

21 世纪高等院校教材

微积分

(经管类)

西北工业大学微积分教材编写组 编



科学出版社

www.sciencep.com

21 世纪高等学校本专科规划课改教材

高等数学

上册

熊德之 柳翠华 伍建华 主编

科学出版社

北京

版权所有，侵权必究

举报电话：010-64030229；010-64034315；13501151303

内 容 简 介

本书参照教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的《工科类数学基础课程教学基本要求》编写而成，分上、下两册。上册内容为函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程。附录附有基本初等函数的图形及其主要性质、几种常用的曲线、积分表等内容。本书语言通俗、例题较多，便于自学，并吸收国内外同类教材的优点，以帮助学生提高数学素养，培养学生创新意识和运用数学工具去分析和解决实际问题的能力。

本书可作为高等学校工科类各专业高等数学课程的教材，也可作为相近学科或经济、管理类专业的数学教材和教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/熊德之, 柳翠华, 伍建华主编. —北京: 科学出版社, 2009
21 世纪高等学校本专科规划课改教材
ISBN 978-7-03-024948-7

I. 高… II. ①熊…②柳…③伍… III. 高等数学—高等学校—教材
IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 112735 号

责任编辑：王雨舸 曾 莉 / 责任校对：董艳辉
责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

<http://www.sciencep.com>

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 7 月第一版	开本：B5(720×1000)
2009 年 7 月第一次印刷	印张：18 3/4
印数：1—4 000	字数：365 000

定价：31.50 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前 言

进入 21 世纪,科学技术飞速发展,知识更替日新月异,这是一个催人奋进的时代.我国的高等教育已迈入大众化的发展轨道,独立学院、高职高专学生占了大学生总数的“半壁江山”.在新的形势下,高等数学的课时却还在减少,这对高等数学的教学提出了更高的要求,同时,出版新的应用型高等数学教材,以满足高等教育改革和发展的需要,就显得更加紧迫.

本书是高等学校本专科规划课改教材,主要面向独立学院等应用型本专科的高等数学课程.在编写过程中,我们着力加强基本概念,突出素质培养,注重实际应用.对基本概念、基本理论的叙述,力求准确、简明,便于理解和掌握.对知识的深度和难度,以必需、够用为原则,重视数学思想方法的传授,避免烦琐理论推导,力求通俗好懂,易教易学.对于书中标有“*”号的内容,专科层次的教学可以不作要求,本科层次的教学可根据需要选用.

本书由熊德之负责制定编写大纲,并分上、下两册出版.全书分为 11 章,第 1 章、第 7 章由伍建华编写;第 2 章、第 3 章由柳翠华编写;第 4 章、第 5 章由熊德之编写;第 6 章、第 10 章由阮正顺编写;第 8 章、第 9 章由杨雪帆编写;第 11 章由陈君编写.全书由熊德之、柳翠华、伍建华统稿、定稿.

由于作者水平所限,加上成书时间又很仓促,书中的不足之处实属难免.恳请各位老师和读者对书中的疏漏和不足不吝赐教,以便今后再版时予以修订.

编 者

2009 年 5 月

目 录

第 1 章 函数与极限	1
§ 1.1 函数	1
一、集合与区间	1
二、函数概念	3
三、函数的几种特性	7
四、反函数	9
五、复合函数、初等函数	10
习题 1-1	12
§ 1.2 数列的极限	13
一、数列极限的定义	13
二、数列极限的性质	19
习题 1-2	20
§ 1.3 函数的极限	21
一、自变量趋于有限值时函数的极限	21
二、自变量趋于无穷大时函数的极限	24
三、函数极限的性质	26
习题 1-3	27
§ 1.4 无穷小与无穷大	27
一、无穷小	28
二、无穷大	30
三、无穷小的比较	32
习题 1-4	34
§ 1.5 极限运算法则	35
习题 1-5	40
§ 1.6 极限存在准则 两个重要极限	41
一、夹逼准则	41
二、单调有界收敛准则	44
习题 1-6	49
§ 1.7 函数的连续性与间断点	50

