走向高中

数学

《走向高中》编写组 编写

上海远东出版社

走向高中

走向高中

·数 学·

《走向高中》编写组　编写

上海远东出版社

走向高中

·数　　学·

《走向高中》编写组　编写

上海远东出版社出版发行

（上海冠生园路393号　邮政编码：200233）

新华书店上海发行所经销　　上海市印刷四厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 7.125　字数 160,000

1996年2月第2版　1996年2月第1次印刷

印数 1—10,000

ISBN 7-80613-183-3/G · 380　　定价：8.50元

前　言

《走向高中》丛书自1994年8月出版以来，深受广大读者欢迎，现根据最新的考试要求，对全书进行了增删，使内容更加符合目前的实际情况。

本丛书旨在帮助学生复习初中阶段所学的基础知识，指导学生掌握各学科的重点、难点，为学生提供最优化的复习策略与方法，使学生得以花最少的时间，取得最佳的效果，提高会考和直升考试的成绩，顺利进入高中学习。

《丛书》分语文、英语、数学、物理、化学共五册，每书均以现行教材和《全日制中学教学大纲》、《调整意见》及《教学基本要求》(即考纲)为编写依据，由教学经验丰富的重点中学教师和教研员为主要编写人员，内容针对初三毕业生和考试实际，突出重点、难点，实用性强。书后还附有复习测试题和重点中学直升考试题，练习及试题均附有答案。

本书(数学)分为上、下两篇。上篇将初中数学主要内容分为8个专题，每个专题包括知识要点，典型例题和课外练习三部分。下篇把初中数学常用的重要内容与思想方法，用专题讲座形式进行编写，共6讲，每讲由内容提要，范例选解和课外测试三部分组成。书后还附有测试篇，共有毕业考、直升考、升学考等六套适应性试卷。

本书的例题、习题中，凡用*标记的，是指内容超出上海市《调整意见》范围的，可供外地学生选用。

本书由吴兴宗主编，薛德焕副主编，参加本书编写的有干雪超、周代骏、吴勇生、李美云、傅天良、冯惠娟、林杏云、姚益权、胡九如、刘金妹、冯翔、朱连生、朱淳生、黄家泉、沈炳成等同志，由吴兴宗、干雪超、薛德焕审校。

《走向高中》编写组

1995年9月

目　录

上　篇

一、数　与　式

[知识要点]

数与式的有关内容是初中代数重要的基础知识。掌握实数与代数式的有关概念，熟练地进行数与式的运算是复习的重点之一。

初中阶段学习的数都是实数，实数与数轴上的点建立一一对应关系。

实数的分类：

$$
\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left.\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数(自然数)}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}\right\}\text{有限小数和无限循环小数}\\ \text{无理数}\left.\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}
$$

数轴是学习实数的重要工具，也是形数结合的“典范”。由数轴上点的位置可直观形象地理解有关实数大小比较、相

反数和绝对值等概念。数轴上越右面的点表示的实数越大；某数的绝对值是指这个数在数轴上表示的点到原点的距离；两个互为相反数在数轴上所表示的点在原点的两侧，且到原点的距离相等。

实数的运算含加减、乘除、乘方开方等三级六种运算。运算顺序要遵循三个原则：① 有括号的先去括号，一般先去小括号，并注意符号法则；② 混合运算应先高级再低级；③ 同级运算按序。合理使用运算律可化繁为简，运算的结果必须化为最简分数和最简根式。

代数式是初中阶段数学的基础内容。代数式中的幂运算法则、去括号添括号法则、乘法公式等在各种式的化简或计算中要正确合理应用。

代数式的分类：

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\ \text{多项式}\end{cases}\\ \text{分式}\end{cases}\\ \text{无理式（被开方数中含有字母的根式）}\end{cases}$$

因式分解是整式乘法的逆过程，常用方法有提取公因式法、应用公式法、十字相乘法及分组分解法等四种。因式分解的基本方法和思路在分式化简、根式计算和解方程中都有广泛应用。

分式运算可与分数运算类比，合并同类根式可与合并同类项类比。必须重视分式和根式有意义的条件：分母不等于零及偶次根式的被开方数非负。

[典型例题]

