华东师范大学国际数学奥林匹克研究中心主任
2008国际数学奥林匹克中国队领队、主教练
熊斌 领衔编写

挑战IMO
数学奥林匹克十八讲

熊斌　范端喜　金荣生　编著

上海辞书出版社

华东师范大学国际数学奥林匹克研究中心主任
2008国际数学奥林匹克中国队领队、主教练
熊斌 领衔编写

挑战IMO

数学奥林匹克十八讲

熊斌 范端喜 金荣生 编著

上海辞书出版社

图书在版编目(CIP)数据

挑战 IMO:数学奥林匹克十八讲/熊斌,范端喜,金荣生编著. 上海:上海辞书出版社,2009. 8
ISBN 978-7-5326-2826-1

Ⅰ. 挑... Ⅱ. ①熊...②范...③金.. Ⅲ. 数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 042390 号

责任编辑 彭江杰
装帧设计 杨钟玮

挑战 IMO:数学奥林匹克十八讲
上海世纪出版股份有限公司
上海辞书出版社 出版、发行
(上海陕西北路 457 号 邮政编码 200040)
电话:021—62472088
www.ewen.cc www.cishu.com.cn
上海展强印刷有限公司印刷
开本 850×1168 1/32 印张 12.25 插页 1 字数 307 000
2009 年 8 月第 1 版 2009 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5326-2826-1/O·59
定价:20.00 元

前言 FOREWORD

数学奥林匹克已经走过了百余年的历史.

1894 年,匈牙利教育部门通过一项决议,准备在中学举办数学竞赛. 适逢著名科学家埃特沃什男爵担任教育部长;在埃特沃什的积极支持下,这项比赛得到了发扬光大. 这是世界上最早的有组织地举办的数学竞赛. 随后,其他国家纷纷效仿。罗马尼亚、保加利亚、波兰和捷克斯洛伐克分别于 1902 年、1949 年、1950 年和 1951 年开始举办中学生数学竞赛. 特别值得一提的是两个超级大国——前苏联和美国. 1934 年,在当时的列宁格勒(今圣彼得堡),由著名数学家狄隆涅主持举办了中学生数学竞赛;1935 年,莫斯科也开始举办. 这两个竞赛都一直延续至今. 全俄(后改“全苏”)数学竞赛 1961 年开始. 前苏联人把数学竞赛称作“数学奥林匹克”,认为数学是“思维的体操”,这些观点都有很大的影响.

在美国,由于著名数学家伯克霍夫父子和波利亚的积极提倡,于 1938 年开始举办低年级大学生的普特南数学竞赛,很多

题目就是中学数学范围内的；普特南竞赛中成绩排在前五位的人，就可以成为普特南会员. 在这些人中有许多杰出人物——菲尔兹奖获得者芒福德、米尔诺、奎伦和诺贝尔物理学奖得主费恩曼、威尔逊等. 1972 年起，为准备国际数学奥林匹克而开始举办美国数学奥林匹克，它的命题水平也非常之高. 最终选拔出来的国家队队员在西点军校等地集训，并与父母一同到白宫被总统接见.

20 世纪 50 年代，罗马尼亚的罗曼等人认为时机已经成熟，可以举办国际性的数学竞赛了. 这就是影响最大、级别最高的中学生智力活动——"国际数学奥林匹克"的由来. 按照英文缩写，就是现为大家所知的 IMO. 第一届 IMO 于 1959 年在罗马尼亚举行，当时只有七国(罗马尼亚、保加利亚、波兰、匈牙利、捷克斯洛伐克、前民主德国、前苏联)参加. 后来，美、英、法、德等国家和亚洲国家也陆续参加. 在今天，IMO 已波及几乎所有的国家.

由于众所周知的原因，中国的数学竞赛起步较晚，但后劲十足.