一、函数的连续性	50
二、函数的间断点	54
三、连续函数的运算与初等函数的连续性	56
习题 1-7	58
§ 1.8 闭区间上连续函数的性质	59
一、最值与有界性定理	59
二、零点定理与介值定理	60
习题 1-8	62
总习题 1	62
第 2 章 导数与微分	65
§ 2.1 导数概念	65
一、引例及定义	65
二、求导数举例	68
三、导数的几何意义	71
四、可导性与连续性之间的关系	71
习题 2-1	72
§ 2.2 求导法则	73
一、四则求导法则	74
二、反函数求导法则	76
三、复合函数求导法则	78
四、基本求导公式	80
习题 2-2	81
§ 2.3 高阶导数	82
习题 2-3	84
§ 2.4 隐函数及参数方程所确定的函数的导数	85
一、隐函数的导数	85
二、由参数方程所确定的函数的导数	89
三、相关变化率	91
习题 2-4	92
§ 2.5 函数的微分	93
一、微分的概念	93
二、微分公式与微分法则	96
三、微分在近似计算中的应用	98
习题 2-5	100
总习题 2	101

第3章 微分中值定理与导数的应用	102
§ 3.1 微分中值定理	102
一、罗尔中值定理	102
二、拉格朗日中值定理	105
三、柯西中值定理	107
习题3-1	109
§ 3.2 洛必达法则	109
习题3-2	115
§ 3.3 泰勒公式	116
习题3-3	119
§ 3.4 函数的单调性	119
习题3-4	122
§ 3.5 函数的极值与最值	123
一、函数的极值	123
二、最大值、最小值问题	127
习题3-5	129
§ 3.6 曲线的凹凸性 函数图形的描绘	131
一、曲线的凹凸性及拐点	131
二、函数图形的描绘	134
习题3-6	139
*§ 3.7 曲率	139
一、弧微分	139
二、曲率	140
三、曲率圆与曲率半径	143
习题3-7	144
总习题3	145
第4章 不定积分	147
§ 4.1 不定积分的概念与性质	147
一、原函数与不定积分	147
二、基本积分公式	150
三、不定积分的性质	151
四、直接积分法	151
习题4-1	152
§ 4.2 换元积分法	153
一、第一类换元法	154

二、第二类换元法	159
习题 4-2	163
§ 4.3 分部积分法	165
习题 4-3	169
§ 4.4 有理函数和可化为有理函数的积分	169
一、有理函数的积分	169
二、三角函数有理式的积分	173
三、简单无理函数的积分	174
四、积分表的使用	175
习题 4-4	177
总习题 4	177
第 5 章 定积分及其应用	179
§ 5.1 定积分的概念与性质	179
一、定积分问题举例	179
二、定积分定义	181
三、定积分的性质	183
习题 5-1	186
§ 5.2 微积分基本公式	187
一、积分上限的函数及其导数	187
二、牛顿-莱布尼茨公式	189
习题 5-2	193
§ 5.3 定积分的换元法与分部积分法	194
一、定积分的换元法	194
二、定积分的分部积分法	197
习题 5-3	200
§ 5.4 反常积分	201
一、无穷限的反常积分	201
二、无界函数的反常积分	203
习题 5-4	206
§ 5.5 定积分的元素法 平面图形的面积	206
一、定积分的元素法	206
二、平面图形的面积	208
习题 5-5	213
§ 5.6 体积与弧长	214
一、立体的体积	214

二、平面曲线的弧长	217
习题 5-6	219
§ 5.7 定积分在物理上的应用	220
一、变力沿直线所做的功	220
二、水压力	223
三、引力	223
习题 5-7	224
总习题 5	225
第 6 章 常微分方程	227
§ 6.1 微分方程的基本概念	227
习题 6-1	229
§ 6.2 可分离变量的微分方程	229
习题 6-2	234
§ 6.3 齐次方程	234
习题 6-3	238
§ 6.4 一阶线性微分方程	239
习题 6-4	243
§ 6.5 可降阶的高阶微分方程	243
一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程	243
二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程	244
三、 $y'' = f(y, y')$ 型的微分方程	246
习题 6-5	247
§ 6.6 二阶线性微分方程	248
一、二阶线性微分方程解的结构	248
二、二阶常系数齐次线性微分方程	250
三、二阶常系数非齐次线性微分方程	253
习题 6-6	257
总习题 6	257
附录 A 基本初等函数的图形及其主要性质	260
附录 B 几种常用的曲线	263
附录 C 积分表	266
附 习题答案与提示	275

第 1 章 函数与极限

初等数学的研究对象基本上是不变的量,而高等数学则以变量为研究对象.对客观世界的量与量的依赖关系的研究,产生了函数与函数极限的概念.函数概念就是对现实世界中量与量的依赖关系的抽象描述,是刻画现实世界中变量之间相依关系的数学模型,也是高等数学研究的主要对象.极限是刻画变化过程中变量的变化趋势的数学模型,是研究变量的一种基本方法.在中学数学里,通常突出的是极限的描述性定义,微积分则必须强调精确的、定量的极限定义.

