排列组合
概率论及其应用

上册

赵人杰 编

中国人民解放军洛阳外国语学院

1980

上 册 目 录

第一部分 排列与组合

第五章　分组问题、分配问题和环状排列

第六章　母函数

阶段考(二)

第七章. 递归序列

第八章. 图论、

总课时. 207. ([illegible])

第一章　排列、组合概念和基本定理

恩格斯在《反杜林论》中指出："纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系，所以是非常现实的材料。这些材料以极度抽象的形式出现，这只能在表面上掩盖它起源于外部世界的事实"。排列与组合的概念同其它数学概念一样，也是从现实世界中抽象出来的。

举几个例子：

1．抽样。在工农业生产中，常用抽样的方法检验产品的质量。如果从一批20个产品中抽出3个做样品，那么有多少种可能的抽法呢？

2．选择。例如一个车站有5股铁路线，要选择3股来停放三列火车，有多少种可能的选择方法呢？

3．编码。例如用0—9这十个数码来编制四位电报号码，一共可以编制多少组？如果只用0，1两个数码来编制五位电报号码，一共可以编制多少组？

4．置换。例如1，2，3，4四个数码，每个数码都用它们之中的某个数码来替换，称为一个置换。如置换$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$表示1换成2，2换成3，3换成4，4换成1；又如置换$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}$表示1仍换成1，2仍换成2，

3 换成 4， 4 换成 3，等等。像这样四个数码的置换，总共有多少呢？

上述这些例子，都是生产中、工作中的实际问题，而这些问题的解决都归结为排列、组合问题。本章将通过一些最简单的例子引入排列、组合概念，并给出研究排列组合问题的两个基本定理——加法定理和乘法定理。

§1. 排列与组合的概念

例 1．从 1， 2， 3 三个数码中，每次取出两个不同的数码，有多少种可能的选取方法？

选取 1， 2 两个数码，这是一种选法；若选取 1， 3，又是一种选法；选取 2， 3，也是一种选法。所以一共有以下 3 种选法：

12　　　　13　　　　23

例 2．从 1， 2， 3 三个数码中，每次取出两个不同的数码排列起来，可以组成多少个两位数？

若选取 1， 2 两个数码，按不同次序排列，可以组成12和21两个二位数；若选取 1， 3 或 2， 3，也是一样。所以，一共可以组成以下 6 个两位数：

12　　　　13　　　　23

21　　　　31　　　　32

例 3．某班要从甲、乙、丙三名战士中挑选两名去当炊事员，可以有多少种挑选方案？

和例 1 相仿，可以有以下 3 种挑选方案：

甲乙　　　　甲丙　　　　乙丙

例 4．某班要从甲、乙、丙三名战士中挑选两名担任

正、付班长，可以有多少种考虑方案？

本例和例 3 的不同之处是：挑选出两名战士之后，还要考虑不同的分工。若从左到右分别代表正、付班长，我们可以有以下 6 种考虑方案：

甲乙	甲丙	乙丙
乙甲	丙甲	丙乙

为了便于叙述，我们把构成排列、组合的那些东西（如数码、字母、人、物等等）统称为元素。

以上四个例子都是考虑从一些元素中选取若干个，有多少种可能的方法、方案、情况等。所不同的是：例 1、例 3 只考虑选出的元素是哪些，并不要求考虑元素之间的排列顺序；而例 2、例 4 则不仅考虑元素，而且要考虑元素之间的顺序。前一类问题叫做组合问题，后一类问题叫做排列问题。

