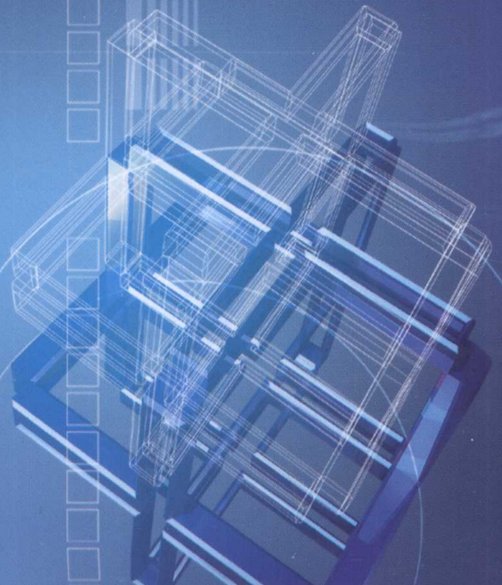
复变函数

张秋杰　丛凌博　姚　君　主编
徐　晶　主审



$$\int_c f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)$$

東北林業大學出版社

复变函数

张秋杰　丛凌博　姚　君　主编
徐　晶　主审

東北林業大學出版社

图书在版编目（CIP）数据

复变函数/张秋杰，丛凌博，姚君主编. —哈尔滨：东北林业大学出版社，2009.6

ISBN 978-7-81131-449-6

Ⅰ. 复… Ⅱ. ①张…②丛…③姚… Ⅲ. 复变函数 Ⅳ. O174.5

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第072446号

责任编辑：郑国光
封面设计：彭 宇

NEFUP

复变函数
Fubian Hanshu

张秋杰 丛凌博 姚 君 主编
徐 晶 主审

东北林业大学出版社出版发行
（哈尔滨市和兴路26号）

哈尔滨市工大节能印刷厂印装

开本 787×960 1/16 印张 17.75 字数 312 千字
2009年6月第1版 2009年6月第1次印刷
印数 1—1 000 册

ISBN 978-7-81131-449-6
定价：32.00元

前　言

复变函数是数学中的一门古老而又重要的分支。他始于18世纪欧拉、达朗贝尔、拉普拉斯的研究工作，全面发展是在19世纪，柯西、黎曼和魏尔斯特拉斯是复变函数理论的主要奠基人，就像分析学统治了18世纪的数学那样，复变函数这个新的分支统治了19世纪的数学。当时的数学家公认复变函数论是最丰饶的数学分支，也有人称赞它是抽象科学中最和谐的理论之一，从柯西算起，复变函数论已有170多年的历史了。20世纪初，复变函数论又有了很大的进展，维尔斯特拉斯的学生，瑞典数学家列夫勒、法国数学家彭加勒、阿达玛等都作了大量的研究工作，开拓了复变函数论更广阔的研究领域，为这门学科的发展做出了贡献。

以复数作为自变量的函数就叫做复变函数，而与之相关的理论就是复变函数论。解析函数是复变函数中一类具有解析性质的函数，复变函数论主要就研究复数域上的解析函数，因此通常也称复变函数论为解析函数论。复变函数理论是微分方程、积分方程、概率论和数论的主要解析方法，在流体力学、空气动力学、弹性力学、电磁学和热力学等学科中有着广泛的应用. 它曾经推动过一些学科的发展，并且常常作为一个有力的工具被应用在实际问题中，它的基础内容已成为理工科很多专业的必修课程。

本书根据《复变函数课程教学基本要求》编写。内容包括解析函数、柯西积分理论、级数理论、留数定理、共形映射、解析开拓等. 针对现在学生授课时间少的特点，在内容的安排上，努力贯彻理论联系实际原则，文字方面力求由浅入深，通俗易懂，便于学生自学. 为了加深学生对教学内容的理解在每节后附有练习性习题，为了锻炼学生的综合分析能力在每章后附有一定难度的习题，并配有提示或解答，有便于学生自学。

由于我们学识水平浅薄，教学经验有些欠缺，书中难免有缺点、错误和不足之处，敬请专家、读者批评指正。

最后，对关心本教材编写并从各方面给予我们大力支持的蔡吉花教授及本学院各位同行表示感谢。

编　者

2009.3

目　　录

1 复数与复变函数

复变函数论中最基本的概念就是复数. 在代数理论中已经讲述过复数. 我们为了便于以后的讨论，在本章中，将首先回顾一下复数的有关概念、性质和结论；其次，引入复平面以及复平面上的点集、区域、若尔当曲线和复变函数的极限和连续等概念；最后，讨论复球面与无穷远点的概念.

