21世纪高等院校教材

微积分

（经管类）

西北工业大学微积分教材编写组　编

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等学校本专科规划课改教材

高 等 数 学

上 册

熊德之 柳翠华 伍建华 主编

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书参照教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的《工科类数学基础课程教学基本要求》编写而成，分上、下两册. 上册内容为函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程. 附录附有基本初等函数的图形及其主要性质、几种常用的曲线、积分表等内容. 本书语言通俗、例题较多，便于自学，并吸收国内外同类教材的优点，以帮助学生提高数学素养，培养学生创新意识和运用数学工具去分析和解决实际问题的能力.

本书可作为高等学校工科类各专业高等数学课程的教材，也可作为相近学科或经济、管理类专业的数学教材和教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/熊德之，柳翠华，伍建华主编. —北京：科学出版社，2009

21世纪高等学校本专科规划课改教材

ISBN 978-7-03-024948-7

Ⅰ.高…　Ⅱ.①熊…②柳…③伍…　Ⅲ.高等数学－高等学校－教材

Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第112735号

责任编辑：王雨舸　曾　莉 / 责任校对：董艳辉

责任印制：彭　超 / 封面设计：苏　波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2009年7月第一版　开本：B5(720×1000)

2009年7月第一次印刷　印张：18 3/4

印数：1—4 000　字数：365 000

定价：31.50元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

进入 21 世纪，科学技术飞速发展，知识更替日新月异，这是一个催人奋进的时代．我国的高等教育已迈入大众化的发展轨道，独立学院、高职高专学生占了大学生总数的“半壁江山”．在新的形势下，高等数学的课时却还在减少，这对高等数学的教学提出了更高的要求，同时，出版新的应用型高等数学教材，以满足高等教育改革和发展的需要，就显得更加紧迫．

本书是高等学校本专科规划课改教材，主要面向独立学院等应用型本专科的高等数学课程．在编写过程中，我们着力加强基本概念，突出素质培养，注重实际应用．对基本概念、基本理论的叙述，力求准确、简明，便于理解和掌握．对知识的深度和难度，以必需、够用为原则，重视数学思想方法的传授，避免烦琐理论推导，力求通俗好懂，易教易学．对于书中标有“*”号的内容，专科层次的教学可以不作要求，本科层次的教学可根据需要选用．

本书由熊德之负责制定编写大纲，并分上、下两册出版．全书分为 11 章，第 1 章、第 7 章由伍建华编写；第 2 章、第 3 章由柳翠华编写；第 4 章、第 5 章由熊德之编写；第 6 章、第 10 章由阮正顺编写；第 8 章、第 9 章由杨雪帆编写；第 11 章由陈君编写．全书由熊德之、柳翠华、伍建华统稿、定稿．

由于作者水平所限，加上成书时间又很仓促，书中的不足之处实属难免．恳请各位老师和读者对书中的疏漏和不足不吝赐教，以便今后再版时予以修订．

编　者

2009 年 5 月

目　　录

第 1 章　函数与极限

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学则以变量为研究对象. 对客观世界的量与量的依赖关系的研究，产生了函数与函数极限的概念. 函数概念就是对现实世界中量与量的依赖关系的抽象描述，是刻画现实世界中变量之间相依关系的数学模型，也是高等数学研究的主要对象. 极限是刻画变化过程中变量的变化趋势的数学模型，是研究变量的一种基本方法. 在中学数学里，通常突出的是极限的描述性定义，微积分则必须强调精确的、定量的极限定义.

本章在总结和推广中学所学过的函数概念及一些主要函数的基础上，将介绍函数与极限的基本概念、性质和运算，并利用极限描述函数的连续性. 连续函数是最常见的一类函数，它具有一系列很好的性质和基本运算，微分理论将以连续函数为主要对象.

§1.1　函　　数

一、集合与区间

1. 集合概念

集合是现代数学的基本语言，可以简洁准确地表达数学内容. 在现代数学中，每个对象（如数、函数等）本质上都是集合，都可以用某种集合来定义. 在中学已经接触过集合的概念，如自然数的集合、有理数的集合等. 集合（简称集）是指具有某种特定性质的事物的总体. 构成集合的每一个对象称为该集合的元素. 习惯上，集合常用大写字母 A, B, C, …表示；元素常用小写字母 a, b, c, x, …表示.

