



特级教师导学丛书 卢嘉锐题

● 孙维刚

# 高中数学

教育科学出版社

特级教师导学丛书

# 高中数学

孙维刚 编著

教育科学出版社

(京)新登字第111号

## 高中数学

孙维刚 编著

责任编辑 刘 进

---

教育科学出版社出版、发行 (北京·北太平庄·北三环中路46号)  
各地新华书店经销 衡水地区印刷厂印装

开本: 787×1092毫米 1/32 印张: 10.75 字数: 241千

1995年11月第5次印刷

印数: 51,501—61,500册

---

ISBN 7-5041-1169-4/G·1126

定价: 7.50元

## 前 言

努力提高全民族的思想道德和科学文化素质，是实现我国现代化的根本大计。因此，教育面临的基本任务是要面向现代化，面向世界，面向未来，为社会主义建设培养大批高素质的合格人才。要达到这个目的，在基础教育中，要充分发挥中小学特级教师的作用。自1978年邓小平同志在全国教育工作会议上提出“特别优秀的教师，可以定为特级教师”以来，全国共评出特级教师7000余人。

评出的特级教师忠于职守，甘于奉献，勤勤恳恳，起到了模范作用；勤于钻研，勇于创新，严谨治学，精益求精，起到了学术带头作用；通过讲示范课、观摩课、研究课等方式积极培养中青年教师，起到了指导示范作用；主动关心学校工作，为领导出谋划策，起到了参谋咨询作用，为我国的基础教育事业做出了贡献，赢得了人民的尊敬和爱戴，产生了很大的社会影响，对提高中小学教师地位起到了促进作用。人们赞扬特级教师是“师德的表率、育人的模范、教学的专家”。

特级教师教育教学的宝贵经验，对广大教师做好教育教学工作，促进学生生动活泼地发展，变被动的学习为生动活泼、积极主动的学习，都具有极其重要的作用。因此，我们在国家教委人事司、民族地区教育司的指导下，约请全国有影响的部分特级教师，从指导学生学习的角度，编写了《特级教师导学丛书》（共20册）。这套丛书既反映了特级教师导学艺术规律的共性，也体现了他们各自导学艺术的鲜明个

性，是每位作者长期教育经验的升华与结晶。

本套丛书的基本特点可以概括为以下三点：

1. 知识系统的全面性。丛书概括的中、小学各学科的主要内容，突出该学科的重点、难点、疑点与误区，把特级教师多年的教育经验和“绝招”落实到指导学科学习的关键环节上，举一反三，触类旁通，由浅入深，环环相扣。

2. 指导学习的实用性。丛书立足于学生升学与就业的实际需要，从知识点的分布、练习的配备，直到学习方法的指导，都有极强的针对性，渗透着作者教学的精华与经验的精髓。

3. 结构体系的科学性。丛书力求以最少的的时间求得最高的学习效率，让学生把握学科知识的系统与内在联系，配以科学的训练，使丛书内容的科学性与训练步骤的科学性达到完美的统一。

本丛书以促进学生掌握基本知识、基础理论和基本技能，培养学生分析问题和解决问题的能力为目的，融特级教师的教学经验和教学内容为一体，将以它鲜明的特色成为学生提高学习效率，教师提高教学水平不可多得的必备书。

这套丛书，与国家教委有关部门组织编写的特级教师教学经验方面的丛书配套使用，将会在促进教师提高教育教学水平、调动广大学生的学习积极性、科学地掌握学习方法方面，起到不可替代的作用。

## 序

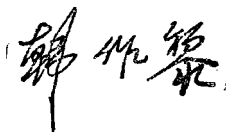
《特级教师导学丛书》，集特级教师宝贵的教学经验于一体，兼及各科，既深入教学实际，由点及面，广采博览，又深入浅出，囊括知识，由博返约，点拨疑难，指明思路，使学生从繁难的题海中解放出来，成为学习的主人。

教师的主要职责是使具有强烈求知欲，嗷嗷待哺的学生，从被动的学习转变为生动活泼积极主动的学习。这就需要开发学生的心智，激励学生学习的勇气，调动学生的智力因素和非智力因素，使个性不同的学生从不同的基础上、不同的知识点上、不同的悟性程度上奋勇进取，不断地发幽探微，豁然开朗。因而不仅要凭教师的宝贵经验，更需要教师的睿智眼光，从德、才、学、识的高度，适时地点燃学生学习思维活动的智慧火花。而特级教师所具有的导学“高招”和导学艺术往往是学生和青年教师所企盼的。

