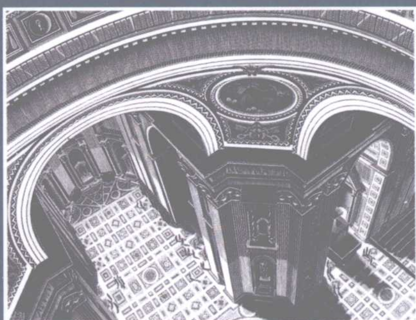
高等数学习题集
精品系列

超越吉米多维奇
数列的极限

《超越吉米多维奇——数列的极限》编写组　编



吉米多维奇(Демидович, Борис Павлович,1906-1977)，苏联人。1906年3月2日生于诺沃格鲁多克。1927年毕业于白俄罗斯大学。1927年至1931年任中学数学教师。1935年起在莫斯科大学工作。1936年获数学物理学博士学位，1965年成为教授。1977年4月23日逝世。吉米多维奇主要研究常微分方程定性理论、数学物理和函数论。重要著作有：《高等数学简明教程》(莫斯科，1959，与库德里亚采夫合著)、《计算数学基础》(莫斯科，1966，与马尔隆合著)。他编写的《数学分析习题集》多次再版，并被译成多种外国文字出版，中文译本于1956年由人民教育出版社出版。

吉米多维奇曾获1枚荣誉勋章和多枚其他奖章，1968年他还被授予俄罗斯联邦功勋科学家称号。

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

超越吉米多维奇

数列的极限

《超越吉米多维奇——数列的极限》编写组 编

CHAOYUE JIMIDUOWEIQI —SHULIE DE JIXIAN

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书由两部分组成.第一部分由400道题及其解答组成.第二部分由7个附录组成,分别为附录1古代东西方朴素的极限思想,附录2欧拉常数与斯特林公式,附录3高斯的算术几何平均数列,附录4数列的敛散性与迭代过程,附录5数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ 的证法,附录6一递推数列的几何解法及推广,附录7吉米多维奇《数学分析习题集》的几个习题.

本书适合大学生、中学生及数学爱好者使用.

图书在版编目(CIP)数据

超越吉米多维奇:数列的极限/《超越吉米多维奇:数列的极限》编写组编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2009.11

ISBN 978-7-5603-2938-3

Ⅰ.超… Ⅱ.超… Ⅲ.数列-极限(数学) Ⅳ.O122.5

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第148872号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 唐 蕾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16 印张28.25 字数505千字
版 次 2009年11月第1版 2009年11月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-2938-3
印 数 1~3 000册
定 价 48.00元

《超越吉米多维奇——数列的极限》
编　写　组

主编　刘培杰

编者　郭梦书　刘振杰　王海山

康　明　王岩青　王忠玉

牛秀君　白晓雪　高　岩

郭岗田

前　言

近日,纽约卡耐基基金会在美国首都华盛顿特区召开新闻发布会,发布卡耐基——普林斯顿高等研究中心高级研究委员会的一份关于数学和科学教育的新报告,委员会主席,普林斯顿高等研究中心前主任,数学教授菲利普·格里菲斯(代数几何专家,其著作《代数曲线》被译成中文)作了主题演讲,他指出:

> "为了让所有学生,而不仅仅只是少数学生或那些幸运地进入某类学校的学生,都能接受卓越的数学和科学教育,实现更高水平的数学和科学学习,美国必须全民动员起来.在未来的几十年中,年轻人将依赖于从今天的数学和科学教育中获得的技术和知识来分析问题,提出方案,将创造性的想法付诸实际.国家在经济发展中的创新能力,美国劳动力在全球经济中充满生机和活力的能力均依赖于宽厚的数学和科学学习基础."

数学是一切科学的基础,以至有人、特别是数学家愿意说数学不是科学而是更科学.数学的学习方式因人而异,各有不同,但所有这些学习方法的组合中有一个不变的交集部分,那就是做题,做大量的习题!但接下来的问题是做什么样的题,学习时间有限而习题无限,以有限逐无限殆矣,所以要选择好题、经典题.20世纪50年代全中国学苏联,引介了大量苏联数学著作,其中不乏名著,在分析学中影响最大的莫过于吉米多维奇的《数学分析习题集》,该书于1956年由人民教育出版社出版,其发行量之大就像形容明代程大位的《算法统宗》那样"凡持筹握算之士,莫不家藏一编",所以以此为范本当不会有错.