定义 1：从 n 个不同的元素中，每次选出 r 个不同的元素作为一组（不管组内元素的排列顺序），称为一个组合。无序

定义 2．从 n 个不同的元素中，每次选出 r 个不同的元素，并按种种不同的顺序排列起来，这样所得到的每一列称为一个排列。有序选出

K

下面，我们再举一个例子，并且着重说明什么叫同一个组合，什么叫不同的组合；什么叫同一个排列，什么叫不同的排列。

例 5．从 a，b，c，d 4 个字母中每次选出 3 个字母的组合有以下 4 个：有序

$a\ b\ c \qquad a\ b\ d \qquad a\ c\ d \qquad b\ c\ d$

从 a，b，c，d 4 个字母中每次选出 3 个字母的排列

有以下24个：

$a\ b\ c$	$a\ b\ d$	$a\ c\ d$	$b\ c\ d$
$a\ c\ b$	$a\ d\ b$	$a\ d\ c$	$b\ d\ c$
$b\ a\ c$	$b\ a\ d$	$c\ a\ d$	$c\ b\ d$
$b\ c\ a$	$b\ d\ a$	$c\ d\ a$	$c\ d\ b$
$c\ a\ b$	$d\ a\ b$	$d\ a\ c$	$d\ b\ c$
$c\ b\ a$	$d\ b\ a$	$d\ c\ a$	$d\ c\ b$

我们来看字母组$a\ b\ c$和$a\ b\ c$，组成这两个字母组的元素完全相同，而且元素的排列顺序也相同，所以它们是同一个组合，也是同一个排列；再看$a\ b\ c$和$a\ c\ b$，元素相同，但是排列的顺序不同，所以是同一个组合，却是两个不同的排列；$a\ b\ c$和$a\ b\ d$，元素不全相同，所以是两个不同的组合，当然也是两个不同排列。

总之，组合只考虑一个因素——元素，只要元素相同，就算作同一个组合；排列则要考虑两个因素——元素、顺序，必须元素相同，排列顺序也相同，才算作同一个排列。

习　　题

1．区别下列问题，哪些是排列问题，哪些是组合问题。

（1）从红，黄，兰三种颜料中任意选取等量的两种，配成新颜色，可以配出几种不同的新颜色？

（2）从红，黄，兰三面旗子中任意取出两面，分执左右手作为信号，可以表示多少种不同的信号？

（3）从a，b，c，d，e五本不同的书借阅其中三本，可以有多少种挑选法？

（4）从1，2，3，4，5五股铁路线中挑选三股，停放一列客车、一列货车、一列空车，有多少种停放方案？

2．指出下列各组数码，哪些是相同的排列，哪些是相同的组合：

1234	1235	5413	5423
5321	5413	4132	1354

§2．用列举法计算排列数与组合数

排列组合的一个基本问题是计数，就是要研究一些元素按照一定条件进行安排或处理，总共有多少种可能的处理方法，有多少种可供考虑的方案，有多少种可能出现的情况，等等。

在某些比较简单的情况下，可以用列举的方法计数，即把符合条件的排列或组合一个一个地全部列举出来，然后统计其个数。在列举的时候，当然要设法遵循某种规则，以保证既不遗漏，也不重复（每个排列或组合计算一次，且仅计算一次）。这里举几个例子：

例1．写出从1，2，3，4四个数码中每次取两个的全部排列。

先写出以“1”为首的全部排列，再写出以“2”为首的全部排列，…按这个规则写下去，就得到全部排列：

12	13	14
21	23	24
31	32	34
41	42	43

共12个。

例2．写出从1，2，3，4四个数码中每次取三个的全部排列。

仿照上题，可以写出全部排列：

123	124	132	134	142	143
213	214	231	234	241	243
312	314	321	324	341	342
412	413	421	423	431	432

共24个。

例3．写出从1，2，3，4四个数码中每次取两个的全部组合。

因为每个组合内部不管元素次序，按任何顺序写都是一样，为了避免重复，我们可以一律按自然序（即从小到大）来写。先写出全部从1开头的组合，再写出全部从2开头的组合，…按这个规则写下去，就可以不重不漏地写出全部组合：

