + 25} \quad 100 = x^2$

(c) $P_1(1, y), P_2(2, 3)$.

$l=20.$

(d) $P_1(+15, -4), P_2(4, y)$.

$l=5.$

(e) $P_1(6, 5), P_2(0, y)$.

$l=11.$

7. 證明下面的三角形是等腰三角形.

(a) $(2, 4), (5, 1), (6, 5)$.

(b) $(2, 6), (6, 2), (-3, -3)$.

8. 證明 $(3, 3), (-3, -3), (3\sqrt{3}, -3\sqrt{3})$ 是三等邊三角形.

9. 證明 $(3, 4), (2, 1+\sqrt{12}), (4, 3)$ 三點, 在同一圓周上, 圓心是 $(1, 1)$.

10. 有等邊三角形, 每邊長 8 寸, 底邊在 x 軸上, 以原點為中點. 求頂點的坐標.

11. 有正方形,每邊長 6 寸,對角綫在坐標軸上,求四個頂點的坐標.

12. 設 $(0, 0)$, $(0, a)$, (b, c) 是一個平行四邊形的三頂點,求第四個頂點的坐標.

13. 假如坐標軸的交角是 θ , 證明 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 兩點間的距離公式是

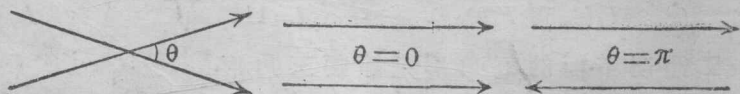
$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)\cos\theta}.$$

14. 假如 P_1, P_2 兩點的縱坐標相等,證明 P_1, P_2 的長,等於他們的橫坐標之差,即

$$d = x_1 - x_2. \quad (1)$$

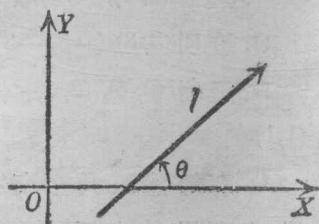
讀者分三種情形,說明(1)式都合用.

4. 斜度 兩方向綫的交角,是指其兩正向間的交角.若兩綫同向且平行,則交角爲零;若是異向而平行,則交角爲 π .



取一直綫向上的方向爲正,他的斜度(Slope)是說他與 x 軸所成交角的正切.例如直綫 l 與 x 軸的交角爲 θ , 那麼 l 的斜度就是 $\tan\theta$. 通常用 m 來表示,就是

$$m = \tan\theta.$$



定理 經過 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 的直線斜度是

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}. \quad (II)$$

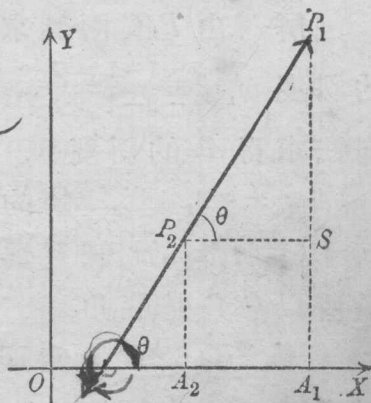
證 作 P_2S 與 x 軸平
行,

則 $\angle P_1P_2S = \theta$,

$$P_1S = y_1 - y_2,$$

$$P_2S = x_1 - x_2,$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{P_1S}{P_2S} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$



5. 定理 (a) 平行兩直線的斜度必相等, (b) 正交兩直線的斜度互為負逆數.

證 (a) 兩直線既然相平行, 所以與 x 軸做成等交角, 因而正切亦相等, 即

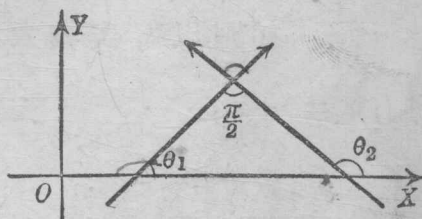
$$m_1 = m_2.$$

(b) 若兩綫相垂直,

$$\text{則 } \tan \theta_2 = \tan \left(\frac{\pi}{2} + \theta_1 \right),$$

$$= -\cot \theta_1 = -\frac{1}{\tan \theta_1},$$

$$\text{即 } m_2 = -\frac{1}{m_1}.$$



例題

求證 $A(3, 4) B(-2, -1) C(4, 1)$ 是直角三角形。

解 由 B, C 兩點求得 BC

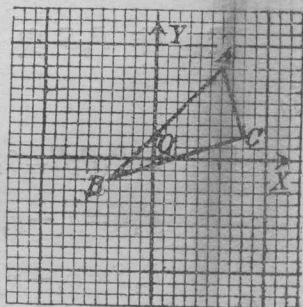
的斜度 $m_1 = \frac{-1-1}{-2-4} = \frac{1}{3}$ 。

同法求得 AC 的斜度

$m_2 = -3$, AB 的斜度

$m_3 = 1$. m_1, m_2 既互為負逆

數, 所以 C 角是直角。



6. 交角公式 定理 設 m_1, m_2 為兩方向綫的斜度, 而以 m_1 為斜度的角大於以 m_2 為斜度的角, 此兩直綫的交角為 θ , 則

$$\tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}. \quad (III)$$

證 如圖, 以 α_1 表較大之角,

總有 $\alpha_1 = \theta + \alpha_2$,

$$\therefore \theta = \alpha_1 - \alpha_2.$$

$$\therefore \tan \theta = \tan(\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$= \frac{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2}{1 + \tan \alpha_1 \tan \alpha_2}.$$