在目前中国眼球之争尤甚，特别是图书出版，其实眼球效应就是名人效应.2009年6月24日，有“中国私募教父”之称的赵丹阳以211万美元的天价与巴菲特共进午餐.而2006年，步步高电子有限公司的创始人段永平以62.01万美元拍下了与巴菲特共进午餐的机会.凭什么陪人吃一顿午餐要花费如此之巨，还不是巴菲特头上的股神光环.凡事沾名人则显.同理凡书沾名人则灵，这是不争事实.我们搞出版的当然也不能免俗，那么谁是读者心目中的数学的名家呢？记得在一次与新华书店的座谈会上，笔者与一位当年曾在王府井新华书店科技组站过柜台的女店员谈及数学书的销售时，她竟出乎笔者意料的当即报出了当年销量最大的三部数学书：吉米多维奇的《数学分析习题集》、菲·赫·金格尔茨的《数学分析教程》和斯米尔诺夫的《高等数学教程》，以距今时间之久远和其数学知识之不足来论着实令人吃惊，所以编写本书当在情理之中.

据调查有81%的美国人都觉得自己内心怀揣一本书，而且值得写出来.但对这一问题美国散文家爱泼斯坦是这样看的，他说：

> “很多人以为自己可以写一本书，其背后原因是三流书实在太多了.因此，从不远处看，写一本书似乎是件挺容易的事.毕竟，当我们读了一本坏小说之后，不知多少次想过：我也可以写得这么好.令人悲哀的事实是，我们真可以写得这么坏.”

我们在编写这本习题集时，真是这么想的，要超越吉米多维奇，但大师就是大师，如果能随便超越便不成其为大师了.吉米多维奇早年(1927年)毕业于白俄罗斯大学，1927～1931年曾任过中学数学教师，但1935年就到莫斯科大学工作了，1965年在本书主编2岁时，人家已经是大学教授了.

英国著名出版人，《我是编辑高手》的作者，伦敦艺术大学伦敦传媒学院图书出版学教授吉尔·戴维斯说：

> “赛马等同于书籍——我们希望其内容有潜力.骑手就是作者，编写内容并尽可能地使之有效.训练师是出版商，准备书籍出版使其在最好的时机出现在市场中.最后，赛道(无论快还是慢)是市场本身，由我们无法控制的因素影响着.赛跑时，我们无法控制天气；书市中，我们无法控制读者的需求.”

光阴似箭，日月如梭，一晃50多年过去了，读者的口味变了吗？凭着吉米多维奇这张旧名片还能否将本书再一次送到你的书桌上，这已经是我们无法

预知的事情了.我们能做的是尽量将题选好,将题目的顺序设计好,将题目的解答整理好.

英文有一个名句,叫做"The devil is in the details——魔鬼在于细节".关于这一说法的来源,有的人说这是"上帝在于细节"的转意,也有人说用到"魔鬼"的字眼,是因为细节中会有很多像魔鬼一样的陷阱,但两种解释主旨是相同的,即越是大事,细节越要精益求精,成败常在于细节,习题类图书细节格外多,有些书似口香糖,嚼嚼就吐掉,但习题书则像主食,是要细嚼慢咽的,所以当像食品安全一样要求严格,因为稍有不慎就会贻误学生.

台湾著名作家三毛在刚学数学时成绩极差,以致其数学老师用毛笔给她画了两个大大的黑眼框,这一受辱经历使她终身厌恶数学,尽管她后来走过48个国家,写了26部书,但都难以除去这一阴影.

而同为台湾作家的席慕蓉则幸运得多.在其初中毕业,数学面临补考的前一节课,老师巧妙的将三道试题溶入到讲课内容中,使其侥兴过关,她终身想起数学课与数学老师都觉得温暖.

如果把一个人学习数学的历程看成一个动力系统的话(显然是非线性的),那么最初的经历至关重要,它相当于系统的初始条件,而初始条件的微小差别将被系统放至巨大,这就是所谓的蝴蝶效应.中国古代对此早有认识,《礼记·经解》中有"君子慎始,差若毫厘,缪以千里".《魏书·乐志》中也有"但气有盈虚,黍有巨细,差之毫厘,失之千里".所以我们对起始点应给予充分的关注.极限是学习高等数学的起点,也是传统数学与近代数学的交汇点,能否顺利登上高等数学这一平台,这一步非常关键.为了将梯蹬缩小,我们分两步走,将极限又细分为《数列的极限》和《函数的极限》两本.本书为第一本,待得到读者认可后再推出第二本.

