高等职业教育“十一五”精品课程规划教材

经济数学

主　编　节存来

总主编　赵益坤

副主编　白瑞云

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

高等职业教育“十一五”精品课程规划教材

经济数学

主　编　节存来
总主编　赵益坤
副主编　白瑞云

北京邮电大学出版社
·北　京·

内 容 提 要

本教材根据教育部《高职高专教育专业人才培养目标及规格》和《高职高专教育数学课程教学基本要求》,充分汲取近年来高职高专院校数学课程教改经验,特别是我院高等数学精品课程建设的成功经验和成果编写而成.

本教材切实贯彻了"以应用为目的,以必需、够用为度"的原则,力求体现基础性、实用性、发展性三方面的和谐统一.内容包括:函数的极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、行列式、矩阵与线性方程组、随机事件与概率、随机变量及其分布、数理统计简介共十章.书后附有数学软件 MATLAB 应用简介、数学建模简介及其他附录、附表、全部习题参考答案.

全书内容分模块、分层次编排.语言简洁流畅、条理清楚、深入浅出、通俗易懂,例题、习题难易适度,适用于高职高专院校、成人高校和民办高校经济类和管理类各专业.

图书在版编目(CIP)数据

经济数学/赵益坤,节存来主编.—北京:北京邮电大学出版社,2009

ISBN 978-7-5635-2053-4

Ⅰ.经… Ⅱ.①赵…②节… Ⅲ.经济数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 118504 号

书　　名:经济数学
总 主 编:赵益坤
主　　编:节存来
副 主 编:白瑞云
责任编辑:陈　瑶
出版发行:北京邮电大学出版社
社　　址:北京市海淀区西土城路 10 号(邮编:100876)
发 行 部:电话:010-62282185　传真:010-62283578
E-mail:publish@bupt.edu.cn
经　　销:各地新华书店
印　　刷:北京源海印刷有限责任公司
开　　本:787 mm×960 mm　1/16
印　　张:20
字　　数:436 千字
印　　数:1—3 000 册
版　　次:2009 年 7 月第 1 版　2009 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-2053-4　　定　价:34.00 元

· 如有印装质量问题,请与北京邮电大学出版社发行部联系 ·

前 言

本教材根据教育部制定的《高职高专教育专业人才培养目标及规格》和《高职高专教育数学课程教学基本要求》编写. 编写过程中以先进的教育理念为指导,紧密结合高职高专高等数学教学现状、特点及职业教育的特色,在继承原有教材建设成果的基础上,充分汲取近年来经济数学课程教学改革经验,特别是我院高等数学精品课程建设的成功经验和成果,其中也凝结了作者多年来讲授《经济数学》课程的经验和体会. 切实贯彻了"以应用为目的,以必需、够用为度"的原则,突出了重能力、重应用、重素质、求创新的总体思路.

本教材具有以下特点.

1. 书中融入了数学发展简史和数学文化教育;在重要概念引入之前,深刻、简明地阐述了其产生的背景及应用的总体思路,使学生认识到数学与人类生活的密切联系及对人类发展的作用,体验数学活动充满着探索与创造,以激发学生的求知欲和学习积极性.

2.《经济数学》是高职高专经济类、管理类各专业的一门重要的基础课. 本书内容涵盖了一元微积分、常微分方程、线性代数、概率与数理统计等四门课程的基础知识和基本内容,其主要目的是培养学生的基本数学能力(运算能力、逻辑思维能力、抽象概括能力、将实际问题转化为数学问题的能力)以及创新思维,为进一步学习打好数学基础.

3. 对重要的知识点以实例引入,从学生熟悉的问题入手,力求朴实、简明和自然. 淡化了数学理论的推导和证明,代之以思想方法的介绍和直观的几何说明,力求形象化、直观化、通俗化;难易程度更适合目前的生源状况.

4. 附录中编入了"MATLAB 应用简介"、"数学建模简介",以加强学生"学数学、用数学"的教育,培养学生运用数学思想和方法以及所学知识建立数学模型,解决实际问题的能力,提高学生结合计算机及数学软件包求解数学模型的能力. 同时体现了教材的先进性.