设 A 是一个集合，若 a 是 A 的元素，则说 a 属于 A，记为 $a \in A$；若 a 不是 A 的元素，则说 a 不属于 A，记为 $a \overline{\in} A$ 或 $a \notin A$.

下面举几个例子：

例 1.1.1　某班 9 月 1 日出生的全体同学.

例 1.1.2　某商场的全部电视机.

例 1.1.3　单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上所有的点.

例 1.1.4　某班全体高个子同学.

例 1.1.1、例 1.1.2、例 1.1.3 是集合,例 1.1.4 不是集合.

注意　集合的元素具有确定性、互异性、无序性三个特征. 确定性是指构成集合的元素具有明确的特征,而某一元素在集合 A 中或不在集合 A 中二者必居其一,能够明确地区分,不能模棱两可. 互异性是指集合中不同的字母表示不同的元素,而同一元素在集合中不能重复. 无序性是指集合的构成与元素的顺序无关,构成集合的元素相同而仅排列的顺序不同应认为是同一个集合.

由有限个元素组成的集合称为有限集,如例 1.1.1、例 1.1.2;由无限个元素组成的集合称为无限集,如例 1.1.3;不含任何元素的集合称为空集,记为$\varnothing$.

集合的表示一般有两种方法:

(1) 列举法. 把集合的全体元素一一列举出来,要求元素既不能重复,又不能遗漏. 例如,$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, $B=\{a, b, c, d, e, f, g\}$, $C=\{$红, 黄, 蓝$\}$.

(2) 描述法. 若集合 M 是由元素具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成,则 M 可表示为$M=\{x \mid x$ 具有性质 $P\}$.

例如, $M=\{(x, y) \mid x, y$ 为实数, $x^2+y^2=1\}$.

设 A, B 是两个集合,如果集合 A 的元素是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的子集. 即若 $x \in A$, 则必有 $x \in B$, 则称 A 是 B 的子集,记为 $A \subset B$(读作 A 包含于 B)或 $B \supset A$.

如果集合 A 与集合 B 互为子集,即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称集合 A 与集合 B 相等,记为 $A=B$.

若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$, 则称 A 是 B 的真子集,记为 $A \subsetneqq B$. 规定空集是任何集合的子集.

由数组成的集合称为数集. 有时我们在表示数集的字母的右上角标上“+”、“-”等上标,来表示该数集的特定的子集.

$\mathbf{N}$ 表示所有自然数构成的集合,称为自然数集.

$$\mathbf{N}=\{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}, \qquad \mathbf{N}^{+}=\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}.$$

$\mathbf{R}$ 表示所有实数构成的集合,称为实数集; $\mathbf{R}^{+}$ 表示正实数集.

$\mathbf{Z}$ 表示所有整数构成的集合,称为整数集.

$$\mathbf{Z}=\{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}.$$

$\mathbf{Q}$ 表示所有有理数构成的集合,称为有理数集.

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^{+} \text{ 且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质}\right\}.$$

显然, $\mathbf{N} \subsetneqq \mathbf{Z} \subsetneqq \mathbf{Q} \subsetneqq \mathbf{R}$.

2. 区间和邻域

设 a, b 为实数,且 $a<b$, 称数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 为开区间,记为(a, b), 即

$(a, b)=\{x|a<x<b\}$，如图 1-1(a)所示. 类似地有 $[a, b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，如图 1-1b 所示；$[a, b)=\{x|a\leqslant x<b\}$，$(a, b]=\{x|a<x\leqslant b\}$ 称为半开区间. 这三类区间称为有限区间，其中，a 和 b 称为区间 (a, b)，$[a, b]$，$[a, b)$，$(a, b]$的端点，$b-a$ 称为区间的长度.

$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x\}$[图 1-1(c)]，$(-\infty, b]=\{x|x<b\}$[图 1-1(d)]，$(-\infty, +\infty)=\{x||x|<+\infty\}$ 称为无限区间.

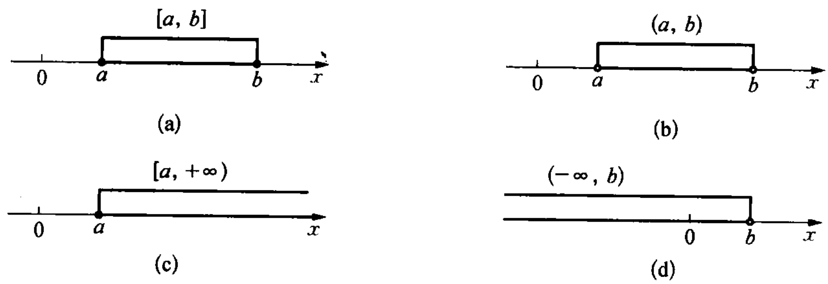

图 1-1

以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的**邻域**，记为 $U(a)$.