本章在总结和推广中学所学过的函数概念及一些主要函数的基础上,将介绍函数与极限的基本概念、性质和运算,并利用极限描述函数的连续性.连续函数是最常见的一类函数,它具有一系列很好的性质和基本运算,微分理论将以连续函数为主要对象.

§ 1.1 函 数

一、集合与区间

1. 集合概念

集合是现代数学的基本语言,可以简洁准确地表达数学内容.在现代数学中,每个对象(如数、函数等)本质上都是集合,都可以用某种集合来定义.在中学已经接触过集合的概念,如自然数的集合、有理数的集合等.集合(简称集)是指具有某种特定性质的事物的总体.构成集合的每一个对象称为该集合的元素.习惯上,集合常用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示;元素常用小写字母 $a, b, c, x, \dots$ 表示.

设 A 是一个集合,若 a 是 A 的元素,则说 a 属于 A ,记为 $a \in A$;若 a 不是 A 的元素,则说 a 不属于 A ,记为 $a \notin A$ 或 $a \notin A$.

下面举几个例子:

例 1.1.1 某班 9 月 1 日出生的全体同学.

例 1.1.2 某商场的全部电视机.

例 1.1.3 单位圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上所有的点.

例 1.1.4 某班全体高个子同学.

例 1.1.1、例 1.1.2、例 1.1.3 是集合, 例 1.1.4 不是集合.

注意 集合的元素具有确定性、互异性、无序性三个特征. 确定性是指构成集合的元素具有明确的特征, 而某一元素在集合 A 中或不在集合 A 中二者必居其一, 能够明确地区分, 不能模棱两可. 互异性是指集合中不同的字母表示不同的元素, 而同一元素在集合中不能重复. 无序性是指集合的构成与元素的顺序无关, 构成集合的元素相同而仅排列的顺序不同应认为是同一个集合.

由有限个元素组成的集合称为有限集, 如例 1.1.1、例 1.1.2; 由无限个元素组成的集合称为无限集, 如例 1.1.3; 不含任何元素的集合称为空集, 记为 $\emptyset$.

集合的表示一般有两种方法:

(1) 列举法. 把集合的全体元素一一列举出来, 要求元素既不能重复, 又不能遗漏. 例如, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $C = \{\text{红, 黄, 蓝}\}$.

(2) 描述法. 若集合 M 是由元素具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成, 则 M 可表示为 $M = \{x | x \text{ 具有性质 } P\}$.

例如, $M = \{(x, y) | x, y \text{ 为实数, } x^2 + y^2 = 1\}$.

设 A, B 是两个集合, 如果集合 A 的元素是集合 B 的元素, 则称 A 是 B 的子集. 即若 $x \in A$, 则必有 $x \in B$, 则称 A 是 B 的子集, 记为 $A \subset B$ (读作 A 包含于 B) 或 $B \supset A$.

如果集合 A 与集合 B 互为子集, 即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称集合 A 与集合 B 相等, 记为 $A = B$.

若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$, 则称 A 是 B 的真子集, 记为 $A \subsetneq B$. 规定空集是任何集合的子集.

由数组成的集合称为数集. 有时我们在表示数集的字母的右上角标上“+”、“-”等上标, 来表示该数集的特定的子集.

$\mathbf{N}$ 表示所有自然数构成的集合, 称为自然数集.

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}, \quad \mathbf{N}^+ = \{1, 2, \dots, n, \dots\}.$$

$\mathbf{R}$ 表示所有实数构成的集合, 称为实数集; $\mathbf{R}^+$ 表示正实数集.

$\mathbf{Z}$ 表示所有整数构成的集合, 称为整数集.

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}.$$

$\mathbf{Q}$ 表示所有有理数构成的集合, 称为有理数集.

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^+ \text{ 且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质} \right\}.$$

显然, $\mathbf{N} \subsetneq \mathbf{Z} \subsetneq \mathbf{Q} \subsetneq \mathbf{R}$.

2. 区间和邻域

设 a, b 为实数, 且 $a < b$, 称数集 $\{x | a < x < b\}$ 为开区间, 记为 (a, b) , 即

$(a, b) = \{x | a < x < b\}$, 如图 1-1(a) 所示. 类似地有 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间, 如图 1-1(b) 所示; $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$ 称为半开区间. 这三类区间称为有限区间, 其中, a 和 b 称为区间 (a, b) , $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ 的端点, $b - a$ 称为区间的长度.