5. 鉴于经济数学的学习需要用到较多的代数、三角、几何等初等数学知识,书后附有初等数学常用公式,供学生学习时查用.

6. 书中例题、习题经过了精心编选与设计,理论联系实际,选题新颖、题型全面、难易适度. 书后附全部习题的参考答案,供师生参考. 每章末编有颇具特色的小结,不仅使重点知识条理化、系统化,便于学习和掌握,还会使学生受到启发而有新的收获.

7. 鉴于目前高职高专数学课程授课时数减少的现状,本教材精选了内容,压缩了授

课时数.全书简洁流畅、条理清楚、深入浅出、循序渐进、通俗易懂并富有启发性，便于教和学.

8. 全书内容分模块、分层次编排.力求体现基础性、实用性、发展性三方面的和谐统一.一元函数微积分为基础模块，其余各模块为应用模块，供不同专业选用.

教学建议课时分配如下.

序 号	模块内容	课时分配
1	函数的极限与连续	12～14
2	导数与微分	12
3	导数的应用	10
4	不定积分	10～12
5	定积分	12
6	行列式	4～6
7	矩阵与线性方程组	12～14
8	随机事件与概率	10～12
9	随机变量及其分布	10
10	数理统计简介	8
合计总学时		100～110
备 注	1. 习题课另加课时. 2. 数学实验“MATLAB应用”与“数学建模”为选学内容，另加学时.	

由于本书分层次编排，既照顾到了数学基础较差的学生，不会使学生因为数学基础的不足而产生畏难情绪，也照顾到了希望继续深造的学生.因此，适合各类高职高专院校、成人高校和民办高校经济类、管理类各专业师生使用，且使用方便.

本套教材分为《高等数学》和《经济数学》两册，由河北工业职业技术学院赵益坤教授任总主编.

《经济数学》一书由节存来任主编，白瑞云任副主编.参加编写的还有宋从芝、侯静、赵彩虹、马凤敏、王书田、强琴英、王力加、田慧竹、赵会引、李娟、刘卫卫.

由于水平有限，书中难免会出现缺点和错漏，敬请读者多提宝贵意见.

编 者

目　　录

第 1 章　函数的极限与连续

1.1　函数 …… 1

1.1.1　函数概念 …… 1

1.1.2　函数的几种特性 …… 4

1.1.3　反函数 …… 5

1.1.4　复合函数与初等函数 …… 6

1.1.5　常用经济函数 …… 10

1.2　极限的概念 …… 13

1.2.1　数列的极限 …… 13

1.2.2　当 $x \to \infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限 …… 15

1.2.3　当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限 …… 16

1.3　无穷小量与无穷大量 …… 18

1.3.1　无穷小量 …… 18

1.3.2　无穷大量 …… 19

1.3.3　无穷小量阶的比较 …… 20

1.4　极限的四则运算 …… 20

1.4.1　极限的四则运算 …… 21

1.4.2　两个重要极限 …… 23

1.4.3　连续复利公式 …… 25

1.5　函数的连续性 …… 25

1.5.1　连续函数的概念 …… 25

1.5.2　初等函数的连续性 …… 27

1.5.3　闭区间上连续函数的性质 …… 28

本章小结 …… 29

复习题 …… 31

第 2 章 导数与微分

2.1 导数的概念…… 36
2.1.1 导数的背景…… 36
2.1.2 导数的定义…… 37
2.1.3 导数的几何意义…… 39
2.1.4 可导与连续的关系…… 40
2.2 导数的运算法则…… 41
2.2.1 导数的四则运算法则…… 41
2.2.2 复合函数求导法则…… 43
2.3 隐函数的导数 高阶导数…… 44
2.3.1 隐函数的导数…… 44
2.3.2 反三角函数的导数…… 46
2.3.3 对数求导法…… 46
2.3.4 高阶导数…… 48
2.4 函数的微分…… 49
2.4.1 微分的概念…… 49
2.4.2 微分的几何意义…… 51
2.4.3 微分的运算法则…… 51
本章小结 …… 53
复习题 …… 55