"我们也要搞数学竞赛了!"华罗庚说. 1956 年，首先在北京、天津、上海和武汉举办了一次数学竞赛；由于政治运动的影响，这一活动时断时续；1978 年，"科学的春天"到来了. 华罗庚旋即主持了全国八省市的中学数学竞赛. 1985 年华去世，为了纪念他，于 1986 年开始举办低年级的"华罗庚金杯赛"，影响很大. 1981 年，中国数学会决定举行全国高中数学联合竞赛. 1985 年，我国派出两名选手非正式地参加了 IMO. 1986 年起，除了在台湾举办的一次外，我国都派足 6 名选手正式参加 IMO.

IMO 为发现数学人才做出了杰出的贡献. 许多 IMO 优胜者后来成了杰出数学家，如沃尔夫奖获得者卢瓦兹、菲尔兹奖获

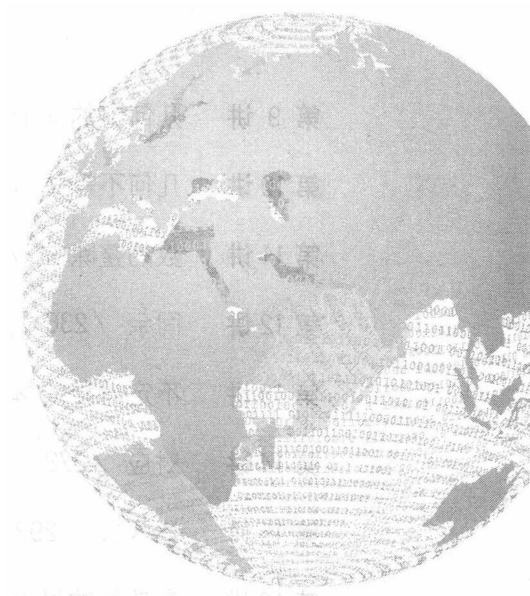
得者德林菲尔德、约克兹、博切兹、高尔斯、马古利斯、拉佛阁、佩莱尔曼、陶哲轩等.

数学竞赛对于激发学生的学习兴趣、开发智力、培养数学探索能力和创新能力、拓宽视野有着非常积极的作用.通过开展数学竞赛活动,可以更好地发现和培养优秀学生,让他们得到进一步发展,同时也能提高教师的教学和科研水平,促进教学改革.

本书将高中数学竞赛的主要内容分成18讲介绍给读者.通过这18讲,作者尽量把高中数学竞赛的一些重要知识和内容,重要的数学思想方法和解题技巧重新进行梳理和整合,精选了一些国内外的经典赛题和作者自编的题目进行详细的分析和解答,目的是为读者提供一本有效的参考资料.

囿于我们的水平,不足之处和错误在所难免,请广大读者朋友批评指正,不吝赐教.

目 录 | CONTENTS



第1讲 函数的性质及其应用

知识、技能及方法梳理

1. 函数的定义

设 A，B 都是非空的数集，f 是从 A 到 B 的一个对应法则. 那么，从 A 到 B 的映射 $f: A \to B$ 就叫做从 A 到 B 的函数. 记做 $y = f(x)$，其中 $x \in A$，$y \in B$，原像集合 A 叫做函数 $f(x)$ 的定义域，像的集合 C 叫做函数的值域，显然 $C \subseteq B$.

2. 函数的性质

(1) 奇偶性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，且 D 是关于原点对称的数集. 若对任意的 $x \in D$，都有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 是奇函数；若对任意的 $x \in D$，都有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 是偶函数.

(2) 函数的增减性　设函数 $f(x)$ 在区间 D' 上满足：对任意 x_1，$x_2 \in D'$，当 $x_1 < x_2$ 时，总有 $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$，则称 $f(x)$ 在区间 D' 上为增函数(减函数)，区间 D' 称为 $f(x)$ 的一个单调增(减)区间.