1.1 复　　数

1.1.1 复数域

在学习初等代数时，在实数范围内，方程 $x^2=-1$ 是无解的，由于解方程的需要. 人们引进一个新数，称为虚数单位 i，并规定为 $i^2=-1$ ，从而 i 是方程 $x^2=-1$ 的一根.

对于任意二实数 x，y 形如 $z=x+iy$ 或 $z=x+yi$ 的数，称为复数. 其中 x，y 分别称为 z 的实部和虚部，分别记作

$$x=\mathrm{Re}z, y=\mathrm{Im}z$$

当 $y\neq0$ 的复数称为虚数；当 $x=0$，$y\neq0$ 时，则 $z=yi$ 称为纯虚数，当 $y=0$ 时，$z=x+0\cdot i=x$ 为实数，因此复数是实数概念的推广.

两个复数相等，必须且只须它们的实部和虚部分别相等，一个复数 z 等于0，必须且只须它的实部和虚部同时等于零.

实部相同而虚部为相反数的两个复数 $x+iy$ 和 $x-iy$ 称为共轭复数，简称共轭数. 与 $z=x+iy$ 共轭的复数记为 $\bar{z}$，即 $\bar{z}=\overline{x+iy}=x-iy$.

对实数引进加、减、乘、除运算，并且运算满足交换律、结合律和分配律. 对复数也可以引进加、减、乘、除运算. 由于实数是复数的特例，因此复数运算的法则施行于实数特例时，能够和实数运算的结果相符合，同时复数运算也能够满足实数运算的一般规律.

设 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，运算的法则是：

（1）复数的加（减）法，实部与实部相加（减），虚部与虚部相加（减）

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2),$$

结果仍是复数. 称复数 z_1+z_2 是复数 z_1 与 z_2 的和，称复数 z_1-z_2 是复数 z_1 与 z_2 的差.

（2）复数的乘法，按多项式乘法法则进行

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + (i\cdot i)y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) \end{aligned}$$

结果仍是复数，我们称它为 z_1 与 z_2 的积.

（3）复数的除法，先写成分式形式，然后分子分母同乘以分母的共轭复数，再简化

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

结果仍是复数，我们称它为 z_1 与 z_2 的商.

易验证，复数运算中，加法、乘法遵守交换律与结合律，乘法对加法遵守分配律，减法是加法的逆运算、除法是乘法的逆运算. 与实数不同，一般来说，两个复数不能比较大小. 假设复数能比较大小，因为复数是实数的推广，则复数有大小，其大小关系应与实数中的大小关系保持一致. 取复数 i 与 0 加以讨论：因为 $i\neq 0$，设 $i>0$，则 $i\cdot i>i\cdot 0=0\Rightarrow -1>0$，矛盾；再设 $i<0$，则 $i\cdot i>i\cdot 0=0\Rightarrow -1>0$，矛盾.

复数在四则运算这个代数结构下，构成一个复数域（对加、减、乘、除运算封闭），记为 C，复数域可以看成实数域的扩张.

例 1.1.1 求复数 $i^8-4i^{21}+i$ 的实部和虚部

解 由于 $i^8-4i^{21}+i=1-3i$

所以 $\mathrm{Re}z=1$，$\mathrm{Im}z=-3$.

例 1.1.2 当 x，y 等于什么实数时，等式 $\dfrac{x+1+i\ (y-3)}{5+3i}=1+i$ 成立.

解 等式整理得 $x+1+i\ (y-3) = (1+i)\ (5+3i)$

由复数相等得 $x=1$，$y=11$.

1.1.2 复平面

由于，任意复数 $z=x+yi$ 与一对实数（x，y）成一一对应，所以对于平面上给定的坐标系，复数 $z=x+yi$ 可以用该面上的点（x，y）表示. x 轴称为实轴，y 轴称为虚轴，xoy 面称为复平面或者 z 平面. 复平面也常用 C 表

示.