$[a, +\infty) = \{x | a \leq x\}$ [图 1-1(c)], $(-\infty, b] = \{x | x \leq b\}$ [图 1-1(d)], $(-\infty, +\infty) = \{x | |x| < +\infty\}$ 称为无限区间.

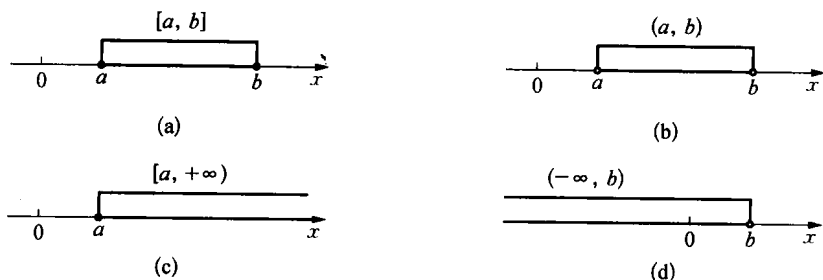


图 1-1

以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域, 记为 $U(a)$.

设 δ 是一正数, 则称开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 为点 a 的 δ 邻域, 记为 $U(a, \delta)$, 即

$$U(a, \delta) = \{x | a - \delta < x < a + \delta\} = \{x | |x - a| < \delta\}.$$

其中, 点 a 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径 (图 1-2).

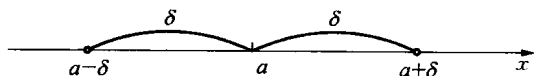


图 1-2

有时在讨论邻域 $U(a, \delta)$ 时, 并不关心中心点 a , 甚至需要把中心点 a 去掉, 这种去掉中心点的邻域称为去心邻域, 记为 $\dot{U}(a, \delta)$, 即

$$\dot{U}(a, \delta) = \{x | 0 < |x - a| < \delta\}$$

邻域是一个开区间, 则 $(a - \delta, a)$ 称为 a 的左 δ 邻域; $(a, a + \delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域.

二、函数概念

在同一自然现象或技术过程中, 往往同时有几个变量在变化着. 这几个变量并不是孤立地在变, 而是相互联系并遵循着一定的变化规律. 在此先就两个变量的情形 (多于两个变量的情形以后再讲) 举几个例子.

例 1.1.5 考虑圆的面积 A 与它的半径 r 之间的相依关系. 大家知道, 它们之间的关系由公式

$$A = \pi r^2$$

给定. 当半径 r 在区间 $(0, +\infty)$ 内任意取定一个数值时, 由上式就可以确定圆面积 A 的相应数值.

例 1.1.6 自由落体运动. 设物体下落的时间为 t , 落下的距离为 s . 假定开始下落的时刻为 $t = 0$, 那么 s 与 t 之间的相依关系由公式

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

给定, 其中 g 是重力加速度. 假定物体着地的时刻为 $t = T$, 那么当时间 t 在闭区间 $[0, T]$ 上任意取定一个数值时, 由上式就可以确定下落距离 s 的相应数值.

例 1.1.7 武汉某年各月平均气温如表 1-1 所示.

表 1-1

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
平均气温 $y/^\circ\text{C}$	2.7	5.2	10.0	16.2	21.1	26.1	29.1	28.4	23.9	17.6	11.4	5.5

表 1-1 表示了武汉平均气温 y 随着月份 t 变化而变化的关系.

抽去上面几个例子中所考虑的量的实际意义, 它们都表达了两个变量之间的相依关系, 这种相依关系给出了一种对应法则, 根据这一法则, 当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时, 另一个变量就有确定的值与之对应. 两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 1.1.1 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的数集. 如果存在对应法则 f , 对于每一个数 $x \in D$, 变量 y 总有唯一确定的数值和它对应, 则称对应法则 f 是定义在 D 上的函数, 记为 $y = f(x)$, 数集 D 称为这个函数的定义域, 记为 D_f , 即 $D_f = D$. x 称为自变量, y 称为因变量.

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时, 与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值, 记为 $f(x_0)$. 当 x 遍取 D 的各个数值时, 对应的函数值全体组成的数集

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数的值域.

函数 $y = f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可改用其他字母, 如 φ, F 等. 这时函数就记为 $y = \varphi(x)$, $y = F(x)$ 等.

根据定义, 构成函数的要素是定义域 D_f 及对应法则 f . 如果两个函数的定义域相同, 对应法则也相同, 那么这两个函数就是相同的, 否则就是不同的.