第 3 章 导数的应用

3.1 洛必达法则…… 58
3.1.1 $\frac{0}{0}$与$\frac{\infty}{\infty}$型的未定式 …… 58
3.1.2 $0\cdot\infty$与$\infty-\infty$型的未定式 …… 60
3.1.3 使用洛必达法则的注意事项…… 60
3.2 拉格朗日中值定理与函数单调性…… 61
3.2.1 拉格朗日中值定理…… 61
3.2.2 函数单调性的判定…… 62
3.3 函数的极值与最值…… 63
3.3.1 函数的极值及其求法…… 63
3.3.2 函数最值的求法…… 65

3.4 函数图形的描绘…… 68
3.4.1 曲线的凹凸和拐点…… 68
3.4.2 曲线的渐近线…… 70
3.4.3 函数图形的描绘…… 70
3.5 导数在经济分析中的应用…… 72
3.5.1 边际分析…… 73
3.5.2 弹性分析…… 74
本章小结 …… 76
复习题 …… 78

第 4 章 不定积分

4.1 不定积分的概念…… 82
4.1.1 原函数…… 82
4.1.2 不定积分的定义…… 83
4.1.3 不定积分的性质…… 84
4.1.4 不定积分的基本公式…… 85
4.1.5 直接积分法…… 85
4.2 换元积分法…… 86
4.2.1 第一类换元积分法…… 86
4.2.2 第二类换元积分法…… 89
4.3 分部积分法…… 91
4.4 积分表的使用…… 93
4.5 常微分方程简介…… 95
4.5.1 常微分方程的基本概念…… 95
4.5.2 可分离变量的微分方程…… 96
4.5.3 一阶线性微分方程…… 97
本章小结 …… 98
复习题…… 100

第 5 章 定积分

5.1 定积分的概念 …… 104
5.1.1 定积分的背景 …… 104
5.1.2 定积分的定义 …… 105
5.1.3 定积分的几何意义 …… 106

5.1.4 定积分的性质 …… 107
5.2 微积分基本公式 …… 107
5.2.1 积分上限函数 …… 108
5.2.2 牛顿-莱布尼兹公式 …… 108
5.3 定积分的计算 …… 109
5.3.1 定积分的换元积分法 …… 109
5.3.2 定积分的分部积分法 …… 111
5.4 无限区间上的广义积分 …… 112
5.5 定积分的应用 …… 113
5.5.1 平面图形的面积 …… 113
5.5.2 经济应用问题举例 …… 115
5.5.3 函数的平均值 …… 116
本章小结 …… 117
复习题 …… 120

第6章 行列式

6.1 行列式的概念 …… 122
6.1.1 二阶行列式 …… 122
6.1.2 三阶行列式 …… 123
6.1.3 n阶行列式的定义 …… 125
6.2 行列式的计算 …… 127
6.2.1 行列式的性质 …… 127
6.2.2 行列式的计算方法 …… 129
6.3 克莱姆法则 …… 132
本章小结 …… 134
复习题 …… 136

第7章 矩阵与线性方程组

7.1 矩阵及其运算 …… 139
7.1.1 矩阵的概念 …… 139
7.1.2 矩阵的运算 …… 142
7.1.3 线性方程组的矩阵表示法 …… 147
7.2 矩阵的初等变换与矩阵的秩 …… 147
7.2.1 矩阵的初等变换 …… 147

7.2.2 矩阵的秩 …… 149
7.3 逆矩阵 …… 153
7.3.1 逆矩阵的定义 …… 153
7.3.2 可逆矩阵的判别与求法 …… 154
7.3.3 逆矩阵解线性方程组 …… 156
7.4 线性方程组 …… 156
7.4.1 同解线性方程组 …… 157
7.4.2 高斯消元法解线性方程组 …… 159
7.4.3 一般线性方程组解的讨论 …… 162
7.4.4 齐次线性方程组解的讨论 …… 164
本章小结 …… 165
复习题 …… 168

第 8 章 随机事件与概率

8.1 随机事件 …… 173
8.1.1 随机现象与随机事件 …… 173
8.1.2 事件的关系与运算 …… 175
8.2 事件的概率 …… 179
8.2.1 频率与概率 …… 179
8.2.2 古典概型 …… 180
8.2.3 概率的性质 …… 183
8.3 条件概率 …… 185
8.3.1 条件概率的概念 …… 185
8.3.2 乘法公式 …… 186
8.3.3 全概率公式 …… 188
8.4 事件的独立性 …… 190
8.4.1 事件独立的概念 …… 190
8.4.2 贝努利概型 …… 192
本章小结 …… 194
复习题 …… 197

