精 品 课 程　名 师 讲 堂

高等数学

辅导讲案

（下册）

主讲教材《高等数学》（高教·同济·第五版）

主 编　孙法国

◎重点内容提要　◎重点知识结构图　◎考点及典型例题分析

◎课后习题精解　◎学习效果测试题　◎学习效果测试题答案与提示

REMEDIATION

TEACHING PLAN

精品课程·名师讲堂丛书

高等数学

辅导讲案

（下册）

——主讲教材《高等数学》（高教·同济·第五版）

主　编　孙法国

副主编　韦奉岐　胡新利

编　委　（按姓氏笔画为序）

王晓东　王彩霞　金上海

西北工業大學出版社

【内容简介】 本书是作者根据多年的教学经验，在对教学大纲和课程内容进行深入研究和理解的基础上编写而成的；通过对典型例题的分析和解答，揭示了高等数学的解题方法、解题规律和解题技巧.

本书是理工科院校本科生学习高等数学的同步辅导资料，也可以作为研究生入学考试的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导讲案/孙法国主编．—西安：西北工业大学出版社，2009.9

ISBN 978-7-5612-2662-9

Ⅰ．高…　Ⅱ．孙…　Ⅲ．高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 175305 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路 127 号　邮编：710072
电　　话：(029)88493844　88491757
网　　址：www.nwpup.com
印 刷 者：陕西宝石兰印务有限责任公司
开　　本：850 mm×1 168 mm　1/32
印　　张：33
字　　数：1 096 千字
版　　次：2009 年 9 月第 1 版　2009 年 9 月第 1 次印刷
定　　价：52.00 元(上册：27.00 元，下册：25.00 元)

前　　言

高等数学是理工科院校的一门重要基础课．为帮助读者学好高等数学，我们根据多年的教学经验，在对教学大纲和课程内容进行深入研究和理解的基础上编写了本书．本书是理工科院校本科生学习高等数学的同步辅导资料，也可以作为研究生入学考试的参考书．

本书按照同济大学数学教研室编写的《高等数学》（第五版）的章节顺序，分为 24 讲，每讲分为六个部分．

（1）重点内容提要；

（2）重点知识结构图；

（3）考点及典型例题分析；

（4）课后习题精解；

（5）学习效果测试题；

（6）学习效果测试题答案与提示．

本书有以下几个特点：

（1）对每讲的内容及方法作了小结，并指出了课程考试重点和考研重点．

（2）给出了重点知识结构图，理顺了各知识点之间的关系．

（3）通过典型例题介绍方法，注重分析和一题多解．

（4）对课后习题做了解答，以方便读者参考.

（5）精心设计学习效果测试题，以方便初学者自我检测.

（6）在同济大学《高等数学》（第五版）内容的基础上，增加了“定积分在经济学上的应用”内容.

本书第1讲、第2讲、第17讲、第18讲由韦奉岐编写，第3讲、第4讲、第23讲、第24讲由胡新利编写，第5讲、第6讲、第21讲、第22讲由孙法国编写，第7讲、第13讲、第14讲由王晓东编写，第8讲、第9讲、第10讲、第11讲、第12讲由王彩霞编写，第15讲、第16讲、第19讲、第20讲由金上海编写. 全书由孙法国统稿并担任主编.

限于编者水平，书中若有疏漏之处，敬请读者批评指正.

编 者

2009年7月

目 录

第 15 讲 多元函数微分学 …… 1

15.1 重点内容提要 …… 1
15.2 重点知识结构图 …… 8
15.3 考点及典型例题分析 …… 8
15.4 课后习题精解 …… 20
15.5 学习效果测试题 …… 42
15.6 学习效果测试题答案与提示 …… 44

第 16 讲 偏导数的应用 …… 46

16.1 重点内容提要 …… 46
16.2 重点知识结构图 …… 49
16.3 考点及典型例题分析 …… 49
16.4 课后习题精解 …… 67
16.5 学习效果测试题 …… 87
16.6 学习效果测试题答案与提示 …… 89

第 17 讲 二重积分及其应用 …… 91

17.1 重点内容提要 …… 91
17.2 重点知识结构图 …… 96
17.3 考点及典型例题分析 …… 96
17.4 课后习题精解 …… 122
17.5 学习效果测试题 …… 143
17.6 学习效果测试题答案与提示 …… 146

第 18 讲 三重积分及其应用 …………………………………… 149

18.1 重点内容提要………………………………………………… 149
18.2 重点知识结构图……………………………………………… 155
18.3 考点及典型例题分析………………………………………… 155
18.4 课后习题精解………………………………………………… 169
18.5 学习效果测试题……………………………………………… 196
18.6 学习效果测试题答案与提示………………………………… 199

