

科學圖書大庫

特別數學

譯者：王昌銳

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

特別數學

譯者：王昌銳

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會
監修人 徐銘信 發行人 王洪鎧

科學圖書大庫

版權所有



不許翻印

中華民國六十八年三月七日再版

特別數學

基本定價 1.60

譯者 王 昌 銳

台灣省立高雄工業專科學校教授

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(67)局版臺業字第1810號

出版者 財團法人 臺北市徐氏基金會 臺北市郵政信箱53-2號 電話 7813686 號
發行者 財團法人 臺北市徐氏基金會 郵政劃撥賬戶第 1 5 7 9 5 號
承印者 大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段一五一號 電話 9719739

譯 序

本書原名爲“Mathematics OF Choice”，有“選擇數學”之意。又名爲“How to count without counting”，可譯爲“如何校而不計”，意即“不用計數而達計數之目的”的作法。書中主要內容，却以“排列”，“組合”，“或然率”及“分配”…爲重。這都是數學中比較特殊的問題，所以我將它譯爲“特別數學”，非敢標新立異，徒保原書著者顏斯書之至意而已。

排列，組合及或然率，對於數學各部門之許多定理證明及研究，爲用頗大，特別是基本數學，二項式定理，多項式乘法，因子分解，集合問題及理論，…均有其密切關係。至於日常應用，諸如裁決事物，判斷問題；方法之多寡，成功之希望；莫不藉此推理及分析方法，予以尋求。解決實際問題，啓發邏輯思考，磨練科學處事方法，促進數學研究成效，其重要性不言而喻；此種課題，常出現於代數教材及公算學中，但以限於篇幅，多略而未詳。本書却以共十一章之篇幅，對排列組合及或然率等問題，條分縷析言之甚詳，實坊間不可多見之佳籍，故予逐譯，以推介於我國人，當能對此題材，有所增益。

本書特點，在提出各種有關問題，於解問題過程中，研究各種可能方法之數目，以闡明原則原理，公式定理，使學子耳濡目染，涉獵全部題材。所以本書是一種良好的排列組合，分配及或然率之教材，亦可謂是一本最佳之問題詳解，而且問題內容之廣泛，爲數之龐大，以及解答之詳明，尤屬嘆爲觀止。此種於問題去瞭解事理，由問題中發掘真理之編排，尤值特別推崇。本書作者尼文教授（Ivan Niven），於一九一五年生於加拿大之溫哥華，曾入英屬哥倫比亞大學，及支加哥大學就讀。以後復在賓夕法尼亞大學，從事研究工作，曾前後執教於伊里洛依司大學，普渡大學。於斯丹福大學，亦曾兩度從事暑期講學，聞目前仍任奧勒岡大學之數學教授，其名著“有理數及無理數”一書，亦納入“新數學文庫”之中，以爲第一卷焉。

本書之譯，係應徐氏基金會廣譯新書，造福學子之約而作。書中譯名，力求普遍、流行、典雅，譯文力求流利存真，希望嗜斯學者，能於本書，有

前 言

本書題材，常稱為“組合分析”或“組合學”。所討論之問題，為“其於多少方法中，可能…否？”之類，或原則之變化。排列及組合，組成組合分析之一部份，即讀者或已熟知之部分。如為果然如此，彼可能熟悉前三章之某些內容。

此書閱讀之僅有先決條件，為應具有基本代數學識。各章之末，均提供包含所有公式之結語。全書之中，為讀者準備了許多習題。其實，全部內容，為一具有足夠背景資料，以供突破問題之問題全集。最末章後，繼之以雜題解答，或最少為解答之敘述，提供於書後，以對任何深度之問題，而許多答覆，則對較簡之問題提供。

有益之建議，來自 S.M. S.G 編輯諸公，及族卡門 (Herbert S. Zuckerman) 先生，貝爾 (Max Bell) 曾將書中某些內容，與其學生使用，並對余提出寶貴意見，本書別稱，係由卡克 (Mark Kac) 所命。對所有此等協助，表示由衷感謝。

致讀者

本書為數學專家所撰一系列書刊之一，其目的在確立多數中等學校學生及社會人士，某些頗具興趣而可領會之重要數學觀念，新數學文庫之多數篇幅，包含中學課程，不常容納之題材；彼等難易相殊，且，即使於同一書中，某些部份，即較其他部份，需要高度之專注。由是，讀者需具相當之技能學識，方能瞭解大部份此等書籍，且必作明智之努力。