特别需要指出的是在本书的编写过程中参考了大量的数学分析教程与习题集以及习题解答,其中不乏世界级数学大家及国内数学名师的著作,在此向他们表示感谢.

50年前,在传媒大享李普曼70岁生日宴会上,年迈的李普曼说:"在这里,我们所做的只是每个主权公民应该做的事情,只不过其他人没有时间和兴趣来做罢了.这就是我们的职业,一个不简单的职业.我们有权为之感到高兴,因为这是我们的工作."

深挖数学题材,服务高端读者,这也是我们的工作.

编　者

2009年10月1日

⊙ 目录

题目及解答

❶ 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，且 $a < b$，证明：存在正数 N，使得当 $n > N$ 时有 $a_n < b_n$.

证明 取 $\varepsilon_0 = \dfrac{b-a}{2}(b > a) > 0$，因 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，由极限的 $\varepsilon - N$ 定义，对于 $\varepsilon_0 = \dfrac{b-a}{2}$，存在正整数 N_1，当 $n > N_1$ 时，有

$$|a_n - a| < \varepsilon_0$$

即

$$\frac{3a-b}{2} < a_n < \frac{a+b}{2}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，存在正整数 N_2，当 $n > N_2$ 时，有

$$|b_n - b| < \varepsilon_0$$

即

$$\frac{b+a}{2} < b_n < \frac{3b-a}{2}$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，当 $n > N$ 时，有

$$\frac{3a-b}{2} < a_n < \frac{a+b}{2} < b_n < \frac{3b-a}{2}$$

因此当 $n > N$ 时，有 $a_n < b_n$.

❷ 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n + a_{n-1}) = 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

证明 对任给 $\varepsilon > 0$，存在 N，使得当 $n \geqslant N$ 时，有

$$|2a_n + a_{n-1}| < \varepsilon$$

或

$$|a_n| \leqslant \frac{|a_{n-1}|}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

从而得

$$|a_n| \leqslant \frac{\frac{|a_{n-2}|}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2^2}+\frac{|a_{n-2}|}{2^2}\leqslant\cdots\leqslant$$

$$\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2^2}+\cdots+\frac{\varepsilon}{2^{n-N}}+\frac{|a_N|}{2^{n-N}}\quad(n>N)$$

由此知
$$|a_n|\leqslant\varepsilon+\frac{|a_N|}{2^{n-N}}\quad(n>N)$$
易知存在 $N_1>N$,使得
$$\frac{|a_N|}{2^{n-N}}<\varepsilon\quad(n>N_1)$$
最后有 $|a_n|<2\varepsilon(n>N_1)$.即得所证.

3 设$\{a_n\}$为无穷小数列,$\{b_n\}$为有界数列,证明:$\{a_nb_n\}$为无穷小数列.

证明 由题,因为$\{b_n\}$为有界数列,所以存在 $M>0$,对一切正整数 n,有 $|b_n|\leqslant M$.

又$\{a_n\}$为无穷小数列,利用极限的 $\varepsilon-N$ 定义,对任给 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,当 $n>N$ 时,有 $|a_n|<\frac{\varepsilon}{M}$.

因此,当 $n>N$ 时,有 $|a_nb_n-0|=|a_nb_n|\leqslant\frac{\varepsilon}{M}\cdot M=\varepsilon$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$,即$\{a_nb_n\}$为无穷小数列.

4 解答下列问题.

(1) 设 $a_1+a_2+a_3=0$,试论极限 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$,其中
$$I_n=a_1\sqrt{n}+a_2\sqrt{n+1}+a_3\sqrt{n+2}$$
(2) 试定 a,b,c 之值,使得
$$\lim_{n\to\infty}I_n=2,\quad I_n=n(an+\sqrt{2+bn+cn^2})$$
解 (1) 由 $a_1=-a_2-a_3$,可知
$$I_n=a_2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+a_3(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})=$$
$$\frac{a_2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+\frac{2a_3}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$
由此立即可得 $I_n\to0(n\to\infty)$.