一般地，设函数 $y = f(x)$ 在某个区间内可导，如果 $f'(x) > 0$，则 $y = f(x)$ 为增函数；如果 $f'(x) < 0$，则 $y = f(x)$ 为减函数.

(3) 函数的周期性

对于函数 $y = f(x)$，如果存在一个不为零的正数 T，使得

当 x 取定义域中的每个数时，$f(x+T)=f(x)$ 总成立，那么称 $y=f(x)$ 是周期函数，T 称作这个周期函数的周期. 如果函数 $f(x)$的所有周期中存在最小值 T_0，称 T_0 为周期函数 $f(x)$的最小值正周期.

(4) 求函数值域常用的方法有：配方法、判别式法、利用函数单调性法、换元法、图像法、不等式法、反解法、求导法等.

3. 基本初等函数

常函数 $y=c$，幂函数 $y=x^a(a\in\mathbf{Q})$，指数函数 $y=a^x$，对数函数 $y=\log_a x$，三角函数($y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$ 等)，反三角函数($y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$ 等)是数学中最为基本的函数，我们把它们统称为基本初等函数.

中学应熟练掌握各基本初等函数的定义域、值域、单调性、奇偶性、周期性等基本性质，并能利用这些性质快捷地比较两个数值的大小或解有关不等式.

形如 $y=x+\dfrac{k}{x}$ 的分式函数我们称之为“耐克函数”(因其图像酷似“耐克”商标而得名)，其性质如下：

当 $k<0$ 时，函数在定义域$(-\infty, 0)$和$(0, +\infty)$上是单调递增的函数，也是奇函数；

当 $k>0$ 时，y 的单调递减区间是$[-\sqrt{k}, 0)$ 和$(0, \sqrt{k}]$，y 的单调递增区间是 $(-\infty, -\sqrt{k}]$ 和$[\sqrt{k}, +\infty)$；它也是奇函数.

“耐克函数”在高考和竞赛中具有尤为重要的地位. 要会利用函数 $y=x+\dfrac{k}{x}$ 的性质求出一些分式函数的值域.

4. 高斯函数

对任意实数 x，我们记不超过 x 的最大整数为$[x]$，通常称函数 $y=[x]$ 为取整函数，又称高斯函数. 在竞赛中它是一类非常重要的函数.

进一步，记 $\{x\}=x-[x]$，则函数 $y=\{x\}$ 称为小数部分

函数，它表示的是 x 的小数部分.

根据高斯函数的定义，可得到其如下性质：

性质 1 对任意 $x \in \mathbf{R}$，均有

$$x-1<[x] \leqslant x<[x]+1.$$

性质 2 对任意 $x \in \mathbf{R}$，函数 $y=\{x\}$ 的值域为 $[0, 1)$.

性质 3 高斯函数是一个不减函数，即对任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$，若 $x_1 \leqslant x_2$，则 $[x_1] \leqslant [x_2]$.

性质 4 若 $n \in \mathbf{Z}$，$x \in \mathbf{R}$，则有 $[x+n]=n+[x]$，$\{n+x\}=\{x\}$，后一个式子表明 $y=\{x\}$ 是一个以 1 为周期的函数.

性质 5 若 $x, y \in \mathbf{R}$，则 $[x]+[y] \leqslant [x+y] \leqslant [x]+[y]+1$.

性质 6 若 $n \in \mathbf{N}^*$，$X \in \mathbf{R}$，则 $[nx] \geqslant n[x]$.

性质 7 若 $n \in \mathbf{N}^*$，$x \in \mathbf{R}$，则 $\left[\frac{x}{n}\right]=\left[\frac{[x]}{n}\right]$.

性质 8 若 $n \in \mathbf{N}^*$，$x \in \mathbf{R}^+$，则在区间 $[1, x]$ 内，恰有 $\left[\frac{x}{n}\right]$ 个整数是 n 的倍数.

