工程数学
（线性代数）

高等教育自学考试同步辅导/同步训练

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

MFEB

（公共课程）

杨胜友　夏爱生　辛欣/主编

煤炭工业出版社

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

高等教育自学考试同步辅导/同步训练

工程数学

线性代数

主　编　杨胜友　夏爱生　辛　欣

煤炭工业出版社

图书在版编目（CIP）数据

工程数学．线性代数/杨胜友等主编．—北京：煤炭工业出版社，2001.12

（高等教育自学考试同步辅导/同步训练）

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

ISBN 7-5020-2112-4

Ⅰ．工…　Ⅱ．杨…　Ⅲ．①工程数学—高等教育—自学考试—自学参考资料②线性代数—高等教育—自学考试—自学参考资料　Ⅳ．TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）第 082399 号

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书
高等教育自学考试同步辅导/同步训练

工　程　数　学

线 性 代 数

杨胜友　夏爱生　辛欣　主编

责任编辑：王铁根

煤炭工业出版社　出版

（北京市朝阳区芍药居 35 号　100029）

北京交通印务实业公司　印刷

新华书店北京发行所　发行

开本 880×1230mm $^{1}/_{32}$　印张 $11^{1}/_{2}$

字数 325 千字　印数 1—10,000

2001 年 12 月第 1 版　2001 年 12 月第 1 次印刷

社内编号 4883　定价 16.00 元

说　明

本书是全国高等教育自学考试指定教材《工程数学(线性代数)》自学考试大纲、指定教材的配套辅导用书。

编写依据:

1. 全国高等教育自学考试指导委员会颁布的《工程数学(线性代数)自学考试大纲》;

2. 全国高等教育自学考试指导委员会组编的指定教材《工程数学(线性代数)》(魏战线主编,辽宁大学出版社出版)。

本书特点:

1. 本书与指定教材同步,共分五章:矩阵和行列式,向量空间,矩阵的秩与线性方程组,特征值与特征向量,实二次型。线性代数是理工科各专业的必修课程之一,它的理论性和应用性都较强,概念较多,有些内容比较抽象。为了便于自学,使读者能更好地掌握本课程的基本内容,在本书的编写过程中,力求做到科学性和通俗性相结合。

2. 全书以自学考试大纲规定的考核知识点及能力层次为线索,按指定教材分章辅导,每章针对考核要求,列出本章内容提要,对每一个知识点按照实际考题类型配备了大量例题,归入例题分析,给出详尽的解答及分析,并配备了大量同步练习(附参考答案)。

3. 最后附两套模拟试卷(含参考答案),综合了考试大纲和教材对应试者的要求,能帮助应试考生迅速而全面地掌握本课程的内容、熟悉题型,取得理想的应试效果。

本书亦是编者长期从事该课程教学、多年从事该课程自学考试辅导的经验的结晶。相信本书的出版,对广大考生学习本课程具有切实的指导意义。

编写高质量的全国高等教育自学考试辅导用书，是社会助学的一个重要环节。毫无疑问，这是一项艰难而有意义的工作，需要社会各方面的关怀与支持，使它在使用中不断提高和日臻完善。

限于编者的学识与水平，疏漏之处敬请读者批评指正。

编　者

2001 年 11 月

目　录

第一章　矩阵和行列式……………………………………………… (1)
内容提要……………………………………………………………… (1)
例题分析……………………………………………………………… (7)
同步练习 …………………………………………………………… (95)
参考答案 …………………………………………………………… (98)
第二章　向量空间………………………………………………… (107)
内容提要…………………………………………………………… (107)
例题分析…………………………………………………………… (110)
同步练习…………………………………………………………… (150)
参考答案…………………………………………………………… (157)
第三章　矩阵的秩与线性方程组………………………………… (177)
内容提要…………………………………………………………… (177)
例题分析…………………………………………………………… (181)
同步练习…………………………………………………………… (228)
参考答案…………………………………………………………… (236)
第四章　特征值与特征向量……………………………………… (260)
内容提要…………………………………………………………… (260)
例题分析…………………………………………………………… (265)
同步练习…………………………………………………………… (296)
参考答案…………………………………………………………… (299)
第五章　实二次型………………………………………………… (320)
内容提要…………………………………………………………… (320)
例题分析…………………………………………………………… (323)
同步练习…………………………………………………………… (339)
参考答案…………………………………………………………… (341)
模拟试卷一………………………………………………………… (351)
参考答案…………………………………………………………… (355)
模拟试卷二………………………………………………………… (357)
参考答案…………………………………………………………… (360)

第一章　矩阵和行列式

内容提要

一、矩阵的概念及其运算

1. 矩阵的定义

矩阵：$m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 $m\times n$ 矩阵，简记为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $A=(a_{ij})$。当 $m=n$ 时，称为 n 阶方阵或 n 阶矩阵.