在复平面上，从原点到点 $z=x+yi$ 所引的向量与这个复数 z 也构成一一对应关系，其中复数零对应着零向量.

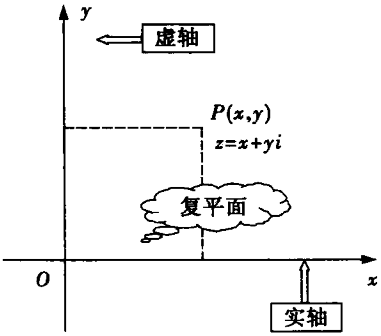


图 1－1

人们经过长期的摸索与研究发现，对于很多的平面问题来说，用复数及复变函数的理论来讨论是非常好的，这正是由于复数可以表示平面向量的原故，我们下面举一个简单的例子.

研究水的流动问题. 假定在水面上取好一坐标系 xoy. 我们把水面任意一点 A 的速度 v 的两个分量记为 v_x 和 v_y，那么在 A 点水的流速向量 v 可以用复数 v_x+iv_y 来表示，即

$$v = v_x + iv_y$$

1.1.3 复数的模与辐角

复数 $z=x+yi$ 用从原点指向点（x，y）的平面向量来表示向量的长度称为 z 的模或绝对值，记作 $|z|$，则

$$|z| = r = \sqrt{x^2+y^2}$$

显然，复数模的概念与实数绝对值的概念是一致的，都是非负实数，因此能够比较大小. 这样我们可以得到下面的不等式

$$|x| \leqslant |z|, |y| \leqslant |z|, |z| \leqslant |x| + |y|$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

$$-|z| \leqslant \mathrm{Re}z \leqslant |z| \qquad -|z| \leqslant \mathrm{Im}z \leqslant |z| \tag{1.1}$$

两个复数 $z_1=x_1+y_1$ 和 $z_2=x_2+y_2$ 的加、减法运算和相应向量的加法、减法一致. 由图 1－3 可以看出，z_1+z_2 所对应的向量，就是 z_1 所对应的向量与 z_2 所对应的向量的和向量.

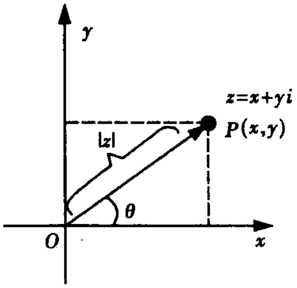


图 1-2

将 z_1-z_2 表示成 $z_1+(-z_2)$，那么 z_1-z_2 所对应的向量就是 z_1 所对应的向量与 $(-z_2)$ 所对应的向量的和向量，也就是从 z_2 到 z_1 的向量.

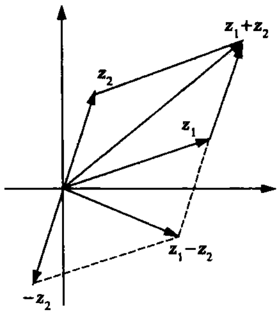


图 1-3

由图 1-4 可知，$|z_1-z_2|$ 是 z_1 与 z_2 之间的距离. 利用解析几何中两点间的距离公式得

$$|z_1-z_2|=|(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

根据三角形两边之和大于第三边以及两边之差小于第三边可得不等式

$$|z_1|-|z_2|\leqslant|z_1-z_2|\leqslant|z_1|+|z_2| \tag{1.2}$$

和不等式

$$|z_1|-|z_2|\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2| \tag{1.3}$$

两式中等号成立的几何意义：复数 z_1 与 z_2 所表示的两个向量共线且同向，即

$$z_1\neq 0, z_2\neq 0 \text{ 时}, z_1=kz_2(k>0)$$

推广：

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$$

复数 $z=x+iy$ 的辐角　设复数 $z\neq 0$ 对应的向量为 $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OP}$与实轴正方向

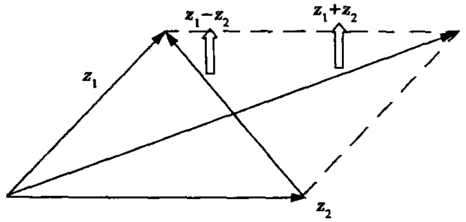


图 1－4

所夹的角 θ，称为复数 z 的辐角，记作 Arg$z$，即

$$\theta = \mathrm{Arg}z$$

并规定 θ 按逆时针方向取值为正，顺时针方向取值为负.