性质 9 设 p 为质数，$n \in \mathbf{N}^*$，则 p 在 $n!$ 的质因数分解式中的幂次为

$$p(n!)=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots.$$

典型例题精讲

例 1 已知 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a, b, c \in \mathbf{R})$，且 $f(x)=x$ 无实根，求证：$f(f(x))=x$ 也无实根.（2008 年交大冬令营试题）

法一：

若 $a=0$，$f(x)=bx+c=x$ 无实根.

$\therefore (b-1)x=-c$ 无实根.

$\therefore b=1$，$c\neq 0$，$f(x)=x+c\ (c\neq 0)$，

$f(f(x))=f(x)+c=x+c+c=x+2c=x$.

显然无实根.

若 $a\neq 0$，$f(x)$ 为二次函数，

$f(f(x))=af^2(x)+bf(x)+c=x$，

$af^2(x)+bf(x)+c-x=0$，

$af^2(x)+bf(x)+(ax^2+bx+c)-ax^2-bx-x=0$，

$a(f^2(x)-x^2)+b(f(x)-x)+f(x)-x=0$，

$(f(x)-x)[a(f(x)+x)+b+1]=0$，显然 $f(x)\neq x$，而 $a(f(x)+x)+b+1=0$，

$a^2x^2+(ab+a)x+ac+b+1=0$，

$\Delta=a^2(b+1)^2-4a^2(ac+b+1)=a^2(b^2-4ac-2b-3)$
$\quad =a^2[(b-1)^2-4ac-4]$，

又 $\Delta'=(b-1)^2-4ac<0$，

$\therefore \Delta<0$，$f(f(x))=x$ 也无实根

法二：

若 $a=0$，同解法一.

若 $a>0$，因 $f(x)=x$ 无实根，只可能对 $\forall x\in \mathbf{R}$，$f(x)>x$，故 $f(f(x))>f(x)>x$；

若 $a<0$，因 $f(x)=x$ 无实根，只可能对 $\forall x\in \mathbf{R}$，$f(x)<x$，故 $f(f(x))<f(x)<x$.

故这两种情况下，$f(f(x))=x$ 均无实根.

说明： 1. 法二巧妙地应用了函数的单调性；

2. 本题容易遗忘 $a=0$ 情形的讨论.

例 2 求证：定义域关于原点对称的任何函数均可以写成一个奇函数与一个偶函数的和函数形式.

证明:设此函数为 $f(x)$, $x\in \mathbf{D}$,再不妨设

$$f(x)=g(x)+h(x), \tag{1}$$

其中 $g(x)$是奇函数,$h(x)$是偶函数.

则 $f(-x)=g(-x)+h(-x)=-g(x)+h(x)$, (2)

联立(1)(2)两式,解得

$$g(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},\ h(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}.$$

易验证 $g(x)$是奇函数,$h(x)$是偶函数. 证毕!

例3 设正实数 x, y 满足 $xy=1$, 求函数

$f(x,y)=\dfrac{x+y}{[x][y]+[x]+[y]+1}$ 的值域.(其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数)

分析: 由 x、y 的对称性,不妨设 $x\geqslant y$,则有 $x^2\geqslant 1$,必分 $x=1$ 与 $x>1$ 两种情况讨论.

解: 不妨设 $x\geqslant y$,则 $x^2\geqslant 1$, $x\geqslant 1$. 有下面两种情形:

(1) 当 $x=1$ 时, $y=1$, 此时 $f(x,y)=\dfrac{1}{2}$.

(2) 当 $x>1$ 时, 设 $[x]=n$, $\{x\}=x-[x]=\alpha$, 则 $x=n+\alpha$, $0\leqslant\alpha<1$.