(2) 由 $I_n = n^2\left(a + \sqrt{\frac{2}{n^2} + \frac{b}{n} + c}\right) \to 2(n \to \infty)$,可知

$$a + \sqrt{\frac{2}{n^2} + \frac{b}{n} + c} \to 0(n \to \infty)$$

即

$$a + \sqrt{c} = 0$$

$$a = -\sqrt{c}$$

从而根据

$$I_n = n\sqrt{2 + bn + cn^2} - n^2\sqrt{c} \to 2(n \to \infty)$$

知 $b = 0$. 于是由 $I_n = \dfrac{2}{\sqrt{c + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{c}} \to 2(n \to \infty)$ 得到 $c = \frac{1}{4}$,即

$$a = -\frac{1}{2}, b = 0, c = \frac{1}{4}$$

5 试证明下列极限式.

(1) $I = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{m} a_k \sqrt{n+k} = 0$(已知 $a_0 + a_1 + \cdots + a_m = 0$).

(2) $I = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_1 a_1^{n+1} + p_2 a_2^{n+1} + \cdots + p_k a_k^{n+1}}{p_1 a_1^n + p_2 a_2^n + \cdots + p_k a_k^n} = a_{k_0} \triangleq \max\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ $(a_i > 0, p_i > 0, i = 1,2,\cdots,k)$.

证明 (1) 因为

$$a_0\sqrt{n} + a_1\sqrt{n+1} + \cdots + a_m\sqrt{n+m} =$$

$$\sqrt{n}\left(a_0 + a_1\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \cdots + a_m\sqrt{1+\frac{m}{n}}\right) =$$

$$\sqrt{n}\left(a_0 + a_1 + a_1\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right) + \cdots + a_m + a_m\left(\sqrt{1+\frac{m}{n}} - 1\right)\right)$$

且记 $A = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_m|\}$,则有

$$I \leqslant \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot A\left(\left|\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right| + \cdots + \left|\sqrt{1+\frac{m}{n}} - 1\right|\right) \leqslant$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot A\left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{m}{n}\right) \leqslant \frac{\lim\limits_{n\to\infty} Am(m+1)}{2\sqrt{n}} = 0$$

(2) 若 $a_1 = a_2 = \cdots = a_k$,则结论显然为真. 现设 $a_{k_0} > a_i (i \neq k_0)$,则

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{k_0}^{n+1}}{a_{k_0}^{n}}\cdot\frac{p_1\left(\frac{a_1}{a_{k_0}}\right)^{n+1}+\cdots+p_{k_0}\left(\frac{a_{k_0}}{a_{k_0}}\right)^{n+1}+\cdots+p_k\left(\frac{a_k}{a_{k_0}}\right)^{n+1}}{p_1\left(\frac{a_1}{a_{k_0}}\right)^{n}+\cdots+p_{k_0}\left(\frac{a_{k_0}}{a_{k_0}}\right)^{n}+\cdots+p_k\left(\frac{a_k}{a_{k_0}}\right)^{n}}=a_{k_0}$$

6 设有数列$\{a_n\}$,令$b_n=pa_n+qa_{n+1}(n\in\mathbf{N})$,且$\{b_n\}$是收敛列.

(1) 若$|p|<q$,则$\{a_n\}$收敛.

(2) 若$|p|\geqslant q$,则$\{a_n\}$不一定收敛.

证明 (1) 设$b_n\to b(n\to\infty)$,并记$b_n=b+\varepsilon_n,\varepsilon_n\to 0(n\to\infty)$,以及$r=\frac{p}{q}$,有

$$a_{n+1}=\frac{b+\varepsilon_n}{q}-\frac{pa_n}{q}=\frac{b+\varepsilon_n}{q}-ra_n$$

$$a_{n+2}=\frac{b+\varepsilon_{n+1}}{q}-ra_{n+1}=\frac{b(1-r)}{q}+\frac{\varepsilon_{n+1}-r\varepsilon_n}{q}+r^2a_n$$

$$\vdots$$

$$a_{n+k}=b(1-r+r^2+\cdots+(-r)^{k-1})+\frac{1}{q}+$$
$$(\varepsilon_{n+k-1}-r\varepsilon_{n+k-2}+\cdots+(-r)^{k-1}\varepsilon_n)+(-r)^ka_n$$

注意到

$$\left(\frac{b}{q}\right)(1-r+r^2-\cdots+(-r)^{k-1})=\frac{b}{q}\frac{1-(-r)^k}{1+r}=\frac{b}{p+q}q(1-(-r)^k)$$

及对任给$\varepsilon>0$,存在N,使得$|\varepsilon_n|<\varepsilon(n>N)$,故可得

$$\left|a_{n+k}-\frac{b}{p+q}\right|<\left|\frac{|b|}{p+q}+|a_n|\right||r|^k+\varepsilon\frac{1-|r|^k}{1-|r|}$$

由此易知在$|p|<q$时,$\{a_n\}$收敛.