《特级教师导学丛书》正是一套体现特级教师导学艺术规律的共性，又显现每一位作者导学艺术鲜明个性的丛书。它面向全体学生，分为适宜小学、初中、高中学生使用的版本。它以国家教委教学大纲为依据，以培养学生学习能力，发展学生智力为宗旨，以高质量的习题为全书结构的中心，突出思维训练，讲知识，指思路，做练习，重点放在解题思路的分析上，使学生会学、会想，真正给学生解难释疑。在题目的设计，选择，安排上，贵新、贵精、贵巧，而不在多。总之，这是一套侧重平时学习的循序渐进，又兼及提高学习效率的导学丛书。它立足于使学生获得长期的学习效果，着眼于提高学生的人文科学和自然科学技术素质，培养动手实验能

力。面对升学、就业都会受益匪浅，永久难忘。

《特级教师导学丛书》给予学生求索知识的信心和勇气，教给学生科学的思维方法，更重要的是开启学生学习个性的心扉，培养学生优良的学习品质和严谨的科学的学风。让学生迈动欢快的脚步，在通向知识，通向理解，通向未来的道路上愉快地前进。只要他们成长为一个聪明的人，成长为对祖国和人民有用的人才，那就是教师的最大欣慰，也是特级教师把这套丛书作为礼物献给学生们的初衷。

A handwritten signature in black ink, appearing to read '韩作黎' (Han Zhen), written in a cursive style.

1993年2月

## 作者的话

“有谁能相信，北京二十二中今年毕业的高三（4）班，高考平均分达534分，全班40人中，有15人被清华大学、北京大学录取。”

这是《北京日报》1992年9月8日一篇报道“润物细无声（记北京市特级教师孙维刚）”的第一自然段。

北京二十二中是一所非重点中学，面对学生来源并不十分理想的现实，从1980年起，我在各级领导和朋友们的帮助下，进行了六年一循环的数学教学改革实验。从初一接班，教数学兼班主任，直到学生高三毕业。上述这个高三（4）班，是1986年秋初一入学的第二轮实验班，当年入学成绩排东城区第8位（小学升中学，是按区考试）。

三年后，在1989年全国初中数学联赛北京赛区一、二等奖共15名中，本实验班占了7名。又过三年，在全国高中数学联赛北京赛区的一、二等奖的共15名中，本班占了4名，并且是第1、4、7、9这4个靠前的名次。实验班的彭壮壮同学，1991年赴美探亲，随即在全美数学竞赛中考入前25名

（由于不是美国公民也不是永久居留者，未能获得美国奥林匹克数学国家集训队资格，不能参加集训和进一步选拔），1992年初，又以一篇数学论文“ON SOLVING FRACTIONS REPRESENTED BY P-ADIC INTEGERS”及答辩，获美国 Westinghouse Science Talent Search Contest 奖（西屋寻找科学天才竞赛，是一年一度美国高中学生最高规格竞赛），十多家报纸杂志报导了这一消息并刊登照片，他被哈佛大学以高额奖学金免试录取。



是不是只抓了尖子生，扔掉了大多数学生？实验班中考时，班数学平均96分（满分100分）；高考时，班数学平均分102分（满分120分）；前述这次全国高中数学联赛，北京赛区（北京市有近千所中学，重点中学有50所以上）公布了前137名，本班即占了12名。

是不是只抓了数学，挤了别的科目？本文开头摘录的那篇北京日报的报道，已经给予答复。事实上，三年前中考时，实验班就达到了6科总平均580.7分（满分600分），对此，北京电视台、《北京晚报》等都曾有报道。

那么，什么原因，促成了前述的进步呢？

客观上，二十二中领导为实验班配备的各科老师（张振良（政治）、李向前（语文）、聂影梅（物理）、邹法瑜（化学）、费松丽（英语）、周强（生物）、周宝兰（体育））在思想水平、业务水平方面都很高，他们热爱学生，热爱教育事业。聂影梅老师还是特聘的外校退休的著名物理教师。