第 9 章 随机变量及其分布

9.1 随机变量与离散型随机变量 …… 201
9.1.1 随机变量的概念 …… 201

9.1.2 离散型随机变量的分布列 …… 202
9.1.3 常用离散型随机变量的概率分布 …… 204
9.2 连续型随机变量的概率分布 …… 205
9.2.1 连续型随机变量的概率密度 …… 205
9.2.2 常用连续型随机变量的概率分布 …… 207
9.2.3 正态分布的概率计算 …… 209
9.3 数学期望 …… 212
9.3.1 离散型随机变量的数学期望 …… 212
9.3.2 连续型随机变量的数学期望 …… 214
9.3.3 数学期望的性质 …… 214
9.3.4 常用分布的数学期望 …… 215
9.4 方差 …… 216
9.4.1 方差的定义 …… 217
9.4.2 方差的性质 …… 218
9.4.3 常用分布的方差 …… 218
本章小结 …… 220
复习题 …… 222

第 10 章 数理统计简介

10.1 总体、样本与统计量 …… 226
10.1.1 总体和样本 …… 226
10.1.2 统计量和样本的数字特征 …… 227
10.1.3 常用统计量分布 …… 229
10.2 参数估计 …… 232
10.2.1 点估计 …… 232
10.2.2 区间估计 …… 235
10.3 一元线性回归 …… 240
10.3.1 一元线性回归的数学模型 …… 241
10.3.2 回归直线方程的建立 …… 241
10.3.3 回归直线方程的效果检验 …… 243
10.3.4 利用回归直线方程进行预测 …… 246
本章小结 …… 247
复习题 …… 249

附录 A　数学软件 MATLAB 应用简介 ········ 252
附录 B　数学建模简介 ········ 261
附录 C　简易积分表 ········ 271
附录 D　初等数学常用公式 ········ 280
附表 A　标准正态分布数值表 ········ 286
附表 B　χ^2 分布临界值表 ········ 287
附表 C　t 分布临界值表 ········ 290
附表 D　相关系数检验表 ········ 292
复习题参考答案 ········ 293

第 1 章　函数的极限与连续

函数是高等数学的主要研究对象，极限是微积分的理论基础，连续是函数的一个重要性态. 本章将在复习和加深函数有关知识的基础上讨论函数的极限和连续性等问题.

1.1 函　　数

17 世纪初，数学首先从对运动(如航海、天文等问题)的研究中引出了函数这个概念，从此这个概念在科学研究中占据了中心地位. 考虑到大家对函数概念以及一些常见的函数已经有了一定的了解，这里将用复习、总结和适当提高的形式来讲述.

1.1.1 函数概念

1. 函数的定义

定义 1-1 设在某个变化过程中有两个变量 x 和 y，如果当变量 x 在非空实数集 D 内取任何一个数值时，按照某个对应法则 f，变量 y 都有唯一确定的数值与它相对应，那么称变量 y 为变量 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$，$x\in D$. 其中 x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**，数集 D 叫做函数的**定义域**，与 x 的值相对应的 y 的值叫做**函数值**，当 x 取遍 D 中的一切数时，对应的函数值的全体组成的数集叫做函数的**值域**，记作 M，即 $M=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$.

说明：(1) 在同一问题中，为了区别不同的函数，可以把以 x 为自变量的函数表示为 $y=F(x)$，$y=\varphi(x)$，$y=y(x)$，$y=f_1(x)$等.

(2) 函数的定义域和对应法则是函数的两个要素，两个函数当它们的定义域和对应法则至少有一个不同时，这两个函数就是不同的. 例如，函数 $y=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ 与 $y=x+2$ 的定义域不同，它们是不同的函数；而函数 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 的定义域和对应法则都相同，它们是相同的函数.

2. 求函数定义域

在研究函数时，一定要考虑它的定义域.