如讀者一直僅於教室作業中遭遇數學，則應熟記於心，數學書籍，不能快速閱讀。亦不應期望乍覽之餘，即能瞭解書中一切內容。而應很自然的越過複雜部份，稍後再回來讀；因後讀之敘述，常能澄清一種理論也，相反的，包含完全熟稔題材之章節，則可快速閱讀。

“學”數學之最佳途徑，為“作”數學；各書所含習題，有些需要縝密思考。奉勸讀者養成手持紙筆，從事閱讀之習慣；如此方式，數學對之將意義倍增。

對著者與編者而言，此為一種新的嚐試。甚願對許多中等學校師生之協助本文庫各書籌印者，表示由衷之謝意。編者頗有興趣於本文庫諸書之反映意見，希望讀者書面寄交紐約，Mercer 街，251 號，康涅特（Courant）數學科學會，紐約大學，新數學文庫編輯委員會（Editorial Committee of the New Mathematical Library）。

目 錄

譯 序	III
前 言	V
致 讀 者	IV
第 一 章 介紹性問題	1
第 二 章 排列與組合	5
2.1 乘法原則	5
2.2 階 乘	7
2.3 排 列	8
2.4 零 階 乘	11
2.5 組 合	12
2.6 圓中物之排列	16
2.7 結 語	18
第 三 章 組合及二項式係數	19
3.1 路線問題	19
3.2 全不相同諸物之排列	20
3.3 $C(n, r)$ 之派斯克爾公式	22
3.4 二項式展開式	24
3.5 多項式展開式	27
3.6 派斯克爾三角形	28
3.7 集合次集之數目	30
3.8 自然數乘羈之和	31
3.9 結 語	35
第 四 章 某些特別分配	37
4.1 菲波南希數目	37
4.2 單位係數之線性方程式	40

4.3	有重複之組合	43
4.4	具限制解之方程式	44
4.5	結語	47
第五章	取捨原則，或然率	49
5.1	一般結果	49
5.2	應用於方程式及重複組合	52
5.3	重新安排	56
5.4	組合之或然率	59
5.5	結語	63
第六章	整數之劃分	65
6.1	劃分圖形	65
6.2	劃分數目	69
6.3	結語	71
第七章	形成多項式	73
7.1	多項式之劃分與乘積	74
7.2	一元票之兌換	77
7.3	結語	78
第八章	全不相同物之分配	81
8.1	物相殊・盒相殊	81
8.2	物相殊・盒相同（集合之劃分）	83
8.3	物相混・盒相殊	84
8.4	結語	87
第九章	圖象問題	89
9.1	鴿洞原則	89
9.2	半成三角形	90
9.3	平面之分隔	92
9.4	結語	95

第 十 章 數學歸納法	97
10.1 數學歸納法之原則	97
10.2 和與積之標誌	100
10.3 結 語	105
第十一章 非結合乘積之表示法	107
11.1 循環關係	107
11.2 明顯公式之發展	109
11.3 推測之證明	113
11.4 $F(n)$ 之公式	114
11.5 結 語	115
 雜 題	 117
 答 與 解	 123
參考書目	154
索 引	155

第一章

介紹性問題

本章目的，在陳示少數範例問題，以示範全篇綱目。題材之有系統的發展，開始於次章。而此地所介紹之某些示範問題，雖無理論背景，亦能解出，其他解答，應予後延，直至已發展需要之理論。

本書觀念，在考查“多少？”問題之某些現象。如斯之問題，可為非常簡單；例如，“由第14頁至第59頁，包含有多少頁？”於某些情況中，其答覆除普通常識以外，可能別無他物。例如，十月中之天數，或一哩中之碼數。於其他情況，其答覆可能又需要技術性資料，如現時所知之化學元素數目，或某一汽車中，引擎排氣之立方公分數目。但吾人所關心者，為包含思考之問題。彼等亦需要某些先決知識，而將提供，如其非共同資料的話。某些數學公式，頗為有助，此將於相當課程發展。然而，許多問題，除些許天才技巧而外，又別無所需。現在開始如此之問題。