例 1　把下列各数：0，3.14，2π，$\sqrt{16}$，$2-\sqrt{2}$，0.1212…，-3.0112223333…，分别填入相应的集合中。

正实数集合：{　　　　　　　　　　　　　　…}

无理数集合：{　　　　　　　　　　　　　　…}

非负有理数集合：{　　　　　　　　　　　　…}

解：正实数集合：{3.14，2π，$\sqrt{16}$，$2-\sqrt{2}$，0.1212…，…}

无理数集合：{2π，$2-\sqrt{2}$，-3.0112223333…，…}

非负有理数集合：{0，3.14，$\sqrt{16}$，0.1212…，…}

说明：无理数出现的形式有：开不尽的方根；含有圆周率π；无限不循环小数及三角函数中的部分。不要误把3.14当作π，除不尽的分数、无限小数和带根号的数全部当作无理数。

例 2　填表：根据表格中的已知条件，填写空格中的未知数。

原数x	相反数$-x$	倒数$\frac{1}{x}$	绝对值$\lvert x\rvert$	算术平方根$\sqrt{x}$
$2\frac{1}{4}$				
		0.5		
	$-(1-\sqrt{2})^2$			

解：$2\frac{1}{4}$的相反数是$-2\frac{1}{4}$，倒数是$\frac{4}{9}$，绝对值是$2\frac{1}{4}$，算术平方根是$\frac{3}{2}$。

0.5的倒数是2，2的相反数是-2，绝对值是2，算术平方根是$\sqrt{2}$。

$-(1-\sqrt{2})^2$的相反数是$(\sqrt{2}-1)^2$，$(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$，$3-2\sqrt{2}$的倒数是$3+2\sqrt{2}$，绝对值是$3-2\sqrt{2}$，算术平方根是$\sqrt{2}-1$。

说明：① 求分数的倒数和平方根，必须先把带分数化成假分数；② 求无理数的倒数要分母有理化；③ 注意公式$\sqrt{a^2}=|a|$的正确运用。

例3 计算：① $[-3^2\times 2+(-2)^3\times 3-4\times(-6)]\div(-3)^2\times\left(-\frac{3}{5}\right)^3\times 0.125$。

② $\sqrt{0.5}+\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}-\sqrt{72}+\frac{4}{\sqrt{2}}-\frac{1}{3-2\sqrt{2}}$。

③ $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{6}+1)^2-(\sqrt{48}-\sqrt{18})\div\sqrt{2}$。

解：① 原式$=[-18-24+24]\div 9\times\left(-\frac{27}{125}\right)\times\frac{1}{8}$

$$=(-18)\div 9\times\left(-\frac{27}{125}\right)\times\frac{1}{8}$$

$$=(-2)\times\left(-\frac{27}{125}\right)\times\frac{1}{8}=0.054。$$

② 原式$=\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{3}{2}-6\sqrt{2}+2\sqrt{2}-3-2\sqrt{2}$

$$=-\frac{3}{2}-\frac{11}{2}\sqrt{2}。$$

③ 原式$=(5-3)+(7+2\sqrt{6})-(2\sqrt{6}-3)$

$$=2+7+2\sqrt{6}-2\sqrt{6}+3=12。$$

说明：① 注意运算顺序及符号；② 二次根式的加减必须先把各个二次根式化为最简二次根式，再合并同类二次根式；③ 根式的混合运算可应用乘法公式，并根据根式的两个性质。

例 4 若 $|x-1|+(y+2)^2+\sqrt{z-3}=0$，求$xyz$的值。

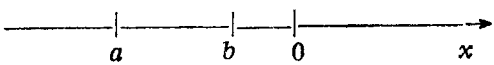
解：$\because$ $|x-1|\geqslant 0$，$(y+2)^2\geqslant 0$，$\sqrt{z-3}\geqslant 0$。

$\therefore$ 要使等式成立，当且仅当$x-1=0$，$y+2=0$，$z-3=0$，同时满足。

$\therefore$ $x=1$，$y=-2$，$z=3$，故$xyz=-6$。

说明：本题为加项为零型。如果一个等式中含有二个以上的未知数，一般不定解。本题利用了绝对值、完全平方及算术平方根的共性——非负来求解。

例 5 a、b所表示的数如下图数轴所示，试化简$\sqrt{(a+b)^2-4ab}+\sqrt{a(a+2b)+b^2}$。



解：由数轴上点的位置可知：$a<b<0$。故

$$\begin{aligned}原式&=\sqrt{a^2-2ab+b^2}+\sqrt{a^2+2ab+b^2}\\&=\sqrt{(a-b)^2}+\sqrt{(a+b)^2}=|a-b|+|a+b|\\&=(b-a)-(a+b)=b-a-a-b=-2a。\end{aligned}$$