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的.如例 1.1.5 中,定义域 $D_f = (0, +\infty)$;在例 1.1.6 中,定义域 $D_f = [0, T]$;在例 1.1.7 中,定义域 $D_f = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

在数学中,有时不考虑函数的实际意义,而抽象地研究用算式表达的函数.这时约定:函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值.例如,函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间 $[-1, 1]$,函数 $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是开区间 $(-1, 1)$.

例 1.1.8 求函数 $y = \frac{1}{x} - \sqrt{x^2 - 4}$ 的定义域.

要使函数有意义,必须 $x \neq 0$, 且 $x^2 - 4 \geq 0$. 解不等式得 $|x| \geq 2$. 所以函数的定义域为

$$D = \{x \mid |x| \geq 2\} \quad \text{或} \quad D = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

由于自变量在定义域内任取一个数值时,对应的函数值总是只有一个,因此也称**单值函数**,如果给定一个对应法则,对每个 $x \in D$, 总有确定的 y 值与之对应,但这个 y 不总是唯一的,那么对于这样的对应法则并不符合函数的定义,习惯上我们称这种法则确定了一个**多值函数**.

例 1.1.9 在直角坐标系中,半径为 r 、圆心在原点的圆的方程是 $x^2 + y^2 = r^2$. 当 x 取 $-r$ 或 r 时,对应的 y 值都只有一个,但当 x 取开区间 $(-r, r)$ 的任一个数值时,对应的 y 值有两个. 所以方程确定了一个多值函数.

以后凡是没有特别说明时,函数都是指单值函数. 对于多值函数,往往只要附加一些条件,就可以将它化为单值函数,这样得到的单值函数称为多值函数的单值分支. 例如,在由方程 $x^2 + y^2 = r^2$ 给出的对应法则中,附加“ $y \geq 0$ ”的条件,即以“ $x^2 + y^2 = r^2$ 且 $y \geq 0$ ”作为对应法则,就可得到一个单值分支 $y = y_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$; 附加“ $y \leq 0$ ”的条件,即以“ $x^2 + y^2 = r^2$ 且 $y \leq 0$ ”作为对应法则,就可得到另一个单值分支 $y = y_2(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$.

表示函数的主要方法有表格法、图形法、解析法(公式法)三种,这在中学里大家已经熟悉. 其中,用图形法表示函数是基于函数图形的概念,即坐标平面上的点集

$$\{P(x, y) \mid y = f(x), x \in D_f\}$$

称为函数 $y = f(x)$, $x \in D_f$ 的图形(图 1-3). 图中的 R_f 表示函数 $y = f(x)$ 的值域.

下面举几个函数的例子.

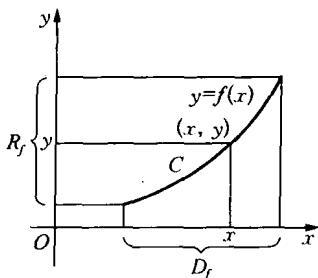


图 1-3

例 1.1.10 函数 $y = 1$ 的定义域为 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域为 $R_f = \{1\}$, 它的图形是一条平行于 x 轴的直线, 如图 1-4 所示.

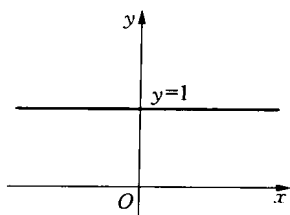


图 1-4

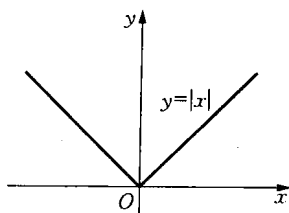


图 1-5

例 1.1.11 函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

称为绝对值函数. 其定义域为 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域为 $R_f = [0, +\infty)$, 如图 1-5 所示.

例 1.1.12 函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

称为符号函数. 其定义域为 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域为 $R_f = \{-1, 0, 1\}$, 如图 1-6 所示.