(2) 若$|p|\geqslant q$,则取$a_n=\left(-\frac{p}{q}\right)^n(n\in\mathbf{N})$,易知$\{a_n\}$不收敛,但是我们有

$$b_n=p\left(-\frac{p}{q}\right)^n+q\left(-\frac{p}{q}\right)^{n+1}=0\quad(n\in\mathbf{N})$$

7 设$\{a_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=A$,则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(n!\,a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=0$.

证明 (1) 令 $S_0=0,S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n(n=1,2,\cdots)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ka_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k(S_k-S_{k-1})=$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}kS_k-\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)S_k\right)=$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(nS_n-\sum_{k=1}^{n-1}S_k\right)=$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(S_n-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}S_k}{n}+\frac{S_n}{n}\right)=$$
$$A-A=0$$

(2) 有

$$0\leqslant(n!\,a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=(a_1\cdot 2a_2\cdot 3a_3\cdot\cdots\cdot na_n)^{\frac{1}{n}}\leqslant$$
$$\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}\to 0\quad(n\to\infty)$$

8 设 $\{a_n\}$ 是递增正数列. 若对任意的正整数 m,n，有 $a_{mn}\geqslant ma_n$，且 $\sup\limits_{n\geqslant 1}\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}=A<+\infty$，则 $\dfrac{a_n}{n}\to A(n\to\infty)$.

证明 不妨设 $A>0$. 由题设知，对任给 $\varepsilon>0$，存在 N，使得

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{a_N}{N}\leqslant A$$

及

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{a_{mN}}{mN}\leqslant A\quad(m\in\mathbf{N})$$

从而当 $n\geqslant N$ 且 $mN\leqslant n<(m+1)N$ 时，可得

$$\frac{a_n}{n}\geqslant\frac{a_{mN}}{(m+1)N}=\frac{a_{mN}}{mN}\cdot\frac{m}{m+1}$$

这就是说，当 n 充分大时，有 $\dfrac{a_n}{n}>A-\dfrac{\varepsilon}{2}$. 由此即得所证.

9 利用 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 为递增数列的结论，证明 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n\right\}$ 为

递增数列.

证法 1 因$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$为递增数列,则对任意自然数 n,有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

即

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

从而

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}&<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\cdot\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}=\\&\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\cdot\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}<\\&\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\end{aligned}$$

故数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\right\}$是递增数列.

证法 2

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n&=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}<\frac{\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}}{1+\frac{1}{n+1}}=\\&\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+1}\cdot\frac{1+\frac{1}{n+2}}{1+\frac{1}{n+1}}=\\&\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n^2+4n+3}{n^2+4n+4}<\\&\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

故数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\right\}$是递增数列.

10 按 $\varepsilon-N$ 定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}=0.$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$,其中 $a_n=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}, & n\ \text{为偶数}\\ \dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}, & n\ \text{为奇数}\end{cases}$

证明　按 $\varepsilon-N$ 定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,即对任意的 $\varepsilon>0$,求出 $N\in\mathbf{N}$,使得 $n>N$ 时有 $|a_n-a|<\varepsilon$ 即可.也可将 $|a_n-a|$ 的表达式适当放大,放大后的式子当 $n\to\infty$ 时为无穷小量,且式子简单,则 N 就易求出.

(1) 因为

$$|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-0|=\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right|=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

因此对任意的 $\varepsilon>0$,只要 $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}<\varepsilon$,即 $n>\dfrac{1}{4\varepsilon^2}$,取 $N=\left[\dfrac{1}{4\varepsilon^2}\right]$(本书中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数),则当 $n>N$ 时,有

$$|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-0|<\frac{1}{2\sqrt{n}}<\varepsilon$$

故
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$$

(2) 由于

$$\left|\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}-0\right|=\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^3}=\frac{n+1}{2n^2}\leqslant\frac{2n}{2n^2}=\frac{1}{n}$$

因此,对任给 $\varepsilon>0$,取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,则当 $n>N$ 时,有

$$\left|\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}-0\right|\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}=0$$

(3) n 为偶数时,由于

$$\left|\frac{n-1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}$$

因此对任给 $\varepsilon > 0$,取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,当 $n > N$ 时,有 $\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| < \varepsilon$ 成立.

n 为奇数时,由于

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+n}}{n} - 1\right| = \left|\frac{\sqrt{n^2+n}-n}{n}\right| = \left|\frac{n}{n(\sqrt{n^2+n}+n)}\right| = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}+n} < \frac{1}{n}$$

因此对 $\varepsilon > 0$,取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,当 $n > N$ 时,有 $\left|\frac{\sqrt{n^2+n}-n}{n}\right| < \varepsilon$ 成立.