东城区教育局乃至北京市教育局，一直关怀我校实验班，如东城教研室、北京数学会奥林匹克学校的许多老师，经常来校给予指导，陶晓勇等老师，经常来班讲学。

主观上，实验班一贯重视把对学生的思想教育落到实处，教育学生勤奋学习、积极进取，作诚实、正派的人，立志为人民多做贡献。

另一方面，师生共同在探索一个新的思路，一套崭新的数学学习方法。

本书，就是要向读者介绍这套方法。

这套方法，首先是指导思想上的新认识，而后，才是由此而产生和由它所决定的具体作法。本书的第一篇：“怎样学好高中数学”，就是介绍上述认识和方法。结合实例，边

叙边议。阅读本书时要两者兼顾，既不要光看条条，也不能只读举例。一定请读者结合例题，认真体会所介绍的思想和方法的真谛。

学习方法产生于具体数学内容的学习过程中，其价值在于，促成高水平的学习。为此，本书的第二篇，“高中数学各章学习指要”，在每一章，都分为“本章知识学习指导”和“解题思考方法小结”，这主要是着眼于本章知识的联系和规律，进行扼要分析，帮助读者深入认识知识本质，并能切实掌握；总结本章题目内容有关特点，学会归纳解题思路。在写法上，凡课本上已写出的定义、定理、公式及解题方法，均不再重复。议叙分析一般从简，多数情况不再配以例题。

为了避免造成读来浮光掠影，收益受限，本书第一篇第四章“各类内容学习方法示范”中分别举例，就如何学习概念，如何学习定理、公式，如何学习和小结一个单元，如何总结一章习题的解题思考方法，做了示范，请读者细读消化之后，能运用到第二篇的各章，依照“本章知识学习指导”和“解题思考方法小结”所列出的纲目，结合课本和习题，仿照第一篇第四章“各类内容学习方法示范”，写出深入详细的分析和总结。这是请读者一定要完成的作业。

鉴于篇幅的限制，本书各章之后不再编配习题，请读者在完成上述作业的基础上，选择质量好的习题集，检验自己的解题思考方法，以便提高解题技巧，同时，对新发现到的不足进行修正。这种循环往复，螺旋式上升的过程，会使自己的方法体系的水平和能力的水平扶摇直上。

## 内 容 简 介

数学，是高中学生投入最多的一门课程，但许多同学却为并没取得理想效果所苦，部分同学甚至陷入题海，昏天黑地，以至望而怯步。

究其原因，在于方法不得要领，或根本不当。

本人认为，学好高中数学，首重概念扎实、基础知识牢固，这几乎是人所共识。但究竟什么是“扎实”、“牢固”？又怎样才能“扎实”、“牢固”？则恐多有差异甚至大相径庭。

汽车飞驰，离不开动力的心脏——发动机，但必须通过变速箱、大轴，最后作用到轮子上。解数学题亦比，概念、基础知识(发动机)，要发挥作用，也必须靠一连串连接装置，即对概念的理解、引伸，概念外圈的规律、方法，以及解题思考规律，这些在课本上是没有的。

学好数学，还要学会聪明地做题。既要在做题的实践中加深理解、增长才干，又不为其所累。怎样才是和才能“聪明地做题”？

而最根本的出路，是在学习过程中，提高了能力，完善了自己的素质。

怎样实现这美好的一切？本书就是要向广大同学、青年教师展示其途径。

本人水平有限，所出疏漏错误，敬请指正，不尽谢意。

孙维刚 1993.4

# 目 录

前言	(i)
第一篇 怎样学好高中数学	(1)
第一章 热爱数学 学好数学	(1)
一、热爱数学,是学好数学的前提与途径	(1)
二、学好数学,需“醉翁之意不仅在酒”	(4)
第二章 站在系统的高度学习	(5)
一、理解概念要深入本质,注意抓住知识之间的联系	(5)
二、在类比中,发现和谐,简化记忆	(7)
第三章 把知识的学习和能力培养、素质的发展与完善有机地结合起来	(12)
一、主动学习	(12)
二、注意学习、积累和掌握数学方法与思想	(19)
(一) 转化归结思想	(19)
(二) “动”的思想方法——换个角度看问题	(22)
(三) 对称的观点和思想	(23)
(四) 数形结合的方法	(34)
第四章 各类知识学习方法示范	(40)
一、概念与基础知识的学习	(40)
二、公式、定理的学习	(63)

三、一个单元的学习与小结	(68)
四、一个数学方法(数学归纳法)的学习和小 结	(94)
五、一个思考方法的学习和小结	(108)
<b>第五章 学会做题</b>	(128)
一、题不求多,但求精彩	(129)
二、讲究做题的方法	(131)
(一) 一题多解,多解归一,有所总结	(131)
(二) 对待失误,善于反思,“吃一堑,长 一智”	(137)
(三) 举一反三,善于发现,有所前进	(143)
<b>第六章 学会复习</b>	(147)
一、培养做小结的习惯和能力	(147)
(一) 排列组合应用问题,解题思考方法小 结	(148)
(二) 涉及二面角的度数或相等的题目	(154)
二、有效地进行高中数学总复习	(163)
(一) 加强对高中数学各部分知识的理解、 掌握和应用能力	(163)
(二) 培养综合运用知识解决问题的能力 .....	(164)
 <b>第二篇 高中数学各章学习指要</b>	(169)
<b>I 重要概念、基础知识、方法、         思想</b>	(169)
一、有关命题的知识	(169)