【問題 1.1】〔此有如 1962 年十一月份，美國數學月刊，919 頁之問題 E 1541〕於任一年曆表中，有多少個星期五，十三號？最小可能之數目為何？

相似於本書中之其他許多問題，此問題已於末尾“答與解”部份解答。當然，讀者應於參閱提供之解法以前，先試圖解決。問題 1.1 解簡單的研究月份牌，以從事之，或研究提供年內各天之可能安排的年度月份牌以作為之。其挑戰係求導出一序列比較簡單之方式，解此問題。例如，可注意於一年有 365 天，能區分為七個不同型式，一開始於星期一，一開始於星期二，…。同樣的，有七種不同型式之年份。故而，為此問題之目的，有全部十四種型式之年。其次能導出一系列以研究禮拜五十三號之數目，於任何此等型式之年中。然而，吾人於此處給予分析如此，其餘留待讀者為之。

【問題 1.2】一工廠製作兒童用之方塊，各塊為二吋之立方體，其諸面以兩種顏色髹漆之，藍與紅。某些方塊全藍，某些全紅，而某些為紅與藍混合之面。製造商能造出多少不同種類之方塊。

於問題有其正確意義之前，需解釋“不同”方塊之意義為何。吾人將謂如兩方塊能置於匹配位置，以使對應諸面，有恒等之顏色，即使其底面有相同顏色，其頂面有相同顏色，其前面有相同顏色， $\dots$ ，乃謂其為相同。如兩方磚於此意義中不同，乃謂其為相殊。例如，任兩方磚有五藍面及一紅面為相同。但考慮另例，兩方磚有四紅面及二藍面。兩如此之方磚，能或不能相同。如兩藍面於各磚上為隣接者，則其磚相同。但如於一磚上兩藍面相隣，而於他磚之上，兩藍面為相對，則兩磚相殊。見圖 1.1。

此問題亦於“答與解”節解之，但再奉勸讀者，自行求解。而後用書後之解，以作其作為之核對。



圖 1.1

現在轉到更為困難之三個問題，其解延至所需理論已作出為止。

【問題 1.3】路線問題。一人工作於一建築物中位於其家之東面房屋七排，北面房屋八排。(見圖 1.2) 由是，每日步行前往工作，走過十五排房舍。於矩形形態中所有街道，均可用於步行。僅步行十五排房屋之距離，彼能有多少不同方式，由家走往工地？

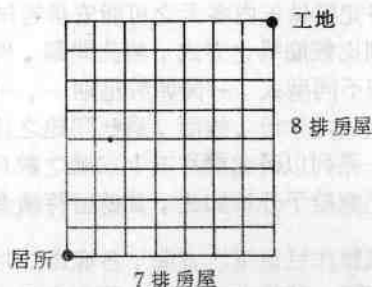


圖 1.2

對此問題之明顯途徑，將繪一切可能路線之圖解，而後數計之。但可有 6435 條不同之路線。故而其直接途徑，似有些不合實際。此問題如觀察於其正確方式，不太困難，其解答提供於第三章中。

現輪到另一問題，其解應等待某些理論分析。

【問題 1.4】州長參加一著名出版商之百年慶祝大會，為表示謝意，出版商於該公司最暢銷之二十種書中，隨意選出十種，致贈州長。州長可於該二十種書中，隨心所欲，選取十種，或十本相同之書（一種相同之書，十本），或任何其他彼所喜愛之組合，規定其總數為十。(a)州長作此選擇，能有多少種方式？(b)如州長曾要求選取十種不同之書，有多少種作此選擇之方式？

問題(b)較易於問題(a)，因(b)為由 20 中選取 10 物之直截了當問題。由二十中選取十物之不同選擇數目，由符號 $C(20, 10)$ 表示，且易於研判，如第二章中所將見及。其問題之部份(a)解，將於節 4.3 提供。

【問題 1.5】將一元的鈔票，兌換成輔幣，有多少可能之方式？（假定輔幣分為 1, 5, 10, 25, 及 50 分者，亦即所謂之分，五分，一角，二角五分，及半圓者。）

此問題，一如本書其他問題，能簡單的分為一切情況，而後數計，以解決之。更有系統之解決方法，提供於第七章中。

吾人以說明有關計數之原則，來斷結本章。此產生於求由第 14 頁至第 59 頁所含頁數多少之簡單問題中，其答案為 46；較二整數 14 及 59 間之差，多一。通常，“由 k 至 n 所含之整數數目，為 $n - k + 1$ ，其中 n 為假定大於 k ，即 $n > k$ ”。[整數，有時稱為全數，有三種型別：正整數或自然數 1, 2, 3, 4, …，其中之三小點“…”，表示“如此類推”；負整數 -1, -2, -3, -4, …，而 0，既非正，亦非負，其非負整數為 0, 1, 2, 3, 4, …。]