2. 矩阵相等

两个行数相同、列数相同的矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，矩阵 A 与 B 称为同型矩阵.

若两个同型矩阵 A 与 B 的对应元素分别相等，即 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$.

3. 矩阵的加法

设同型矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，则定义 $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$.

且满足运算律：$A+B=B+A$；

$$(A+B)+C=A+(B+C).$$

4. 数与矩阵的乘法

设 k 为常数，$A=(a_{ij})_{m\times n}$，则定义 $kA=Ak=(ka_{ij})_{m\times n}$，

且满足运算律：$k(A+B)=kA+kB$；

$$(k+t)A = kA + tA \quad (k, t \text{ 均的常数});$$
$$(kt)A = k(tA) = t(kA).$$

5. 矩阵的乘法

设 $A=(a_{ij})_{m\times s}$,$B=(b_{ij})_{s\times n}$,则 $AB=C$,C 是 $m\times n$ 矩阵,设 $C=(c_{ij})_{m\times n}$有

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}.$$

且满足运算律:$(AB)C=A(BC)$;

$$A(B+C)=AB+AC;$$
$$(B+C)A=BA+CA;$$
$$k(AB)=(kA)B=A(kB)(k \text{ 为常数}).$$

相乘时应注意,A 的列数等于 B 的行数时,A 与 B 才能相乘.但乘法没有交换律,即一般 $AB\neq BA$,因此左乘、右乘(或提公因子往左、往右)是不同的.

当 A,B 均为方阵时,有 $|AB|=|A||B|$.

A 是方阵时,记$\overbrace{AA\cdots A}^{m}=A^m$,称为 A 的 m 次幂,若 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$,则

$$f(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_nA^n.$$

6. 矩阵的转置

将 $A=(a_{ij})_{m\times n}$的行和列互换得到的矩阵称为A 的转置阵,记为 A^T,即

$$A^T=(a_{ji})_{n\times m}.$$

且满足运算律:$(A^T)^T=A$;

$$(A+B)^T=A^T+B^T;$$
$$(kA)^T=kA^T \quad (k \text{ 为常数});$$
$$(AB)^T=B^TA^T.$$

7. 方阵的行列式

若 $A=(a_{ij})n\times n$,则称 $det(A)=|A|$为 n 阶方阵的行列式.

且满足运算律:$|A^T|=|A|$;

$$|kA|=k^n|A|(k \text{ 为常数}).$$

二、逆矩阵

(1)设 A 为 n 阶方阵,若存在 n 阶方阵 B,满足

$$AB=BA=E.$$

则称 A 是可逆的,并称 B 为 A 的逆矩阵,记为 $B=A^{-1}$,即

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E.$$

若 A 可逆,则逆矩阵是唯一的.且满足运算律:

$$(A^{-1})^{-1}=A;$$

$$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1};$$

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1};$$

$$(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T};$$

$$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}.$$

(2)方阵 A 可逆的充要条件是 $|A|\neq0$,且

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}.$$

其中 A^{*} 称为 A 的伴随矩阵,记 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij},则 $A^{*}=(A_{ij})_{n\times n}^{T}$.

任意 n 阶方阵 $A(n\geqslant2)$ 与它的伴随矩阵 A^{*} 之间有关系

$$AA^{*}=A^{*}A=det(A)E.$$

三、初等变换和初等矩阵

1.初等变换

称以下三种变换为矩阵的初等变换.

(1)交换矩阵的两行(列);

(2)用非零数乘某行(列);

(3)某行(列)的 k 倍加到另一行(列).

2.初等矩阵

单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

矩阵 A 经过若干次初等变换后得到 B,则称 A、B 是等价矩阵,记成 $A\sim B$.

初等矩阵都可逆,且其逆矩阵也是初等矩阵.

初等矩阵的转置矩阵也是初等矩阵.

可逆阵可以表示为有限个初等矩阵的乘积.

3. 初等矩阵与初等变换的关系

初等矩阵左乘(右乘)A,相当于对 A 进行一次相应的初等行(列)变换.

4. 矩阵的标准形

(1)对任何 $m\times n$ 矩阵,必可经过初等行变换化为阶梯形矩阵.特别对于 n 阶方阵,可以化为上三角形矩阵.

(2)任何 $m\times n$ 矩阵 A,必可经过初等变换化为形如 $B=\begin{pmatrix}E_r & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$的矩阵,称 B 为 A 的标准形.