于是, $y=\dfrac{1}{n+\alpha}<1$,故$[y]=0$.

$$f(x,y)=\frac{n+\alpha+\dfrac{1}{n+\alpha}}{n+1}.$$

由函数 $g(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 在 $x\geqslant 1$ 时是递增的,且 $0\leqslant\alpha<1$, 得

$$n+\frac{1}{n}\leqslant n+\alpha+\frac{1}{n+\alpha}<n+1+\frac{1}{n+1},$$

$$\therefore \frac{n+\frac{1}{n}}{n+1} \leqslant f(x, y) < \frac{n+1+\frac{1}{n+1}}{n+1}.$$

设 $a_n = \dfrac{n+\frac{1}{n}}{n+1} = \dfrac{n^2+1}{n^2+n} = 1 - \dfrac{n-1}{n^2+n}$,

$$b_n = \frac{n+1+\frac{1}{n+1}}{n+1} = 1 + \frac{1}{(n+1)^2},$$

则 $a_{n+1} - a_n = \dfrac{n-2}{n(n+1)(n+2)}$.

$a_1 > a_2 = a_3$, $a_3 < a_4 < \cdots < a_n < \cdots$,

$b_1 > b_2 > \cdots > b_n > \cdots$.

于是当 $x > 1$ 时，$f(x, y)$的值域为$[a_2, b_1)$，即$\left[\dfrac{5}{6}, \dfrac{5}{4}\right)$.

综上所述，$f(x, y)$的值域为 $\left\{\dfrac{1}{2}\right\} \cup \left[\dfrac{5}{6}, \dfrac{5}{4}\right)$.

说明：本例表面上为二元函数，实为一元函数，因为 $y = \dfrac{1}{x}$，消去 y 后就是关于 x 的函数了.

例 4 设函数 $f(x)$对任意 $x, y \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$，若 $x > 0$ 时，$f(x) < 0$ 且 $f(1) = -2$.

(1) 证明：$f(x)$是奇函数；

(2) 求 $f(x)$在$[-3, 3]$上的最大值和最小值.

解：(1) 令 $x = y = 0$，则有

$$f(0) = f(0) + f(0), \therefore f(0) = 0.$$

再令 $y = -x$，得 $f(0) = f(x) + f(-x)$，

$\because f(0) = 0, \therefore f(-x) = -f(x)$，

$\therefore f(x)$是奇函数.

(2) 设 x_1, $x_2 \in \mathbf{R}$,且 $x_1 < x_2$, 则

$f(x_2) = f(x_1 + (x_2 - x_1)) = f(x_1) + f(x_2 - x_1)$,

$\because x_2 > x_1$, $\therefore x_2 - x_1 > 0$.

由已知得 $f(x_2 - x_1) < 0$,

$\therefore f(x_2) < f(x_1)$. 故 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

$\therefore f(x)$在$[-3, 3]$上的最大值 $[f(x)]_{最大值} = f(-3)$, 最小值 $[f(x)]_{最小值} = f(3)$.

又$\because f(3) = f(1+2) = f(1) + f(2)$

$= f(1) + f(1) + f(1) = -6$,

$f(-3) = -f(3) = 6$.

故 $f(x)$在$[-3, 3]$上的最大值为 6,最小值为-6.

说明: 本题中的"$x_2 = x_1 + (x_2 - x_1)$"是完成证明函数是减函数的主要过程,这一特点读者应有所体会.

例 5 设 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数,且满足下列关系:

$$f(10+x) = f(10-x), \quad ①$$

$$f(20-x) = -f(20+x). \quad ②$$

求证: $f(x)$是奇函数,且是周期函数.

证明: 令 $10 - x = t$,则 $x = 10 - t$, $10 + x = 20 - t$, 代入①式中有 $f(t) = f(20-t)$.

由②式有 $f(20-t) = -f(20+t)$,

$\therefore f(t) = -f(20+t)$,

$\therefore f(40+t) = -f(20+(20+t)) = -f(20+t) = f(t)$,

$\therefore f(x)$是一个周期函数且 $T = 40$ 是它的一个周期.