習題集合 1

1. 由 25 至 79，包含多少整數？
2. 於序列 86, 87, 88, … 中，其第 53 個整數為何？
3. 123 個連續整數之最大者為 307。其最小者為何？
4. r 個連續整數之最小者為 n ，其最大者為何？

5. r 個連續整數之最大者為 k ，其最小者為何？
 6. 於序列 $n, n+1, n+2, \dots, n+h$ 中，有多少個整數？
 7. 滿足不等式 $12 < \sqrt{x} < 15$ ，即 $\sqrt{x}$ 超過 12，但 $\sqrt{x}$ 小於 15 之整數 x 有多少個？
 8. 於序列
 - (a) 60, 70, 80, $\dots$, 540 ; (b) 15, 18, 21, $\dots$, 144 ;
 - (c) 17, 23, 29, 35, $\dots$, 221
 中，有多少個整數？
 9. 於 1 及 2000 間，有多少整數 (a) 為 11 之倍數；(b) 為 11 之倍數，但非 3 之倍數；(c) 為 6 之倍數，但非 4 之倍數？
 10. 小於一元之兌換，所須付給之輔幣最小數目為何？(輔幣之區分為 1, 5, 10, 25, 及 50 分者。)
 11. 一人有 47 分錢之兌換收入。假定兌換人有相當能力供應 1, 5, 10 及 25 分輔幣之能力，兌付員給付此人之兌換，有多少種不同之輔幣組合？
 12. 一人有六對袖扣，裝於一盒之中。無兩對為相同者。多少個袖扣，彼必須二次摸出(於黑暗中)，以求取出相配之一對？
 13. 一人有十二只藍襪及十二只黑襪，裝於一抽斗中。彼一次必須取多少只襪(於黑暗中)，以求取出相配之一雙襪子？(任兩藍襪，或任兩黑襪，建立一雙。)
 14. 一正多角形一角之量度，其度數恰為一整數。如斯之正多角形，能有多少條邊？
 15. 一人有大量供應木製正四面體之能力，其大小完全相同。(一正四面體為一實體，由四個全等之等邊三角形所包圍。見圖 1.3) 如各三角形面之油漆，為四種顏色之一。能作成多少油漆不同之正四面體，以服從一切顏色之可能組合？(謂兩方磚相殊，如其不能置於匹配位置，具恆等顏色於相對應之面上。)
- 由立方體一角，至其相對角，有多少條路線，各可能路線；係循立方體十二條邊之三者前進？
17. 於美國最高法院之正式會議中，九個裁判官，於會議開始時，各與其餘各人握手。多少次握手，開始如期之一會議？

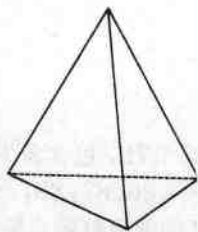


圖 1.3

第二章

排列與組合

本章及次章，將介紹本書題材之基本觀念。讀者可發現許多此等觀念，來自以前之研究。然而，於第二及第三章某些地方，討論的較通常代數基本書籍為更詳細。而將為讀者，闢後繼各章之路，如果他完全瞭解此等基本觀念的話。如其能解答習題集合中之問題，彼即能確定其對題材之瞭解。組合之許多基本標誌，將於此兩章中陳述。除全部數學中所用之許多標誌以外，尚略述幾種標準形式，但後繼者僅一而已。

欲介紹題材，吾人考慮以下簡單問題。一男人及兒童服裝店，有五種型式之腰皮帶，而每式有七種大小不同之尺寸可用。此店有多少種不同之皮帶？

其答為 35，能以 7 乘 5 得之，因有型號 1 之皮帶 7 條，型號 2 之皮帶 7 條，…，型號 5 之皮帶 7 條，故吾人有

$$7+7+7+7+7=5\cdot 7=35$$

此容易的問題，解釋了一個基本原則。

2.1 乘法原則

“如一物之集中，能分為 m 個不同之型式，且如此等形式，各能分為 k 種不同之次型，則共有 mk 種不同之型式”。

此原則能引伸於依兩性質而分類之外，如形式及皮帶之大小，甚而及於依三性質、四性質，及更多者之分類方面；一雜貨店屯積來自七個工廠之牙膏。每一工廠出產三型，各可用於含氟及普通藥物。該店屯有多少種不同之牙膏？其答案為 $7\cdot 3\cdot 2$ 或 42，係基於乘法原則而得，因有 7 工廠，3 型式，及依氟而生之 2 種類也。