第 19 讲 曲线积分 …………………………………………… 202

19.1 重点内容提要………………………………………………… 202
19.2 重点知识结构图……………………………………………… 207
19.3 考点及典型例题分析………………………………………… 207
19.4 课后习题精解………………………………………………… 224
19.5 学习效果测试题……………………………………………… 239
19.6 学习效果测试题答案与提示………………………………… 240

第 20 讲 曲面积分 …………………………………………… 242

20.1 重点内容提要………………………………………………… 242
20.2 重点知识结构图……………………………………………… 247
20.3 考点及典型例题分析………………………………………… 248
20.4 课后习题精解………………………………………………… 263
20.5 学习效果测试题……………………………………………… 284
20.6 学习效果测试题答案与提示………………………………… 285

第 21 讲 常数项级数及其审敛法 …………………………… 286

21.1 重点内容提要………………………………………………… 286

21.2 重点知识结构图…… 289
21.3 考点及典型例题分析…… 289
21.4 课后习题精解…… 304
21.5 学习效果测试题…… 313
21.6 学习效果测试题答案与提示…… 315

第22讲 幂级数与傅里叶级数 …… 318

22.1 重点内容提要…… 318
22.2 重点知识结构图…… 323
22.3 考点及典型例题分析…… 324
22.4 课后习题精解…… 337
22.5 学习效果测试题…… 369
22.6 学习效果测试题答案与提示…… 370

第23讲 一阶微分方程 …… 376

23.1 重点内容提要…… 376
23.2 重点知识结构图…… 377
23.3 考点及典型例题分析…… 378
23.4 课后习题精解…… 387
23.5 学习效果测试题…… 416
23.6 学习效果测试题答案与提示…… 417

第24讲 高阶微分方程 …… 419

24.1 重点内容提要…… 419
24.2 重点知识结构图…… 422
24.3 考点及典型例题分析…… 422
24.4 课后习题精解…… 435

24.5 学习效果测试题…………………………………………………… 475
24.6 学习效果测试题答案与提示………………………………………… 476

附录 ………………………………………………………………………… 477

附录一 高等数学(下册)模拟检测题一…………………………………… 477
附录二 高等数学(下册)模拟检测题二…………………………………… 479
附录三 高等数学(下册)模拟检测题三…………………………………… 482
附录四 高等数学(下册)模拟检测题一解答……………………………… 484
附录五 高等数学(下册)模拟检测题二解答……………………………… 488
附录六 高等数学(下册)模拟检测题三解答……………………………… 491

参考文献……………………………………………………………………… 496

第 15 讲 多元函数微分学

（第八章第一节至第五节）

15.1 重点内容提要

15.1.1 多元函数的基本概念

1. 二元函数

设 D 是 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 上的一个非空子集，映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的二元函数，记为 $z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$. 其中平面点集 D 称为函数 f 的定义域，z 称为因变量，集合 $\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 称为函数 f 的值域，空间点集 $\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 称为函数 f 的图像.

2. 多元函数

设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个非空子集，设映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的 n 元函数，记为 $z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$. 其中点集 D 称为函数 f 的定义域，z 称为因变量，集合 $\{z\mid z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D\}$ 称为函数 f 的值域.

15.1.2 二元函数的极限

1. 二重极限的定义

设 $f(x,y)$ 在区域 D 内有定义，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点，若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当点 $P(x,y)$ 满足 $0<|PP_0|<\delta$ 时，总有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立，则称函数 $f(x,y)$ 当 (x,y) 趋向 (x_0,y_0) 时以 A 为极限，记做 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=A$ 或

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A.$$

二元函数的极限要求点 $P(x,y)$ 以任何方式、任何方向、任何路径趋向

$P_0(x_0,y_0)$ 时，都有 $f(x,y)\to A$. 如果沿两条不同的路径，$f(x,y)$ 趋于不同的值，则可断定 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$ 不存在，这是证明二重极限不存在的有效办法.

2. 累次极限

$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0} F(y)$ 称为先 x 后 y 的二次极限；$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to x_0} G(x)$ 称为先 y 后 x 的二次极限.

两个二次极限存在是二重极限存在的必要条件；二重极限存在是两个二次极限存在的充分条件.

15.1.3 二元函数的连续性

1. 二元函数连续的定义

(1) 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域 $U(P_0,\delta)$ 内有定义，若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续，点 $P_0(x_0,y_0)$ 称为 $f(x,y)$ 的连续点.

(2) 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域 $U(P_0,\delta)$ 内有定义，分别给自变量 x,y 在 x_0,y_0 处以增量 $\Delta x,\Delta y$，得到全增量 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$. 如果极限 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\\Delta y\to 0}}\Delta z=0$，则称 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续.