综上,对任意 $\varepsilon > 0$,取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,使得当 $n > N$ 时,有 $\left|\frac{n-1}{n} - 1\right| < \varepsilon$ 且 $\left|\frac{\sqrt{n^2+n}}{n} - 1\right| < \varepsilon$,即对任意 $n > N$,有 $|a_n - 1| < \varepsilon$,由此可得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

11 已知数列 $\{x_n\}$ 满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$.

证明 由 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0$,对任意给定的 $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ 存在 $N > 2$,使当 $n \geqslant N$ 时,有

$$|x_n - x_{n-2}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

于是对充分大的 p,有

$$\begin{aligned}
|x_{N+p} - x_{N+(p-1)}| = &|x_{N+p} - x_{N+p-2} + x_{N+p-2} - x_{N+p-1}| \leqslant \\
&|x_{N+p} - x_{N+p-2}| + |x_{N+p-2} - x_{N+p-1}| \leqslant \\
&\frac{\varepsilon}{2} + |x_{N+p-1} - x_{N+p-2}| = \\
&\frac{\varepsilon}{2} + |x_{N+p-1} - x_{N+p-3} + x_{N+p-3} - x_{N+p-2}| \leqslant \\
&\frac{\varepsilon}{2} + |x_{N+p-1} - x_{N+p-3}| + |x_{N+p-3} - x_{N+p-2}| \leqslant \\
&2\cdot\frac{\varepsilon}{2} + |x_{N+p-2} - x_{N+p-3}| \leqslant \cdots \leqslant \\
&p\cdot\frac{\varepsilon}{2} + |x_{N+p-p} + x_{N+p-p-1}| = \\
&p\cdot\frac{\varepsilon}{2} + |x_N - x_{N-1}|
\end{aligned}$$

选取 p,使 $N+p>\frac{2|x_N-x_{N-1}|}{\varepsilon}$,则

$$\left|\frac{x_{N+p}-x_{N+p-1}}{N+p}\right| \leqslant \frac{p}{N+p}\cdot\frac{\varepsilon}{2}+\frac{|x_N-x_{N-1}|}{N+p}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$$

12 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$,又当 $m,n\in\mathbf{N},t_{mn}\geqslant 0,\sum\limits_{n=1}^{m}t_{mn}=1$,$\lim\limits_{m\to+\infty}t_{mn}=0$ 时,试证:$\lim\limits_{n\to+\infty}(t_{n1}a_1+t_{n2}a_2+\cdots+t_{nn}a_n)=a$.

证明 因为 a_n 收敛于 a,故 a_n 有界,设 $|a_n-a|<M,M>0,n=1,2,\cdots$.

对 $\forall\varepsilon>0,\exists N_1\in\mathbf{N}$,当 $n>N_1$ 时,有

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$$

固定 N_1,由于 $\lim\limits_{m\to+\infty}t_{mn}=0$,所以存在 N_2,当 $n>N_2$ 时,有

$$|t_{nk}|<\frac{\varepsilon}{2MN_1}\quad(k=1,2,\cdots,N_1)$$

取 $N=\max(N_1,N_2)$,当 $n>N$ 时,由 $\sum\limits_{n=1}^{m}t_{mn}=1$,有

$$\begin{aligned}|t_{n1}a_1+\cdots+t_{nn}a_n-a|&=|t_{n1}a_1+\cdots+t_{nn}a_n-(t_{n1}+\cdots+t_{nn})a|=\\&|t_{n1}(a_1-a)+\cdots+t_{nn}(a_n-a)|\leqslant\\&t_{n1}|a_1-a|+\cdots+t_{nN_1}|a_{N_1}-a|+\\&t_{nN_1+1}|a_{N_1+1}-a|+\cdots+t_{nn}|a_n-a|<\\&M(t_{n1}+\cdots+t_{nN_1})+\\&\frac{\varepsilon}{2}(t_{nN_1+1}+\cdots+t_{nn})\leqslant\\&MN_1\cdot\frac{\varepsilon}{2MN_1}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}t_{nk}a_k=a$$

13 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=b$,试证

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0}{n}=ab$$