对于用数学式子给出的函数，x 的取值必须使数学式子有意义. 为此要求：

(1) 分母不能为零；

(2) 偶次根号下非负；

(3) 对数的真数为正；

(4) 正切符号下的式子不等于 $k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$；余切符号下的式子不等于 $k\pi, k\in\mathbf{Z}$；

(5) 反正弦、反余弦符号下式子的绝对值小于等于 1.

【例 1-1】 求下列函数的定义域.

(1) $y=\frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$；　(2) $y=\ln(x^2-x-2)$；　(3) $y=\arcsin\frac{2x-1}{3}$.

解 (1) 在函数 $y=\frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$ 中，因为

$$\begin{cases}x+1\geqslant 0\\ x-2\neq 0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x\geqslant -1\\ x\neq 2\end{cases}$$

所以函数的定义域为 $[-1,2)\cup(2,+\infty]$.

(2) 在函数 $y=\ln(x^2-x-2)$ 中，因为

$$x^2-x-2>0$$

即

$$(x+1)(x-2)>0$$

解得

$$x<-1 \text{ 或 } x>2$$

所以函数的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.

(3) 在函数 $y=\arcsin\frac{2x-1}{3}$ 中，因为

$$-1\leqslant\frac{2x-1}{3}\leqslant 1$$

即

$$-2\leqslant 2x\leqslant 4$$

解得

$$-1\leqslant x\leqslant 2$$

所以函数的定义域为 $[-1,2]$.

对于由实际问题得到的函数，其定义域除了要考虑使函数表达式有意义以外，还要考虑到变量本身的实际意义，一般来说经济变量往往取正值.

3. 求函数值

在研究函数时，经常需要求函数值.

【例 1-2】 (1) 若 $f(x)=\frac{1}{2x+3}$，求 $f(-1), f(a), f\left(\frac{1}{x}\right)$；

(2) 若 $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$，求 $f(0), f(-2), f(a^2)$.

解 (1) $f(-1)=\dfrac{1}{2\times(-1)+3}=1, f(a)=\dfrac{1}{2a+3}, f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{2\cdot\dfrac{1}{x}+3}=\dfrac{x}{2+3x}$;

(2) $f(0)=\dfrac{|0-2|}{0+1}=2, f(-2)=\dfrac{|-2-2|}{-2+1}=-4, f(a^2)=\dfrac{|a^2-2|}{a^2+1}$.

4. 函数的常用表示方法

在讨论问题时，函数常常用解析法表示. 解析法就是用数学解析式表示函数的方法，也称为公式法. 例如，$y=\arcsin\sqrt{x-2}$.

用解析法表示函数时，一般用一个式子来表示，但有时用多个式子表示.

例如，$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$，$f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$，$f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$.

像这样，把定义域分成若干部分，在自变量的不同的取值部分用不同的式子来表示的函数，叫做**分段函数**.

分段函数是一个函数，其定义域是各段自变量取值的并集. 如分段函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

的定义域是$(-\infty,+\infty)$.

求分段函数的函数值时，应把自变量的值代入相应取值范围的表达式进行计算.

分段函数只是一个形式上的概念，即写成“分段”的形式，就是分段函数，否则就不是. 如 $y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 和 $y=\sqrt{x^2}$，前者是分段函数，而后者就不是，但二者是同一函数.

分段函数在一些实际问题中是常见的.

【例 1-3】 某化工厂现有某种产品 1 500 吨，每吨定价为 1 200 元，总销售量不超过 1 000 吨时，按原定价出售，超过 1 000 吨时，超过部分打 9 折出售，求销售总收入与总销售量的函数关系，指出定义域并求当销量为 1 100 吨时的销售收入.

解 设销售总收入为 y 元，销售总量为 x 吨，依题意可得

$$y=\begin{cases}1\,200x, & 0<x\leqslant 1\,000\\ 1\,200\times 1\,000+1\,200\times 0.9\times(x-1\,000), & 1\,000<x\leqslant 1\,500\end{cases}$$

其定义域为$(0,1\,500]$.

当销量为 1 100 吨时，销售收入为

$y=1\,200\times 1\,000+1\,200\times 0.9\times(1\,100-1\,000)=1\,308\,000$(元).

在一些实际问题中，函数还常用表格法表示.