二、充分条件和必要条件	(169)
三、数学归纳法	(169)
四、反证法	(169)
五、同一法	(175)
六、换元法	(178)
七、方程组的方法	(180)
八、待定系数法	(182)
九、配方法	(186)
十、转化归结思想	(188)
十一、动的思想方法——换个角度看问题	(188)
十二、对称的观点和思想	(188)
十三、数形结合的方法	(188)
<b>II 高中代数</b>	(189)
<b>第一章 幂函数、指数函数和对数函数</b>	(189)
<b>第二章 三角函数、三角变换、反三角函数与三角方程</b>	(200)
<b>第三章 数列与数学归纳法</b>	(214)
<b>第四章 不等式</b>	(231)
<b>第五章 复数</b>	(241)
<b>第六章 排列，组合，二项式定理</b>	(248)
<b>III 微积分初步</b>	(257)
<b>第一章 极限</b>	(257)
<b>IV 立体几何</b>	(263)
<b>第一章 直线和平面</b>	(263)
<b>第二章 多面体和旋转体</b>	(272)
<b>V 平面解析几何</b>	(279)

第一章 直线	(279)
第二章 圆锥曲线	(286)
第三章 坐标变换	(292)
第四章 参数方程、极坐标	(292)

### 第三篇 学会考试 (299)

- (一) 做好应考前的准备 (299)
- (二) 学会在考场上科学应对 (299)
- (三) 养成检验习惯, 积累检验方法, 提高  
检验能力 (300)
- (四) 分析一份综合练习, 对待难题的态度  
和方法 (301)

# 第一篇 怎样学好高中数学

## 第一章 热爱数学 学好数学

### 一、热爱数学，是学好 数学的前提与途径

要完成任何一番事业，首先要热爱它，只有这样，才会满腔激情、全身心的投入，聪明才智、灵感悟性一齐涌上心头，铺平成功之路。这是任人皆知的道理。

但是，数学凭什么让人“爱”？

近两年来，我接到过上百封信，希望了解怎样才能学好数学，这些信不但来自中学生，还来自许多家长，北京和其他省市的都有。

广大中学生希望学好数学，他们的父母也都希望自己孩子的数学“棒”！为什么呢？

做家长的谁不望子成“龙”，成为祖国四化建设栋梁之材！但成“龙”之路怎么走？一些人以为，必须要升高中、上大学，甚至考硕士、当博士。而每每考试，数学总首当其冲，必考，又最难；况且，数学又是许多课程的基础，应用广泛，于是，尽管数学十分枯燥，拼命也得学好。

我不怀疑，伟大目标，将为刻苦学习数学带来巨大的力量，但是能否学好，这里就大有文章了。



因为，被迫地刻苦学习，有如捏住鼻子灌药，咽下去，又可能呕吐出来。近来，许多苦口良药外面裹上了糖衣，大概就是要避免这种遗憾吧！

如果拼命去学的动力，是发现了数学的美，为数学本身的魅力所吸引，则将如美味佳肴，凭它的色香味，使人油然而升起强烈的向往。这才是学好数学的沧桑正道。

但是，数学是美味佳肴吗？它的色香味在哪里？

数学的美，是它的高度严谨和合理而达到的和谐，一种令人神怡的内在和谐。

举个小小的例子：

小学生开始学习除法，老师说：把一个量分成若干等份，求其中“1份”那个量（一倍量）的运算叫除法。这样，孩子便产生了一个想法：商肯定不会大于被除数！

可是后来， $6\text{米} \div \frac{1}{2} = 12\text{米}$ ，商怎么大于被除数呢？不

可思议！只好死记：这是分数除法法则中“颠倒相乘”的结果。

于是， $6\text{米} \div \frac{1}{2} = 6\text{米} \times \frac{2}{1} = 12\text{米}$ 。

其实，把一个量分成若干等份，可以换言为：一个量（指被除数）如果是“1份”那个量的若干倍，除法，就是去计算那个“1份”是多少？于是，在本例中，6米即是那个“1份”的 $\frac{1}{2}$ 倍，那么“1份”当然应该是 $6\text{米} \div \frac{1}{2} = 12\text{米}$ 了。

这样，在寻求彼此孤立的现象统一解释的过程中，对一个概念（除法）的认识不知不觉地深化了。

事情并未到此结束，从这里继续想下去，由于6米还