12　13　14　23　24　34

共6个。

例4．写出从1，2，3，4四个数码中每次取三个的全部组合。

仿照上题，可以写出全部组合：

123　124　134　234

共4个。

很明显，在稍为复杂一些的情况下，列举是比较困难的，因此需要研究一些一般的理论和方法，推导一些重要的计数公式。但是，尽管有了这些公式，仍然不能完全代替列举。学会按照某些给定的条件进行列举，是排列组合的一项

基本训练，也是检验某种解题思路是否正确的一个重要手段。

习　　题

1．写出从1，2，3，4，5五个数码中每次取两个的全部组合和全部排列。

2．写出1，2，3，4，5五个数码每次取三个的全部排列。

3．写出1，2，3，4，5五个数码每次取三个的全部组合。

4．写出1，2，3，4，5，6六个数码每次取三个的全部组合。

5．写出从a，b，c，d四个字母中每次全取的全部组合和全部排列。

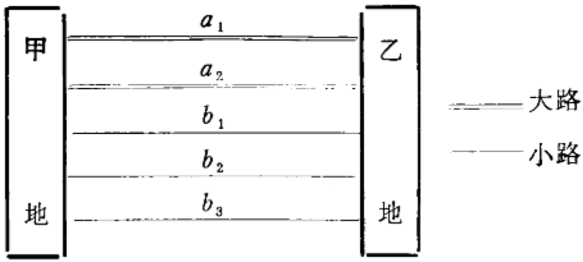
6．从a，b，c，d，e五个字母中每次取一个字母的组合和排列各有多少？列举之。

7．由洪、元、方三个字组成的姓名共有多少个？列举之。

§3．加法定理与乘法定理

研究排列、组合的计数问题，常常用到两个基本定理——加法定理和乘法定理。

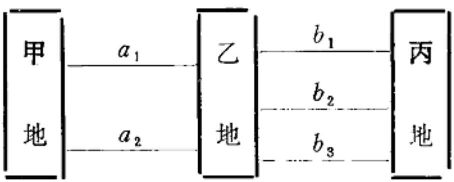
例1．从甲地到乙地，有大路2条、小路3条，有人要从甲地到乙地，有多少种走法？



分析：全部走法可以分为两类，一类是走大路，有2种走法：a_1，a_2；一类是走小路，有3种走法：b_1，b_2，b_3；这两类走法互相没有公共部分，叫互不重叠，所以全部走法有$2+3=5$种。即

$$a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ b_3$$

例2．从甲地到乙地，有2条路，从乙地到丙地有3条路，有人要从甲地经乙地到丙地，可以有多少种走法？



分析：从甲地（经乙地）到丙地这件事，可以分两步来完成。第一步从甲地到乙地有2种走法：a_1，a_2；而不论选择哪一种走法到乙地，第二步从乙地到丙地都有3种走法：b_1，b_2，b_3；搭配起来，从甲地到丙地可以有$2\times3=6$种走法。即

$$a_1b_1,\quad a_1b_2,\quad a_1b_3,$$
$$a_2b_1,\quad a_2b_2,\quad a_2b_3$$

由此，可得以下基本定理：

定理 1（加法定理）：如果处理一件事有若干种方法，这些方法可以分为 r 类，第一类有 m_1 种方法，第二类有 m_2 种方法，……，第 r 类有 m_r 种方法，并且这 r 类两两互不重叠，那么处理这件事总共有 $m_1+m_2+\cdots\cdots+m_r$ 种方法。

这个定理也叫“分类相加原理”。定理要求分类时各类之间两两互不重叠，也就是其中任何两类都没有公共部分。

定理 2（乘法定理）：如果某件事可以依次分 r 步来完成，第一步有 m_1 种方法，不论选择其中哪一种方法，第二步都有 m_2 种方法，依次类推，……，最后第 r 步有 m_r 种方法，那么搭配起来，完成整个事情有 $m_1m_2\cdots m_r$ 种方法。