设 δ 是一正数，则称开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 为点 a 的 δ 邻域，记为 $U(a, \delta)$，即

$$U(a, \delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}=\{x||x-a|<\delta\}.$$

其中，点 a 称为邻域的**中心**，δ 称为邻域的**半径**(图 1-2).

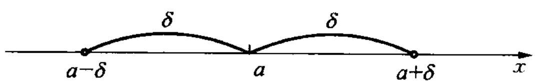

图 1-2

有时在讨论邻域 $U(a, \delta)$时，并不关心中心点 a，甚至需要把中心点 a 去掉，这种去掉中心点的邻域称为**去心邻域**，记为$\mathring{U}(a, \delta)$，即

$$\mathring{U}(a, \delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

邻域是一个开区间，则 $(a-\delta, a)$ 称为 a 的左 δ 邻域；$(a, a+\delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域.

二、函数概念

在同一自然现象或技术过程中，往往同时有几个变量在变化着. 这几个变量并不是孤立地在变，而是相互联系并遵循着一定的变化规律. 在此先就两个变量的情形(多于两个变量的情形以后再讲)举几个例子.

例 1.1.5　考虑圆的面积 A 与它的半径 r 之间的相依关系. 大家知道,它们之间的关系由公式

$$A = \pi r^2$$

给定. 当半径 r 在区间 $(0, +\infty)$ 内任意取定一个数值时,由上式就可以确定圆面积 A 的相应数值.

例 1.1.6　自由落体运动. 设物体下落的时间为 t,落下的距离为 s. 假定开始下落的时刻为 $t = 0$, 那么 s 与 t 之间的相依关系由公式

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

给定,其中 g 是重力加速度. 假定物体着地的时刻为 $t = T$, 那么当时间 t 在闭区间 $[0, T]$ 上任意取定一个数值时,由上式就可以确定下落距离 s 的相应数值.

例 1.1.7　武汉某年各月平均气温如表 1-1 所示.

表 1-1

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
平均气温 y/℃	2.7	5.2	10.0	16.2	21.1	26.1	29.1	28.4	23.9	17.6	11.4	5.5

表 1-1 表示了武汉平均气温 y 随着月份 t 变化而变化的关系.

抽去上面几个例子中所考虑的量的实际意义,它们都表达了两个变量之间的相依关系,这种相依关系给出了一种对应法则,根据这一法则,当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时,另一个变量就有确定的值与之对应. 两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 1.1.1　设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的数集. 如果存在对应法则 f,对于每一个数 $x \in D$, 变量 y 总有唯一确定的数值和它对应,则称对应法则 f 是定义在 D 上的**函数**,记为 $y = f(x)$, 数集 D 称为这个函数的**定义域**,记为 D_f,即 $D_f = D$. x 称为**自变量**,y 称为**因变量**.

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时,与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值,记为 $f(x_0)$. 当 x 遍取 D 的各个数值时,对应的函数值全体组成的数集

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x),\ x \in D\}$$

称为函数的**值域**.

函数 $y = f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可改用其他字母,如 φ,F 等. 这时函数就记为 $y = \varphi(x)$, $y = F(x)$ 等.

根据定义,构成函数的要素是定义域 D_f 及对应法则 f. 如果两个函数的定义域相同,对应法则也相同,那么这两个函数就是相同的,否则就是不同的.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 如例 1.1.5 中，定义域 $D_f=(0, +\infty)$；在例 1.1.6 中，定义域 $D_f=[0, T]$；在例 1.1.7 中，定义域 $D_f=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

在数学中，有时不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用算式表达的函数. 这时约定：**函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值.** 例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间 $[-1, 1]$，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是开区间 $(-1, 1)$.

例 1.1.8　求函数 $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{x^2-4}$ 的定义域.

要使函数有意义，必须 $x\neq 0$，且 $x^2-4\geqslant 0$. 解不等式得 $|x|\geqslant 2$. 所以函数的定义域为

$$D=\{x \mid |x|\geqslant 2\} \quad 或 \quad D=(-\infty, 2]\cup[2, +\infty)$$

由于自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值总是只有一个，因此也称**单值函数**，如果给定一个对应法则，对每个 $x\in D$，总有确定的 y 值与之对应，但这个 y 不总是唯一的，那么对于这样的对应法则并不符合函数的定义，习惯上我们称这种法则确定了一个**多值函数**.