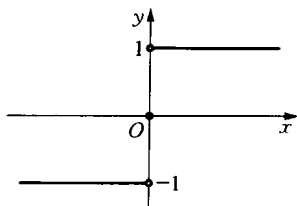


图 1-6

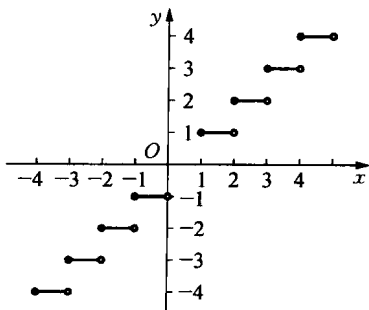


图 1-7

例 1.1.13 设 x 为任意实数. 不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分, 记为 $[x]$. 函数 $y = [x]$ 称为取整函数. 其定义域为 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域为 $R_f = \mathbf{Z}$ (图 1-7). 例如, $[0.99] = 0$, $[\sqrt{2}] = 1$, $[\pi] = 3$, $[-1] = -1$, $[-3.5] = -4$.

在例 1.1.11 和例 1.1.12 中看到,这种在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同式子来表示的函数,通常称为**分段函数**.用几个式子来表示一个(不是几个)函数,不仅与函数的定义无矛盾,而且有现实意义.在自然科学、工程技术和经济学中,经常会遇到分段函数的情形.

例 1.1.14 某商场假日商品促销,商品价格优惠.标价 100 元以下,售价打 9 折;100 元以上 200 元以下,售价打 8 折;200 元以上,售价打 7 折.设 y 为购物费用, x 为商品标价,则购物费用与商品标价的函数为

$$y = \begin{cases} 0.9x, & 0 \leq x \leq 100, \\ 100 \times 0.9 + (x - 100) \times 0.8, & 100 < x \leq 200, \\ 100 \times 0.9 + 100 \times 0.8 + (x - 200) \times 0.7, & x > 200. \end{cases}$$

三、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X \subset D$. 如果存在正数 M , 使对任一 $x \in X$, 有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有**界**; 否则称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**.

有界函数的图形特点是, 函数 $y = f(x)$ 的图形在直线 $y = -M$ 和 $y = M$ 的之间(图 1-8).

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X \subset D$. 如果存在数 K_1 , 使对任一 $x \in X$, 有 $f(x) \leq K_1$, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有**上界**, 而称 K_1 为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个**上界**. 图形特点是 $y = f(x)$ 的图形在直线 $y = K_1$ 的下方.

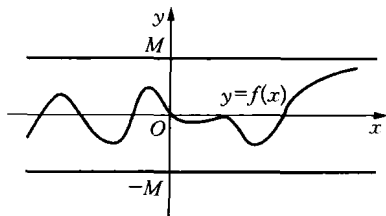


图 1-8

如果存在数 K_2 , 使对任一 $x \in X$, 有 $f(x) \geq K_2$, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有**下界**, 而称 K_2 为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个**下界**. 图形特点是, 函数 $y = f(x)$ 的图形在直线 $y = K_2$ 的上方.

容易证明, 函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

例如, 就函数 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内来说, 数 1 是它的一个上界, 数 -1 是它的一个下界(当然, 大于 1 的任何数也是它的上界, 小于 -1 的任何数也是它的下界). 又 $|\sin x| \leq 1$ 对任一实数 x 都成立, 故函数 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的. 这里 $M = 1$ (当然也可取大于 1 的任何数作为 M 使 $|f(x)| \leq M$ 成立). 又如, 函数 $f(x) = \ln x$ 在开区间 $(0, 1)$ 内没有下界, 但有上界, 如 0 就是它的一个上界, 所以函数 $f(x) = \ln x$ 在开区间 $(0, 1)$ 内是无界的, 但是 $f(x) =$

$\ln x$ 在区间 $(1, e)$ 内是有界的, 如可取 $M = 1$ 而使 $|\ln x| \leq 1$ 对于一切 $x \in (1, e)$ 都成立.

2. 函数的单调性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的[图 1-9(a)].

如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的[图 1-9(b)].

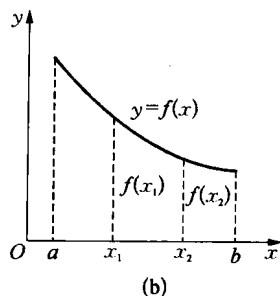
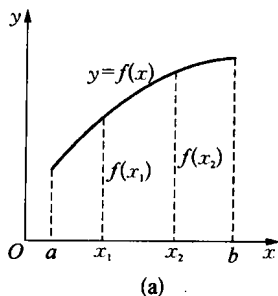


图 1-9

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

例如, 函数 $y = \sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调增加的, 在区间 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上是单调减少的, 在 $[0, 2\pi]$ 上不是单调的.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 即若 $x \in D$, 则 $-x \in D$. 如果对于任一 $x \in D$, 有

$$f(-x) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数[图 1-10(a)].

如果对于任一 $x \in D$, 有