再令 $20 - x = t$,则 $x = 20 - t$, $20 + x = 40 - t$, 代入到②式中,且利用 $f(x)$是一个周期函数,知

$$f(t) = -f(40-t) = -f(-t).$$

$\therefore f(-t) = -f(t)$, 且由 $x \in \mathbf{R}$ 知 $t \in \mathbf{R}$.

$\therefore f(t)$是一个奇函数.

综上,$f(x)$是奇函数,且是周期函数.

例6 设$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数,其图像关于直线$x=1$对称,对任意$x_1, x_2 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$,都有$f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$,且$f(1)=a>0$.

(1) 求$f\left(\frac{1}{2}\right)$及$f\left(\frac{1}{4}\right)$;

(2) 证明$f(x)$是周期函数;

(3) 设$a_n=f\left(2n+\frac{1}{2n}\right)$,求$\lim\limits_{n\to\infty}(\ln a_n)$.

解: (1) $\because$ 对任意$x_1, x_2 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$,都有$f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$,

$\therefore f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{x}{2}\right)\geqslant 0,\ x\in[0, 1]$.

$f(1)=f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)=\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$,

$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)\cdot f\left(\frac{1}{4}\right)=\left[f\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2$,

$f(1)=a>0$,

$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=a^{\frac{1}{2}},\ f\left(\frac{1}{4}\right)=a^{\frac{1}{4}}$.

(2) 证明:依题设$y=f(x)$关于直线$x=1$对称,

$\therefore f(x)=f(1+1-x),\ f(x)=f(2-x)$.

又$\because f(-x)=f(x)$,$\therefore f(-x)=f(2-x)$,

$\therefore f(x)=f(2+x)$,

$\therefore f(x)$是$\mathbf{R}$上的周期函数,且2是它的一个周期.

(3) $\because$ 对$x\in\left[0, \frac{1}{2}\right]$满足$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$,

$\therefore f(x_1+2n+x_2+2n)=f(x_1+2n)\cdot f(x_2+2n)$,

$\because x_1, x_2$ 在 $\left[2n, \frac{1}{2}+2n\right]$ 中也满足 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$,

又 $\because f(1)=f(1)\cdot f(0)$, $\therefore f(0)=1$, $\therefore f(2n)=1$.

又 $\because f\left(\frac{1}{2n}\right)=f^2\left(\frac{1}{2(n-1)}\right)$, 又 $\because f\left(\frac{1}{2}\right)=a^{\frac{1}{2}}$,

$\therefore f\left(\frac{1}{2n}\right)=a^{\frac{1}{2n}}$.

$\therefore a_n=f(2n)f\left(\frac{1}{2n}\right)=a^{\frac{1}{2n}}$,

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(\ln a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\ln a}{2n}\right)=0.$

说明: (1) 本题来自 2001 全国理科高考试题,考查函数的概念、图像、函数奇偶性和周期性以及数列极限等基础知识. 设计循序渐进,依托基本的函数,进行一定的抽象并附加了一些条件,得到了一个既抽象又有一定具体背景的周期函数,这种抽象考查了对函数概念、函数性质的认识程度,特别是运用函数已知的图形的几何特征进一步剖析,挖掘函数未知的性质. 在本题的设计中,以中学函数的基本概念为出发点,问题的提升与深入自然、明确. 从函数基本知识、基本技能的考查延伸到数列极限的考查,衔接紧密合理自然,体现了综合性试题的多方面要求.

(2) 第二问的结论可以推广到一般: 即一个定义在实数集 **R** 上的函数,关于直线 $x=a$ 对称,又关于直线 $x=b$, $(b\neq a)$ 对称,则函数 $y=f(x)$ 是周期函数,且 $T=2(b-a)$ 是它的一个周期. 请同学们完成它的证明.

例 7 已知 α、β 是关于 x 的二次方程 $2x^2-tx-2=0$ 的两个根,且 $\alpha<\beta$, 若函数 $f(x)=\frac{4x-t}{x^2+1}$.