用记号 arg$z$ 表示 z 的所有辐角中介于 $-\pi$ 与 π 之间（包括 π）的那一个角，并称它为 z 的主辐角，即

$$-\pi < \arg z \leqslant \pi \tag{1.4}$$

从而

$$\theta = \mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{1.5}$$

由定义我们有：

$$\arg \bar{z} = -\arg z, \mathrm{Arg}\bar{z} = -\mathrm{Arg}z$$

当 $z=0$ 时，$|z|=0$，而辐角不确定，此时辐角无意义. 我们可以用反正切函数来刻画 arg$z$.

辐角主值的求法如图 1－5 所示.

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, (x > 0, y \geqslant 0) \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi, (x < 0, y > 0) \\ \arctan \dfrac{y}{x} - \pi, (x < 0, y < 0) \\ \arctan \dfrac{y}{x}, (x > 0, y < 0) \end{cases}$$

特别地，当 $x=0$，$y>0$ 时 $\arg z = \dfrac{\pi}{2}$；当 $x=0$，$y<0$ 时 $\arg z = -\dfrac{\pi}{2}$.

例 1.1.3 求 Arg（$2-2i$）及 Arg（$-3+4i$）.

解 $\mathrm{Arg}(2-2i) = \arg(2-2i) + 2k\pi$

$$= \arctan \frac{-2}{2} + 2k\pi$$

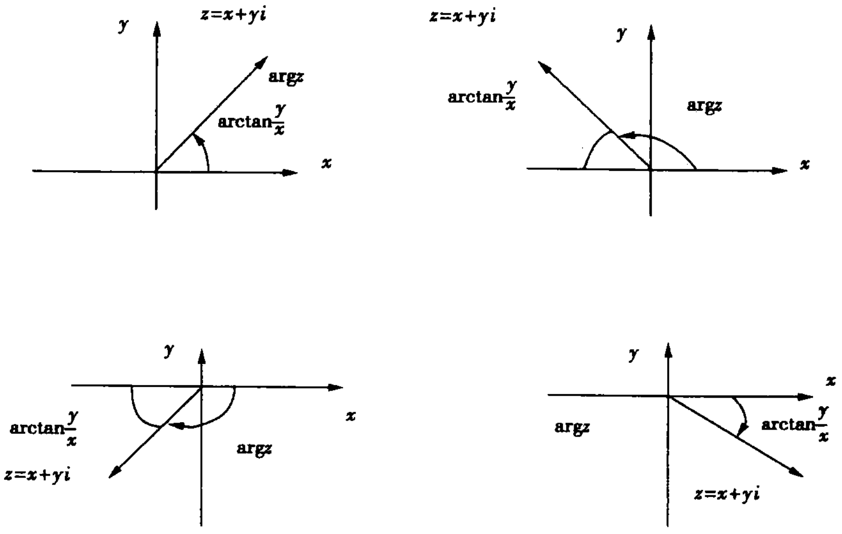


图 1-5

$$= -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Arg}\,(-3+4i) &= \arg\,(-3+4i) + 2k\pi \\ &= \arctan\frac{4}{-3} + \pi + 2k\pi \\ &= (2k+1)\,\pi - \arctan\frac{4}{3}\end{aligned}$$

1.1.4 复数的三角表示

如果复数 $z=x+yi$ 的模为 γ 辐角为 θ，我们可以利用极坐标与直角坐标的关系（见图 1-6），用复数的模与辐角来表示非零复数 z.