例 1.1.9　在直角坐标系中，半径为 r、圆心在原点的圆的方程是 $x^2+y^2=r^2$. 当 x 取 $-r$ 或 r 时，对应的 y 值都只有一个，但当 x 取开区间 $(-r, r)$ 的任一个数值时，对应的 y 值有两个. 所以方程确定了一个多值函数.

以后凡是没有特别说明时，函数都是指单值函数. 对于多值函数，往往只要附加一些条件，就可以将它化为单值函数，这样得到的单值函数称为多值函数的单值分支. 例如，在由方程 $x^2+y^2=r^2$ 给出的对应法则中，附加“$y\geqslant 0$”的条件，即以“$x^2+y^2=r^2$ 且 $y\geqslant 0$”作为对应法则，就可得到一个单值分支 $y=y_1(x)=\sqrt{r^2-x^2}$；附加“$y\leqslant 0$”的条件，即以“$x^2+y^2=r^2$ 且 $y\leqslant 0$”作为对应法则，就可得到另一个单值分支 $y=y_2(x)=-\sqrt{r^2-x^2}$.

表示函数的主要方法有表格法、图形法、解析法（公式法）三种，这在中学里大家已经熟悉. 其中，用图形法表示函数是基于函数图形的概念，即坐标平面上的点集

$$\{P(x, y) \mid y=f(x), x\in D_f\}$$

称为函数 $y=f(x)$，$x\in D_f$ 的图形（图 1－3）. 图中的 R_f 表示函数 $y=f(x)$ 的值域.

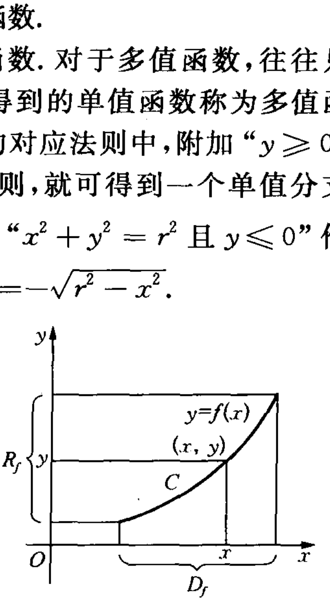

图 1－3

下面举几个函数的例子.

例 1.1.10　函数 $y=1$ 的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $R_f=\{1\}$，它的图形是一条平行于 x 轴的直线，如图 1－4 所示.

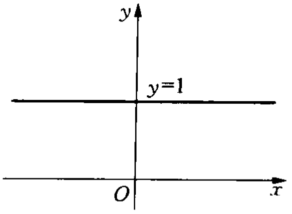

图 1－4

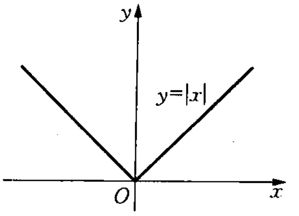

图 1－5

例 1.1.11　函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

称为绝对值函数. 其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $R_f=[0,+\infty)$，如图1－5 所示.

例 1.1.12　函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为符号函数. 其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $R_f=\{-1,0,1\}$，如图1－6 所示.

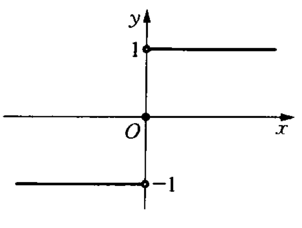

图 1－6

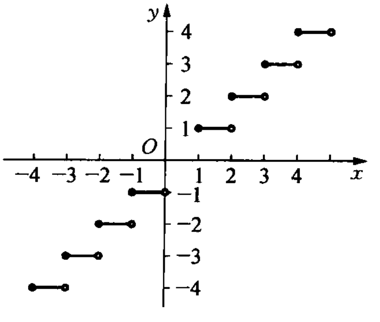

图 1－7

例 1.1.13　设 x 为任意实数. 不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记为 $[x]$. 函数 $y=[x]$ 称为取整函数. 其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $R_f=\mathbf{Z}$（图 1－7）. 例如，$[0.99]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[\pi]=3$，$[-1]=-1$，$[-3.5]=-4$.