注
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)\Leftrightarrow$$
$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\\Delta y\to 0}}[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]=0\Leftrightarrow$$
$$\lim_{\rho\to 0}\Delta z=0$$
其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

2. 初等函数的连续性

一切多元初等函数在其定义域内是连续的.

3. 有界闭区域上连续函数的性质

(1) 有界性：若 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $z=f(x,y)$ 在 D 上有界，即 $\exists M>0,\forall(x,y)\in D$ 有 $|f(x,y)|\leqslant M$.

(2) 最值定理：若 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $z=f(x,y)$ 在 D

上有最大值和最小值，即存在 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$\forall(x,y)\in D$，有

$$f(x,y)\leqslant f(x_1,y_1),f(x_2,y_2)\leqslant f(x,y)$$

(3) 介值定理：若 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)\in D$，则对任意的常数 C，当 $f(x_1,y_1)<C<f(x_2,y_2)$ 时，存在 $P_0(x_0,y_0)\in D$，使得 $f(x_0,y_0)=C$.

15.1.4 偏导数

1. 偏导数的定义

设 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义，定义

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

2. 偏导数的几何意义

二元函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $f'_x(x_0,y_0)$ 为曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $y=y_0$ 的交线在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的切线关于 x 轴的斜率；$f'_y(x_0,y_0)$ 为曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $x=x_0$ 的交线在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的切线关于 y 轴的斜率.

3. 偏导函数

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内任一点都存在偏导数，则称函数 $z=f(x,y)$ 在 D 内可导，这个新的函数关系称为 $z=f(x,y)$ 的偏导函数，记为 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial x}$ 或 $f'_x(x,y)$.

4. 高阶偏导数

(1) 定义：设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内有偏导函数 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)$，如果在 D 内 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$ 仍可导，则称它们的偏导数是函数 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数，分别是

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xx}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yx}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yy}(x,y)$$

其中 $f''_{xy}(x,y)$，$f''_{yx}(x,y)$ 称为 $z = f(x,y)$ 的二阶混合偏导数. 以此类推，可以定义三阶及三阶以上的偏导数.

(2) 性质：如果 $z = f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $f''_{xy}(x,y)$，$f''_{yx}(x,y)$ 在区域 D 内连续，则在区域 D 内恒有 $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$.

5. 偏导数计算

(1) 求 $f'_x(x,y)$ 时，只要把 $z = f(x,y)$ 中的 y 固定(看做常数)，仅对 x 求导；求 $f'_y(x,y)$ 时，固定 x，仅对 y 求导.

(2) $f'_x(x_0,y_0)$ 是一元函数 $z = f(x,y_0)$ 在 x_0 处的导数，$f'_y(x_0,y_0)$ 是一元函数 $z = f(x_0,y)$ 在 y_0 处的导数，所以偏导数实质上仍是一元函数的求导问题.

(3) 当函数 $z = f(x,y)$ 在区域 D 内可导时，有偏导函数 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$. $f'_x(x_0,y_0)$ 是 $f'_x(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的函数值；$f'_y(x_0,y_0)$ 是 $f'_y(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的函数值.

15.1.5 全微分的概念

1. 定义与计算

设函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，如果全增量可以表示成 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$，其中 A，B 只与 (x_0,y_0) 有关，而与 Δx，Δy 无关，$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，则称 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微分，称 $A\Delta x + B\Delta y$ 为 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全微分，记为 $\mathrm{d}z$. 若 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微分，则

$$\mathrm{d}z = f'_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x + f'_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y$$

2. 可微的必要条件

若函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微分，则 $z = f(x,y)$ 在点 (x,y) 处必可导，且全微分

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$

3. 可微的充分条件

若函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的偏导数存在且连续，则 $z = f(x,y)$ 在

点(x,y)处必可微.

4. **方向导数与梯度**

(1) 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义,自点(x_0,y_0)引射线 l,设 x 轴正向到射线 l 的转角为 α,y 轴正向到射线 l 的转角为 β. 该邻域中另一点 $P_1(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 在 l 上,当 P_0 沿 l 趋向于 P_1 时,极限 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\rho}$ 存在,则称此极限值为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处沿方向 l 的方向导数,记做$\dfrac{\partial z}{\partial l}$,即

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\rho}$$

若函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微分,则$\dfrac{\partial z}{\partial l}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$.