由

$$x = \gamma\cos\theta, y = \gamma\sin\theta$$

所以

$$z = \gamma\cos\theta + i\gamma\sin\theta \tag{1.6}$$

引入欧拉公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{1.7}$$

利用式（1.7），可以把式（1.6）改写成

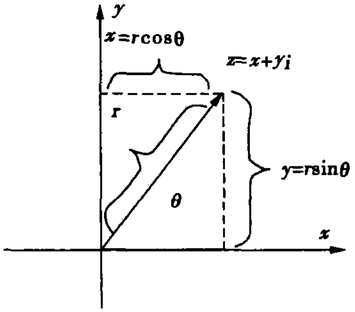


图 1－6

$$z = re^{i\theta} \tag{1.8}$$

我们分别把式（1.6）和式（1.8）称为复数的三角形式和指数形式.

任一非零复数 z 总可以表示成

$$z = |z| e^{i\arg z} \tag{1.9}$$

这里的 $\arg z$ 不必取主值.

上式为非零复数 z 的三角形式和指数形式，并称 $z = x + yi$ 为复数 z 的代数形式. 复数的三种表达形式可以灵活转换，以适应讨论不同问题时的需要，并且可以给运算以及证明带来方便.

例 1.1.4 将 $z = -\sqrt{3} - i$ 化为三角表示式与指数表示式.

解 因为 $r = |z| = 2$ 且 $\arg z = \arctan \dfrac{-1}{-\sqrt{3}} - \pi = -\dfrac{5}{6}\pi$

则得 z 的三角表达式为
$$\begin{aligned} z &= 2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right] \\ &= 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} - i\sin\frac{5\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

而 z 的指数形式为 $z = 2e^{\frac{5\pi}{6}i}$.

1.1.5 复数四则运算的几何意义

设有两个复数 $z_1 = r_1\ (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2\ (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

则

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned} \tag{1.10}$$

即

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \tag{1.11}$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) \tag{1.12}$$

定理 1.1 两个复数乘积的模等于它们模的乘积；两个复数乘积的辐角等于它们的辐角的和.

从几何上看，两复数对应的向量分别为 z_1 和 z_2，先把 z_1 旋转一个角度 θ_2，再把它的模伸缩 r_2 倍所得向量 z 就表示积 $z_1 \cdot z_2$.

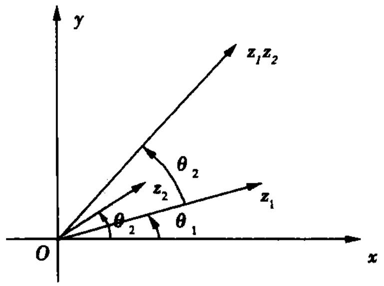


图 1-7

特别，iz 相当于将 z 所对应的向量沿逆时针方向旋转$\frac{\pi}{2}$. 这里 i 称为旋转乘数. 另外，

$$\arg(az) = \arg z \quad (a > 0)$$

设复数 z_1，z_2 的指数形式为

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

则

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \tag{1.13}$$

由此逐步可证

若

$$z_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k), k = 1, 2, \cdots, n$$

则

$$\begin{aligned} z_1 z_2 \cdots z_n &= r_1 r_2 \cdots r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)] \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdots r_n e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)} \end{aligned}$$

因为，当 $z_1 \neq 0$ 时，有 $z_2 = \frac{z_2}{z_1} \cdot z_1$ 由两个复数乘积的模与辐角的性质，有

$$|z_2| = \left|\frac{z_2}{z_1}\right| \cdot |z_1|, \operatorname{Arg}(z_2) = \operatorname{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) + \operatorname{Arg}(z_1)$$

于是

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|} \tag{1.14}$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_2}{z_1}\right) = \operatorname{Arg}z_2 - \operatorname{Arg}z_1 \tag{1.15}$$

定理 1.2　两个复数的商的模等于它们模的商；两个复数的商的辐角等于被除数与除数的辐角的差.

例 1.1.5　已知 $z_1=\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)$，$z_2=\sin\frac{\pi}{3}-i\cos\frac{\pi}{3}$，求 $z_1\cdot z_2$ 和$\frac{z_1}{z_2}$.

解　因为$z_1=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$$z_2=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

所以$z_1\cdot z_2=\cos\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-i$

$$\frac{z_1}{z_2}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

例 1.1.6　已知正三角形的两个顶点为 $z_1=1$ 和 $z_2=2+i$，求它的另一个顶点.

解　如图 1.8 所示

将表示 z_2-z_1 的向量绕 z_1 旋转$\frac{\pi}{3}$（或$-\frac{\pi}{3}$）就得到另一个向量，它的终点即为所求顶点 z_3（或 z'_3）.