例如，某农药厂 4 月份前半月每天生产杀虫剂的产量是用表格表示的(见表 1-1).

表 1-1 某农药厂 4 月份前半月产量表

日期 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
产量 y/吨	31	29	28	30	32	27	31	30	29	28	34	32	30	29	30

这就是用表格法表示的函数. 这里，产量 y 是生产日期 x 的函数，它的定义域是 $D=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$.

另外，函数也可以用图像法表示.

5. 显函数和隐函数

很多函数 y 可以用含有自变量 x 的明显的式子来表示，比如 $y=3x+2$，$y=\dfrac{1}{2x+3}$，$y=\sqrt{1-x^2}$ 等，这样的函数叫做**显函数**.

由 $y=3x+2$ 可得方程 $3x-y+2=0$，由 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，$y=\sqrt{1-x^2}$ 分别可得方程 $2xy+3y=0$ 和 $x^2+y^2=1$，所以，方程也可以确定自变量 x 和因变量 y 之间的函数关系，当然也就可以表示函数. 这种用方程形式表示的函数就称为**隐函数**.

例如，$2x+y^3-5=0$，$e^x-5^y+3xy=0$，$\cos(x+y)+e^{xy}=1$ 等都是隐函数. 有的隐函数可以容易地化成显函数，如 $2x+y^3-5=0$ 就可以化成 $y=\sqrt[3]{5-2x}$；而有的就比较困难，甚至是不可能的.

1.1.2 函数的几种特性

1. 函数的单调性

定义 1-2 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果对于 (a,b) 内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内**单调增加**，(a,b) 叫做函数 $f(x)$ 的**单调增加区间**；如果当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内**单调减少**，(a,b) 叫做函数 $f(x)$ 的**单调减少区间**. 在区间 (a,b) 内单调增加或单调减少的函数统称为区间 (a,b) 内的**单调函数**，区间 (a,b) 叫做函数的**单调区间**.

例如，函数 $y=2^x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加；函数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内单调减少.

单调增加函数的图像沿 x 轴正向而上升，单调减少函数的图像沿 x 轴正向而下降.

2. 函数的奇偶性

定义 1-3 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任一 $x\in D$，恒有 $f(-x)=$

$f(x)$,则称 $f(x)$ 为**偶函数**;如果对于任一 $x\in D$,恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

例如,函数 $y=x^2$,$y=\cos x$ 是偶函数,$y=\dfrac{1}{x}$,$y=\tan x$ 是**奇函数**.

偶函数的图像关于 y 轴对称;奇函数的图像关于原点对称.

说明:(1) 讨论函数的奇偶性的前提是函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称.

(2) 有的函数,如 $y=0$,既是奇函数又是偶函数.

【例 1-4】 判断函数 $f(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$ 的奇偶性.

解 因为 $f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$,而

$$f(-x)=\frac{a^{-x}-a^x}{2}=-f(x)$$

所以该函数是奇函数.

3. 函数的有界性

定义 1-4 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义,如果存在一个正数 M,使得对于任一 $x\in(a,b)$,都有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内**有界**.如果这样的 M 不存在,就称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内**无界**.

例如,函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的,函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的;而函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界,$y=\tan x$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内无界.

从几何上看,如果函数在 (a,b) 内有界,则其图像在 (a,b) 内必介于两条平行于 x 轴的直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间.

4. 函数的周期性

定义 1-5 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在一个正数 T,对于任一 $x\in D$,总有 $f(x+T)=f(x)$ 成立,则称 $f(x)$ 为**周期函数**.T 称为 $f(x)$ 的**周期**.若在周期函数的所有周期中存在一个最小正数 T,则该最小正数 T 称为周期函数的**最小正周期**.通常所说的周期函数的周期就是指最小正周期.

例如,我们说函数 $y=\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数,函数 $y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

周期函数图形的特点是自变量每增加或减少周期 T 后,图形重复出现.

说明:周期函数不一定有最小正周期.例如常函数 $y=c$ 是以任何正数 T 为周期的周期函数,显然它没有最小正周期.

1.1.3 反函数

设某种商品销售总收入为 y,销售量为 x,该商品的单价为 p,则销售收入 y 是 x 的函