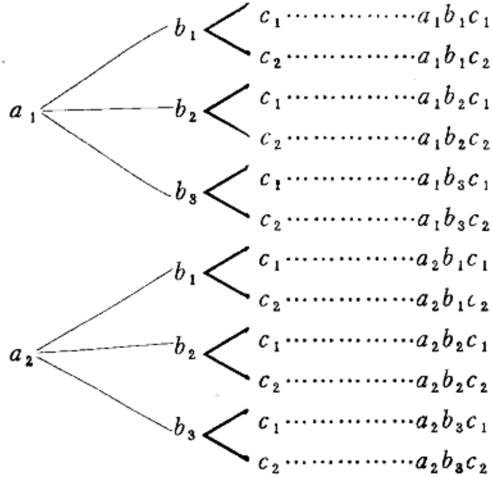
这个定理也叫“搭配相乘原理”。下面再举一个例子来说明这个原理：

例 3．书架上有 2 本不同的英文书、3 本不同的俄文书、2 本不同的日文书，一个学员要选取英文、俄文、日文书各一本，共有多少种选法？

英		俄			日	
a_1	a_2	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2

分析：“选取英、俄、日文书各一本”这件事可以分为 3 步，第一步从书架上选一本英文书，有 a_1，a_2 2 种方法；第二步选一本俄文书，有 b_1，b_2，b_3 3 种方法；第三步再选一本日文书，有 c_1，c_2 2 种方法。依次完成这 3 步，就完成了所要做的事情。依据定理 2，共有 $2\times3\times2=12$ 种不同的选法。这种搭配相乘的原理可用下图来说明：

第一步 2 种选法	第二步 3 种选法	第三步 2 种选法	总　　共 $2\times3\times2=12$种选法



这个图叫做“树图”，它的形状好像一棵躺倒的树。如果分的步骤更多，这棵“树”还可以继续向右展开。

对于加法定理和乘法定理的含义及其区别，必须细心领会，防止混淆。特别要注意这样一点：乘法定理中所说的完成整个事情的一种方法是怎样构成的？它是由完成每一步的一种方法按顺序搭配而成的。因此，这里就不是简单的相加关系，而是相乘的关系了。

习　　题

1．从北京到上海一天内有 2 次班机、3 次火车，某同志要从北京到上海，一天内有多少种走法？

2．从北京到南京有 2 种交通工具：飞机、火车；从南

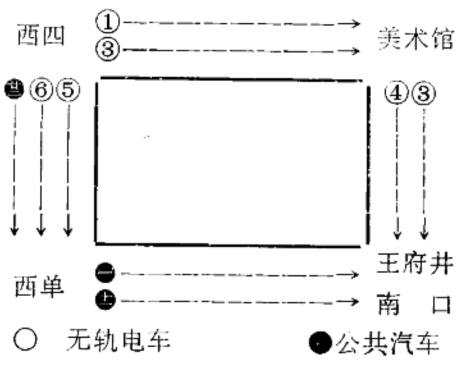
京到上海有3种交通工具：飞机、火车、轮船；某同志要从北京经南京到上海，可以有多少种旅行方法？