在例 1.1.11 和例 1.1.12 中看到，这种在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数，通常称为**分段函数**. 用几个式子来表示一个(不是几个)函数，不仅与函数的定义无矛盾，而且有现实意义. 在自然科学、工程技术和经济学中，经常会遇到分段函数的情形.

例 1.1.14　某商场假日商品促销，商品价格优惠. 标价 100 元以下，售价打 9 折；100 元以上 200 元以下，售价打 8 折；200 元以上，售价打 7 折. 设 y 为购物费用，x 为商品标价，则购物费用与商品标价的函数为

$$y=\begin{cases}0.9x, & 0\leqslant x\leqslant 100,\\ 100\times 0.9+(x-100)\times 0.8, & 100< x\leqslant 200,\\ 100\times 0.9+100\times 0.8+(x-200)\times 0.7, & x>200.\end{cases}$$

三、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$的定义域为 D，数集 $x\subset D$. 如果存在正数 M，使对任一 $x\in X$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$在 X 上**有界**；否则称函数 $f(x)$在 X 上**无界**.

有界函数的图形特点是，函数 $y=f(x)$ 的图形在直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 的之间(图 1-8).

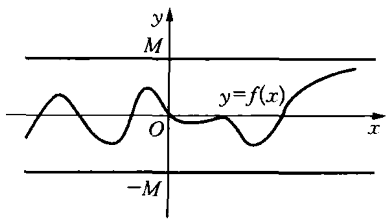

图 1-8

设函数 $f(x)$的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 如果存在数 K_1，使对任一 $x\in X$，有 $f(x)\leqslant K_1$，则称函数 $f(x)$在 X 上有**上界**，而称 K_1 为函数 $f(x)$在 X 上的一个上界. 图形特点是 $y=f(x)$ 的图形在直线 $y=K_1$ 的下方.

如果存在数 K_2，使对任一 $x\in X$，有 $f(x)\geqslant K_2$，则称函数 $f(x)$在 X 上有**下界**，而称 K_2 为函数 $f(x)$在 X 上的一个下界. 图形特点是，函数 $y=f(x)$ 的图形在直线 $y=K_2$ 的上方.

容易证明，函数 $f(x)$在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

例如，就函数 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty, +\infty)$内来说，数 1 是它的一个上界，数 -1是它的一个下界(当然，大于 1 的任何数也是它的上界，小于-1 的任何数也是它的下界). 又 $|\sin x|\leqslant 1$ 对任一实数 x 都成立，故函数 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty, +\infty)$内是有界的. 这里 $M=1$ (当然也可取大于 1 的任何数作为 M 使 $|f(x)|\leqslant M$ 成立). 又如，函数 $f(x)=\ln x$ 在开区间$(0, 1)$内没有下界，但有上界，如 0 就是它的一个上界，所以函数 $f(x)=\ln x$ 在开区间$(0, 1)$内是无界的，但是 $f(x)=$

$\ln x$ 在区间$(1,\ e)$内是有界的，如可取 $M=1$ 而使 $|\ln x|\leqslant 1$ 对于一切 $x\in(1,\ e)$ 都成立.

2. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调增加**的[图 1-9(a)].

如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调减少**的[图 1-9(b)].

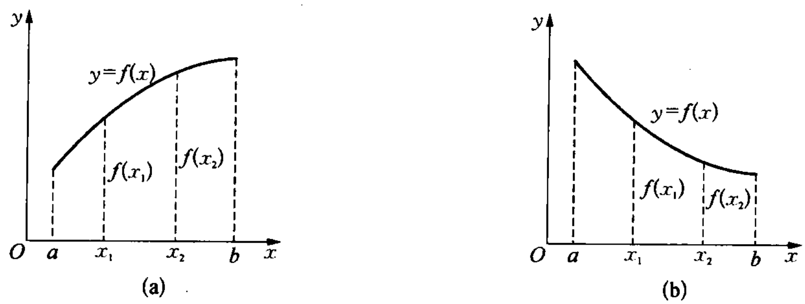

图 1-9

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

例如，函数 $y=\sin x$ 在区间$\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$上是单调增加的，在区间$\left[\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}\right]$上是单调减少的，在$[0,\ 2\pi]$上不是单调的.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称，即若 $x\in D$，则 $-x\in D$. 如果对于任一 $x\in D$，有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$为**偶函数**[图 1-10(a)].

如果对于任一 $x\in D$，有