因为复数 $e^{\frac{\pi}{3}i}$的模为 1，转角为$\frac{\pi}{3}$，

$$z_3-z_1=e^{\frac{\pi}{3}i}(z_2-z_1)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+i)=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$$

所以　$z_3=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$，$z'_3=\frac{3+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i$.

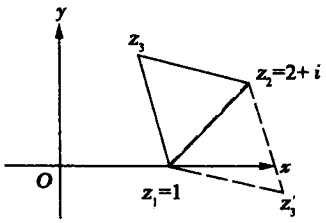


图 1－8

1.1.6 复数的共轭运算

设 $z=x+iy$，则 z 的共轭复数为 $\bar{z}=x-iy$.

显然

$$|\bar{z}|=|z|,\mathrm{Arg}\bar{z}=-\mathrm{Arg}z \tag{1.16}$$

根据共轭复数的定义，不难证明共轭复数具有如下性质：

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z_1}\pm\bar{z_2}$;

(2) $\overline{z_1z_2}=\bar{z_1}\ \bar{z_2}$;

(3) $\bar{\bar{z}}=z$;

(4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}$ $(z_2\neq0)$;

(5) $z\bar{z}=(\mathrm{Re}z)^2+(\mathrm{Im}z)^2=|z|^2$;

(6) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}z$，$z-\bar{z}=2i\mathrm{Im}z$;

(7) 设 $K(a,b,c,\cdots)$ 表示对于复数 a，b，c，…的任一有理运算；则

$$\overline{K(a,b,c,\cdots)}=K(\bar{a},\bar{b},\bar{c},\cdots)$$

上述运算性质为复数的化简计算、解答问题都带来了方便.

例 1.1.7 设 $z_1=5-5i$，$z_2=-3+4i$，求 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 与 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解 $$\frac{z_1}{z_2}=\frac{5-5i}{-3+4i}=\frac{(5-5i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)}$$
$$=\frac{-35-5i}{25}=-\frac{7}{5}-\frac{1}{5}i;$$

$$\therefore\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=-\frac{7}{5}+\frac{1}{5}i.$$

例 1.1.8 $z=-\dfrac{1}{i}-\dfrac{3i}{1-i}$，求 $\mathrm{Re}z$，$\mathrm{Im}z$ 与 $z\bar{z}$.

解 $$z=\frac{-(1-i)-3i\cdot i}{i(1-i)}=\frac{-1+i+3}{i+1}=\frac{2+i}{1+i}=\frac{(2+i)(1-i)}{2}=\frac{1}{2}(3-i)$$

$$\therefore\ \mathrm{Re}z=\frac{3}{2},\ \mathrm{Im}z=-\frac{1}{2};$$

$$z\bar{z}=(\mathrm{Re}z)^2+(\mathrm{Im}z)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}.$$

1.1.7 复数的乘幂与方根

1.1.7.1 复数的乘幂

n 个相同复数 z 的乘积称为 z 的 n 次幂，记作 z^n，

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \cdots \cdot z}_{n\text{个}} \tag{1.17}$$

对于任何正整数 n，有

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

当 z 的模 $r=1$，即 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，

$$z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

这就是棣莫佛公式.

如果我们定义 $z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$，那么当 n 为负整数时，上式仍成立.

1.1.7.2 复数的方根

我们称满足方程 $w^n=z$（这里 $w\neq0$，$n\geqslant2$）的复数 w 为复数 z 的 n 次方根，记作

$$w = \sqrt[n]{z} \tag{1.18}$$

设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$w=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$，

根据棣莫佛公式，

$$w^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

于是

$$\rho^n = r, \cos n\varphi = \cos\theta, \sin n\varphi = \sin\theta,$$

显然

$$n\varphi = \theta + 2k\pi \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$$

故

$$\rho = r^{\frac{1}{n}}, \varphi = \frac{\theta+2k\pi}{n}, w = \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

当 $k=0$，1，2，…，$n-1$ 时，得到 n 个相异的根，如下

$$w_0 = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)$$

$$w_1 = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2\pi}{n}\right)$$

$$\cdots$$