说明：此类化简题，被开方数往往是一个完全平方式。先根据数轴上点的位置确定a、b的符号及大小关系，再利用二次根式的公式二进行化简。

例 6 解下列各题：

① 列代数式：a、b两数的平方和与这两数的平方差的平方差，并求当$a=-2$，$b=-3$时代数式值的平方根。

② 当x取何值时，分式$\frac{|x|-1}{x-1}$无意义？有意义？值为零？

③ 整数x为何值时下列等式$\sqrt{x+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\pi-x}=\sqrt{(x+\sqrt{2})(\pi-x)}$成立？

解：① $(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2$，当$a=-2, b=-3$时，原式$=[(a^2+b^2)+(a^2-b^2)][(a^2+b^2)-(a^2-b^2)]=4a^2b^2=4\times(-2)^2(-3)^2=144$，它的平方根为$\pm 12$。

② 分式$\frac{|x|-1}{x-1}$无意义的条件是$x-1=0$，即$x=1$；分式$\frac{|x|-1}{x-1}$有意义的条件是$x-1\neq 0$，即$x\neq 1$；分式$\frac{|x|-1}{x-1}$值为零的条件是$|x|-1=0$且$x-1\neq 0$，即$x=-1$。

③ 等式成立的条件是$-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\pi$，故整数$x$应取$-1$，0，1，2或3。

说明：① 列代数式要"先读先写"，求值时须先化简；② 要记住分式及二次根式有意义的条件，并注意绝对值的概念及不等式的解法。

例 7 因式分解：

① x^3+2x^2-63x。

② $25-4x^2+4xy-y^2$。

③ $\frac{1}{8}+27a^3b^3$。

解：① 原式$=x(x^2+2x-63)=x(x+9)(x-7)$。

② 原式$=25-(4x^2-4xy+y^2)=5^2-(2x-y)^2$

$=(5+2x-y)(5-2x+y)$。

③ 原式$=\left(\frac{1}{2}+3ab\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}ab+9a^2b^2\right)$。

说明：① 首先考虑提取公因式；② 含有四项整式的因式分解一般采用分组分解法，分组分解的关键是分组合理。

例 8 计算：

① $[(2x-5)(2x+5)(4x^2+10x+25)(4x^2-10x+25)+15624]\div(16x^4+4x^2+1)$。

② $\frac{a^2b-ab-a+1}{ab^2+3ab-b-3}\div\frac{a^2+a-2}{b^2+b-6}$。

③ $\sqrt{xy}-\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2}\quad(x>0,\ y>0)$。

解：① 原式$=[(8x^3-125)(8x^3+125)+15624]\div(16x^4+4x^2+1)$

$=(64x^6-1)\div(16x^4+4x^2+1)=4x^2-1$。

② 原式$=\frac{ab(a-1)-(a-1)}{ab(b+3)-(b+3)}\times\frac{(b+3)(b-2)}{(a+2)(a-1)}$

$$=\frac{(a-1)(ab-1)}{(b+3)(ab-1)}\times\frac{(b+3)(b-2)}{(a-1)(a+2)}$$

$$=\frac{b-2}{a+2}。$$

③ 原式$=\sqrt{xy}-\frac{1}{y}\sqrt{xy}-\frac{1}{x}\sqrt{xy}+\sqrt{\frac{x^2+y^2+2xy}{xy}}$

$$=\sqrt{xy}-\frac{1}{y}\sqrt{xy}-\frac{1}{x}\sqrt{xy}+\frac{x+y}{xy}\sqrt{xy}$$

$$=\left(1-\frac{1}{y}-\frac{1}{x}+\frac{x+y}{xy}\right)\sqrt{xy}=\sqrt{xy}。$$

说明：① 应用公式要注意搭配恰当；② 为了约分，分

式的分子和分母需进行因式分解变形，其中分组分解要注意合理性及可分性；③ 合并同类根式实际上是提取公因式。

例 9 $\triangle ABC$ 中，a、b、c 为三边，若 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$，求证：$\triangle ABC$为等边三角形。