3．童装店有不同颜色的3种帽子、4种上衣、2种裤子，选购一套童装有多少种不同的选法？

4．从1，3，5，7，9五个奇数码中任取一个做十位数字，再从0，2，4，6，8五个偶数码中任取一个做个位数字，可以写出多少个不同的两位数？

5．$(a+b)(m+n+l)(p+q+r)$ 的乘积展开式中一共有多少项？试画出树图，并写出所有这些项。

6．按以下示意图，从北京西四到王府井南口，乘公共汽车或无轨电车，共有几种走法？



第二章　几种基本的排列、组合问题

§ 1. 从 n 个相异元素中每次取 r 个的排列数

例 1. 用 1，2，3，4 这四个数码，可以写出多少个数码不重复的两位数？

分析：两位数由十位数码和个位数码组成，所谓数码不重复的两位数，就是要求这两个数码是不同的，例如 13，41，…等。像11，22，…等叫做数码重复的两位数。

这个例子实际上就是从 1，2，3，4 这四个不同元素中，每次取两个不同的元素进行排列，求这种排列共有多少。

我们把"写出一个两位数"这件事分做两步，第一步选取一个数码作十位数码；第二步再选取一个数码作个位数码。第一步有 4 种方法（1，2，3，4 任选一个）；不论选定哪一个，第二步只有 3 种方法，因为已经选为十位数码的，不能再选为个位数码了。依据乘法定理，依次完成这两步，共有 $4 \times 3 = 12$ 种方法，也就是说，可以写出12个数码不重的两位数。（如下图所示）

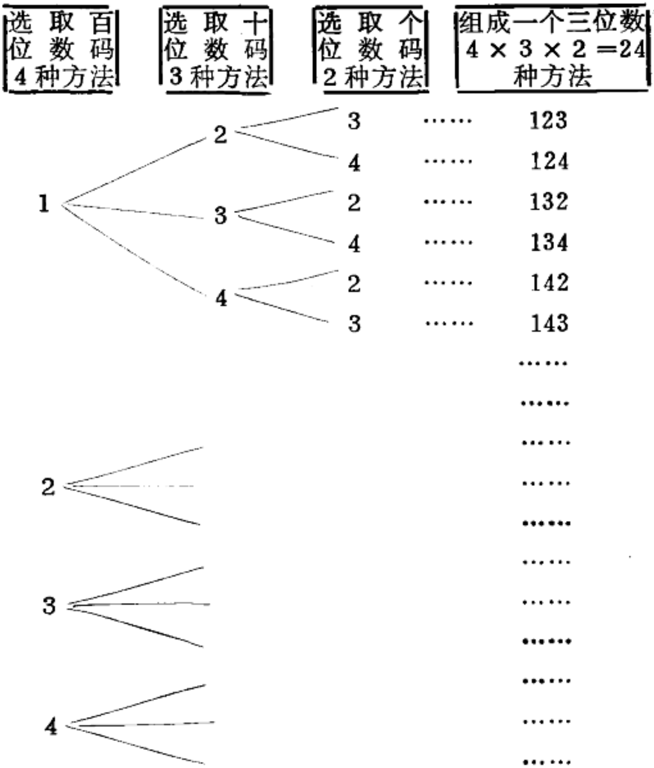
记号：A_n^r，$P(n,r)$，${}_nP_r$，$(n)_r$

n个元素
完全相异 — 不许重复选取 / 可以重复
不尽相异 — 全取 / 选取

选取十位数码 4种方法	选取个位数码 3种方法		组成一个两位数 4×3＝12种方法
1	2	……	12
	3	……	13
	4	……	14
2	1	……	21
	3	……	23
	4	……	24
3	1	……	31
	2	……	32
	4	……	34
4	1	……	41
	2	……	42
	3	……	43

例2．用1，2，3，4四个数码，可以写出多少个数码不重复的三位数？

分析：数码不重复的三位数，就是组成三位数的三个数码都不相同。仿照例1，我们把“写出一个三位数”分做三步，第一步选取一个百位数码，第二步选取一个十位数码，第三步再选取一个个位数码。完成第一步、第二步分别有4种和3种方法，完成第三步只有2种方法，因为已经选为百位、十位数码的，不允许再选作个位数码。依据乘法定理，依次完成这三步共有 $4\times3\times2=24$ 种方法。也就是可以写出24个数码不重复的三位数。



从 n 个相异元素中，每次取 r 个（不重复）的排列数，我们用记号 A_n^r 来表示。例如，例 1 中的排列数可以写作：

$A_4^2=12$，例 2 中的排列数可以写作：$A_4^3=24$。

为了叙述的简明，我们约定：如果没有特别的说明，我们说“从 n 个元素中每次取 r 个的排列”即指从 n 个相异元