(2) 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 可微分,则称向量$\dfrac{\partial z}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\boldsymbol{j}$ 为 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处的梯度,记做 $\mathbf{grad}f(x,y)$,即

$$\mathbf{grad}f(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\boldsymbol{j}=\left\{\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right\}$$

梯度的方向是函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处方向导数取得最大值的方向,梯度的模 $|\mathbf{grad}f(x,y)|$ 即为方向导数的最大值.

5. **二元函数连续性、可导性、可微性,以及方向导数之间的关系**

$$\text{偏导数存在且连续}\to\text{可微}\to\begin{cases}\text{可导,即 } \mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y\\ \text{连续}\to\text{极限存在,即}\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)\\ \text{方向导数存在,即}\dfrac{\partial z}{\partial l}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cos\beta\end{cases}$$

15.1.6 多元复合函数的导数

1. **法则一**

设 $u=\varphi(x,y)$,$v=\psi(x,y)$ 在点(x,y)处可导,而函数 $z=f(u,v)$ 在相应点(u,v)处可微,则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点(x,y)处可导,且偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

此法则是一元复合函数求导法则的推广.对多元复合函数因变量 z 与自变量 x 或 y 之间可有多条链相连接,每一条链都遵循求导的链式法则,然后将各条链叠加即可,所以也称为链式叠加法则,此法则可以推广到有限个中间变量或有限个自变量的情形.

2. 法则二

设 $u=\varphi(t),v=\psi(t)$ 在点 t 处可导,而函数 $z=f(u,v)$ 在相应点 (u,v) 处可微,则复合函数 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ 在点 t 处可导,且全导数为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

3. 微分形式不变性

设函数 $z=f(u,v)$ 具有连续的偏导数,则无论 u,v 是中间变量还是自变量,微分的形式都不变,即

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v$$

15.1.7 隐函数求导

1. 一元隐函数存在定理

设函数 $F(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有连续的偏导数,且 $F(x_0,y_0)=0,F'_y(x_0,y_0)\neq 0$,则方程 $F(x,y)=0$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内恒能唯一确定一个单值连续且具有连续导数的一元函数 $y=f(x)$,满足 $y_0=f(x_0)$,并且 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x}{F'_y}$.

2. 二元隐函数存在定理

设函数 $F(x,y,z)$ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域内有连续的偏导数,且 $F(x_0,y_0,z_0)=0,F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$,则方程 $F(x,y,z)=0$ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域内恒能唯一确定一个单值连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$,满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$,并有 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$.

3. 方程组情形

(1) 设函数 $F(x,y,z),G(x,y,z)$ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域内有对各个变量的连

续的偏导数，又 $F(x_0,y_0,z_0)=0, G(x_0,y_0,z_0)=0$，且雅可比行列式 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z}\\ \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix}$ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 不等于 0，则方程组 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某邻域内恒能唯一确定一组单值连续且具有连续导数的函数 $y=y(x), z=z(x)$，满足条件 $y_0=y(x_0), z_0=z(x_0)$，并有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial z}\\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial x}\\ \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial x}\end{vmatrix}$$

（2）设函数 $F(x,y,u,v), G(x,y,u,v)$ 在 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 点的某邻域内有对各个变量的连续的偏导数，又 $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0, G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，且雅可比行列式 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v}\\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$ 在 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 不等于 0，则方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 在点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某邻域内恒能唯一确定一组单值连续且具有连续偏导数的函数 $u=u(x,y), v=v(x,y)$，满足条件 $u_0=u(x_0,y_0), v_0=v(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial v}\\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial v}\\ \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial x}\\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial x}\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{vmatrix}$$

15.2 重点知识结构图

$$\text{多元函数微分学}\begin{cases}\text{基本概念(区域、定义、极限、连续)}\\ \text{偏导数(定义、计算、高阶偏导数)}\\ \text{全微分(定义、计算、必要条件、充分条件)}\\ \text{多元复合函数的导数(链式法则、全导数)}\\ \text{隐函数求导法(一个方程、方程组)}\end{cases}$$

15.3 考点及典型例题分析

1. 课程考试重点

(1) 多元函数的概念、二元函数极限与二元函数的连续性；

(2) 偏导数的概念、几何意义与计算；

(3) 全微分的概念与计算；

(4) 多元复合函数偏导数概念与计算；

(5) 隐函数的偏导数；

(6) 高阶偏导数概念与计算.

2. 考研重点

(1) 多元函数的连续性；

(2) 偏导数的概念与计算；

(3) 高阶偏导数概念与计算；

(4) 全微分的概念与计算.

例 15.1 判断 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 是否存在.

分析 选择直线 $y=kx$，使得极限与 k 值有关，从而说明极限不存在. 这是判断二重极限是否存在的一个常用方法.

解 当 (x,y) 沿直线 $y=x$ 趋于 0 时，