利用初等变换与初等矩阵的关系,又可以说,对任何 $m\times n$ 矩阵 A,必存在 m 阶初等矩阵 $P_1,P_2,\cdots P_s$;n 阶初等矩阵 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_t$,使得

$$P_1P_2\cdots P_sAQ_1Q_2\cdots Q_t=\begin{pmatrix}E_r & 0\\0 & 0\end{pmatrix}.$$

若记 $P_1P_2\cdots P_s=P$, $Q_1Q_2\cdots Q_t=Q$,则 P、Q 分别为 m 阶、n 阶可逆矩阵.即存在 m 阶及 n 阶可逆矩阵 P、Q,使得

$$PAQ=\begin{pmatrix}E_r & 0\\0 & 0\end{pmatrix}.$$

5. 用初等变换求逆矩阵

$$(A\vdots E)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(E\vdots A^{-1}).$$

$$\begin{pmatrix}A\\ \cdots\\ E\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{pmatrix}E\\ \cdots\cdots\\ A^{-1}\end{pmatrix}.$$

四、分块矩阵

1. 将矩阵 A 按照行线或列线分成若干个子块,将 A 看成由若干个小矩阵块构成,称为分块矩阵.

2. 分块矩阵的运算

加法:分块法一致,对应块相加.

数乘:数乘各小矩阵块.

乘法:A 的列的分法和 B 的行的分法一致才能相乘,分块阵相乘同普通的矩阵乘法.

3. 转置

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix}.$$

$$A^T=\begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T & \cdots & A_{1s}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{2s}^T \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1}^T & A_{r2}^T & \cdots & A_{rs}^T \end{bmatrix}.$$

4. 准对角矩阵

形如

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}$$

其中 A_i 为 n_i 阶方阵($i=1,2,\cdots,s$)的矩阵称为准对角矩阵.此时,

$$|A|=|A_1|\cdot|A_2|\cdots|A_s|.$$

若每一个 A_i 都可逆,则 A 也可逆,且

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{bmatrix}$$

5. $A=\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & D \end{pmatrix}$,$|B|\neq 0$,$|C|\neq 0$,则

$|A|=(-1)^{mn}|B||C|\neq 0$,$B$ 是 n 阶方阵,C 是 m 阶方阵,A 是 $m+n$ 阶方阵.且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & C^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

6. $A=\begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$，$|B|\neq 0$，$|C|\neq 0$，则$|A|=|B||C|\neq 0$，且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

$A=\begin{pmatrix} B & 0 \\ D & C \end{pmatrix}$，$|B|\neq 0$，$|C|\neq 0$，则$|A|=|B||C|\neq 0$，且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

五、行列式

1. n 阶行列式的定义

$$det(A)=\sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)}(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

其中$\sum\limits_{(j_1,j_2,\cdots,j_n)}$表示对所有 n 级排列求和，故共有 $n!$ 项，$\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)$表示排列的逆序数. 由于行下标已顺排，而列下标是任一个 n 元排列，故每项由取自不同行不同列的 n 个元素的乘积组成，每项的符号决定于$(-1)^{\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)}$，即若列下标 $j_1,j_2,\cdots,j_n$，是奇排列时，则附加负号，否则附加正号.

2. 行列式的性质

(1)行与列互换，其行列式值不变；

(2)两行(列)互换位置，行列式变号；

(3)某行(列)有公因子，可提到行列式外面；

(4)若有两行(列)对应成比例，其行列式为零；

(5)将某行(列)各元素乘以同一数加到另一行(列)的对应元素上去，行列式值不变；

(6)行列式某行(列)元素均是两元素之和，则可拆开成两个行列式之和.

3. 行列式按行(列)展开

设 D 为 n 阶行列式，则有

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}$$
$$=\begin{cases} D, i=k \\ 0, i\neq k \end{cases}(i=1,2,\cdots,n);$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk}$$
$$= \begin{cases} D, j=k \\ 0, j\neq k \end{cases} (j=1,2,\cdots,n).$$

4. 克莱姆法则

(1)若 $n\times n$ 非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式 $D\neq 0$,则方程组有唯一解:

$$x_i = D_i/D, i=1,2,\cdots,n.$$

其中 D_i 是D 中第 i 列元素(即 x_i 的系数)换成方程中右端常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 所构成的行列式.

(2)若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数行列式 $D\neq 0$,则方程组只有唯一零解.

若齐次线性方程组有非零解,则其系数行列式 $D=0$.