证明：$\because \quad a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$。

$\therefore \quad 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$，

$(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)=0$，

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$，

又 $\because \quad (a-b)^2\geqslant 0$，$(b-c)^2\geqslant 0$，$(c-a)^2\geqslant 0$。

$\therefore$ 要使等式成立，当且仅当

$$a-b=0 \quad 且 \quad b-c=0 \quad 且 \quad c-a=0,$$

即$a=b=c$，故$\triangle ABC$为等边三角形。

说明：要证$\triangle ABC$为等边三角形，从题设可知，只要证明$a=b=c$。利用配方的基本思想把等式恒等变形成加项为零型，即可证得。

例 10 设a、b、c为$\triangle ABC$的三边，试化简：

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}$$
$$+\sqrt{a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ac}$$
$$+\sqrt{a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ac}。$$

解：$\because \quad a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$$=(a+b)^2+2c(a+b)+c^2=(a+b+c)^2,$$

$$a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ac=(b+c)^2-2a(b+c)+a^2$$
$$=(b+c-a)^2,$$

$$a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ac=(a+b)^2-2c(a+b)+c^2$$
$$=(a+b-c)^2,$$

$\therefore$ 原式$=\sqrt{(a+b+c)^2}+\sqrt{(b+c-a)^2}+\sqrt{(a+b-c)^2}$。

又 $\because \quad a>0$，$b>0$，$c>0$，$b+c>a$，$a+b>c$。

$\therefore$ 原式$=|a+b+c|+|b+c-a|+|a+b-c|$

$=a+b+c+b+c-a+a+b-c=a+3b+c$。

说明：本题先把被开方数恒等变形成完全平方的形式，再利用“三角形两边之和大于第三边”的性质及二次根式公式二化简求得。

[**课外练习**]

A 组

1．填空题：

(1) 3.195精确到 0.01 的近似值为________，此近似值的有效数字有____个。

(2) 查表得$\sqrt{1.994}=1.412$，$\sqrt[3]{19.94}=2.711$，则$\sqrt{0.01994}=$________，$\sqrt[3]{19940}=$________。

(3) ____的绝对值是它本身；____的相反数是它本身；____的倒数是它本身；____的平方是它本身；____的平方根是它本身；____的立方是它本身；____的立方根是它本身。

(4) 当$x=$____时，分式$\dfrac{x^2-1}{x^2-x}$的值为零；当$x=$____时，根式$\sqrt{x^3+8}$的值为零。

(5) 用“=”、“>”或“<”号连结：

$-(-2)$____$-|-2|$；

-1^{1994}____$(-1)^{1994}$；

$(0.1)^2$____$(0.1)^3$；$|a-b|$____$|b-a|$。

(6) 若$-\dfrac{1}{3}x^{2n+1}y^m$和$3\dfrac{1}{2}x^{2m-1}y^2$是同类项，则$m=$____，

$n=$____；最简根式$\sqrt{5^{a-3}}$和$\sqrt[b+1]{5}$是同类根式，则$a=$____，$b=$____。

2．选择题：

（1）个位上数字为x，十位上数字为y的两位数用代数式可表示为(　　)。

（A）yx　（B）$x+y$　（C）$10x+y$　（D）$10y+x$

（2）$\sqrt{a-b}$的有理化因式为(　　)。

（A）$\sqrt{a-b}$　　（B）$\sqrt{a+b}$

（C）$\sqrt{b-a}$　　（D）非A、B、C

（3）下列各等式属于因式分解的是(　　)。

（A）$x(a+b)-y(a-b)=b(x+y)+a(x-y)$

（B）$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

（C）$x^2-2xy+y^2+1=(x-y)^2+1$

（D）$(a+b)^2+(a-b)^2=2a^2+2b^2$

（4）用代数式表示“x的相反数与y的倒数的和的平方”应为(　　)。

（A）$\left(\frac{1}{-x+y}\right)^2$　　（B）$-x+\left(\frac{1}{y}\right)^2$

（C）$\left(-x+\frac{1}{y}\right)^2$　　（D）$(-x)^2+\left(\frac{1}{y}\right)^2$

3．简答题：

（1）计算：

① $1-\left[80\times\left(\frac{11}{20}-2\frac{11}{16}\right)-(-13)^2\right]\div(-7)^2$。

② $9s-\{15t-[4s-(11t-2s)-10t]+2s\}$。

③ $(-x+y+z)(x+y-z)$。