乘法原則，可應用於物品分類以外之許多問題。例如，考慮一人決定由美國乘飛機赴歐洲，然後乘船回來。如有八種可用之航空線，及九家不同之海運公司，則彼能作 $8\cdot 9$ 或 72 種往返不同之旅程。

此處為另一種簡單例題。於一大規模野餐，單份中餐食品，包含一道三

明治（四種中選一種），一樣飲料（咖啡，茶，或牛奶，任選其一）及一杯冰淇淋（三味選一）。一人能作其多少選擇？依乘法原則，乃知其答案為 $4 \cdot 3 \cdot 3$ 或 36 種。

因為乘法原則之各種應用，常形成多種結果：“如一結果解於 m 種方式出現，且有第二結果，能與第一者無關，出現於 k 種方式，則兩結果，能於 $m \cdot k$ 方式中出現”。

“無關”一詞，因其原則，不需有效於第二結果所基之情況，或由第一者所限制，此處頗為重要。例如，一女孩有七條裙子，五件上衣，而無 35 裙衣之組合，以某些顏色或形式可能打擊美學觀點；某種紅裙，可與某橘色上衣不相稱。然而，以下例題表示結果依賴性之標準種類，其中原則乃能使用。

【問題 2.1】四字母 A, B, C, D 能書成多少不同之順序，任一安排中，無可重複之字母？

此問題，能簡單書出一切字母： $ABCD, ACBD, ABDC, \dots$ 之順序以答覆之。但其較為簡單，而於較複雜之問題，需要導出一解此問題之系統。考慮任何安排中之第一字母。有此位置中，字母之四種選擇。對任何第一字母之已知選擇，有三種可能之第二字母選擇。例如，其第一字母為 B ，則其第二字母選擇，應來自 A, C 或 D 。同樣的，四者之中選出首兩字母以後，其第三字母，能於兩方式中選擇。且當吾人得選第四字母時，僅有一種方式可行；即僅有一字母，能用於第四部位也。由是，乘法原則，提供答案

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

讀者應列出 24 種情況，以驗證此答。此處為以 A 字母開始者：

$ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB.$

【問題 2.2】於某（神秘的）國中，汽車牌照，使用字母，而非數目，以為區別記號。而確使用三個字母，例如 BQJ, CCT ，及 DWD 。如有 26 個字母，能作成多少不同之牌照？

如例所示，牌照上之字母，容許重複，三字母各有 26 種選擇，其答案為

$$26 \cdot 26 \cdot 26 = 17576.$$

【問題 2.3】如牌照上之字母，不許重複，問題 2.2 之答案為何？能作成其用於問題 2.1 解之相似理論。對第一字母有 26 種選擇，但僅有 25 種，以事第二字母之選擇，而僅 24 種第三字母之選擇，由是其答案為：

$$26 \cdot 25 \cdot 24 = 15600.$$

習題集合 2

1. 問題 2.2 之安排，由字母 Q 開始有多少？
2. 問題 2.3 之安排，由字母 Q 開始有多少？止於字母 Q，有多少？
3. 問題 2.2 之安排，止於一母音 (A, E, I, O, U) 字母，有多少？
4. 問題 2.3 之安排，止於一母音，有多少個？
5. 一室有六門，由一門進及一門出之可能途徑有多少條？
6. 一輪胎店，具有八種不同尺寸之輪胎，各者之不同在管及無管兩者，各具尼龍或雷龍線，且各具白邊或為淡黑，該店具有多少種不同輪胎？
7. 一郵購公司，供應 23 種婦女拖鞋，如各式拖鞋，具有十二種長度，三種寬度及六種顏色。該店庫房應保有之不同種類婦女拖鞋有多少種？
8. 於 10,000 及 100,000 之間，有多少個整數（全數），無 6, 7 或 8 以外之數字？有多少個無 6, 7, 8 或 0 以外之數字？

2.2 階 乘

於許多情況中，對如

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, \quad 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

之乘積，各為連續而降至一的整數序列乘積者，有一簡單標誌，頗為方便，如斯之乘積，稱為階乘 (factorials)。常用驚嘆號，作其標準數學標誌；由是

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$$

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040.$$

吾人讀 $4!$ 為“四階乘”， $6!$ 為“六階乘”，而 $7!$ 為“七階乘”。通常，對任何正整數 n ，吾人定義 $n!$ （讀此為“ n 階乘”）為

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \cdots 1,$$

此為由 n 降至 1 之所有整數乘積。注意， $1!$ 為等於 1。

習題集合 3