例题分析

例 1. 计算下列各题

(1)$3\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

(2)$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&2\\3&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3&1\\-1&1&0\\1&2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&2\\3&1&1\end{bmatrix}$

(4) $(1\quad 2\quad 3)\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(2\quad 4\quad 1)$

(5) $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^n$

解 (1)原式 $=\begin{pmatrix}3&12\\6&18\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&12\\6&18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$.

(2)原式 $=\begin{pmatrix}7&6&5\\-7&-2&-7\end{pmatrix}$.

(3)原式 $=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&2\\3&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&8&9\\-1&-1&1\\-2&3&3\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1&9&14\\-5&5&7\\12&26&31\end{bmatrix}$.

(4)原式 $=(2+8+3)=(13)$ 为 1 阶方阵,

原式 $=\begin{bmatrix}2&4&1\\4&8&2\\6&12&3\end{bmatrix}$ 为 3 阶方阵.

(5) $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$

当 $n=1$ 时,当然成立.

假定 $n=k$ 成立,即

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}.$$

再证 $n=k+1$ 也成立:

$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^{k+1}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^k\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&k+1\\0&1\end{pmatrix}$.

例 2. 设 $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$,

用两种方法计算$(AB)^T$.

解 方法 1

$$AB=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -2\\ 5 & 0\end{pmatrix},$$

$$(AB)^T=\begin{pmatrix}6 & 5\\ -2 & 0\end{pmatrix}.$$

方法 2

由于$(AB)^T=B^TA^T$,所以只需计算 B^TA^T.

$$(AB)^T=B^TA^T=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 5\\ -2 & 0\end{pmatrix}.$$

例 3. 设 $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & k\end{bmatrix}$.

$$S=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, T=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

计算 AB、BA、AS、SA、AT、TA 及 SAS、TAT.

解

$$AB=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & ka_{13}\\ a_{21} & a_{22} & ka_{23}\\ a_{31} & a_{32} & ka_{33}\end{bmatrix};$$

$$BA=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33}\end{bmatrix};$$

$$AS=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&a_{11}&a_{12}\\0&a_{21}&a_{22}\\0&a_{31}&a_{32}\end{bmatrix};$$

$$SA=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\0&0&0\end{bmatrix};$$

$$AT=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{33}&a_{32}&a_{31}\end{bmatrix};$$

$$TA=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\end{bmatrix};$$

$$SAS=(SA)S=\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&a_{21}&a_{22}\\0&a_{31}&a_{32}\\0&0&0\end{bmatrix};$$

$$TAT=(TA)T=\begin{bmatrix}a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{13}&a_{12}&a_{11}\end{bmatrix}.$$

例 4. 求矩阵 A 的逆矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&1&0\\-1&0&-2\end{bmatrix}.$$

解 方法 1

利用 $A^{-1}=\dfrac{1}{det(A)}A^{*}$

$$det(A)=\begin{vmatrix}1&2&-1\\3&1&0\\-1&0&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&-3\\3&1&-6\\-1&0&0\end{vmatrix}=9,$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1&0\\0&-2\end{vmatrix}=-2,A_{12}=-\begin{vmatrix}3&0\\-1&-2\end{vmatrix}=6,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}3&1\\-1&0\end{vmatrix}=1,A_{21}=-\begin{vmatrix}2&-1\\0&-2\end{vmatrix}=4,$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}1&-1\\-1&-2\end{vmatrix}=-3,A_{23}=-\begin{vmatrix}1&2\\-1&0\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2&-1\\1&0\end{vmatrix}=1,A_{32}=-\begin{vmatrix}1&-1\\3&0\end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix}=-5,$$

故 $A^{-1}=\dfrac{A^*}{det(A)}=\dfrac{1}{9}\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{bmatrix}$

$$=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}-2&4&1\\6&-3&-3\\1&-2&-5\end{bmatrix}.$$

方法 2

利用初等变换

$$(A\,\vdots\,E)=\begin{bmatrix}1&2&-1&1&0&0\\3&1&0&0&1&0\\-1&0&-2&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-3r_1}\begin{bmatrix}1&2&-1&1&0&0\\0&-5&3&-3&1&0\\0&2&-3&1&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2+2r_3}\begin{bmatrix}1&2&-1&1&0&0\\0&-1&-3&-1&1&2\\0&2&-3&1&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\times(-1)]{r_3+2r_2}\begin{bmatrix}1&2&-1&1&0&0\\0&1&3&1&-1&-2\\0&0&-9&-1&2&5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\times(-\frac{1}{9})}\begin{bmatrix}1&2&-1&1&0&0\\0&1&3&1&-1&-2\\0&0&1&\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}&-\frac{5}{9}\end{bmatrix}$$