高級中學教科適用

最新實用三角學

錢克仁編著

高級中學教科適用

最新實用三角學

錢克仁編著

開明書店印行

最新實用三角學

三十五年七月初版　三十六年七月再版

每冊定價國幣二元五角

編著者　錢克仁

發行者　開明書店
代表人范洗人

印刷者　開明書店

(104 P.) W　仁

編 輯 大 意

一. 本書依據二十九年七月頒布之高中課程標準編輯，足供高級中學第一學年平面三角學教學之用.

二. 本書共分九章，前五章注重三角形之解法，以及實用問題之解決; 後四章注重理論之探究，以備學生以後進修高深數學之用.

三. 初中畢業學生雖曾習過對數，但初中代數學中未能廣用對數，故本書不厭重複，第四章仍專論對數，俾學生習之，熟能生巧，於解三角形時，收精確敏捷之效.

四. 座標理論為近世數學重要基礎之一，本書特加詳論，使高中一年級學生先得一明確概念，嗣後對函數之變跡，方程式之圖解，始勿再視為畏途.

五. 三角學為理論部份較少之數學教程，故本書特多選例題，以為學生解題之示範. 多備習題，以為學生習作思考之用.

六. 本書受劉薰宇先生之鼓勵，並承借大量參考書，始行動筆寫作. 幾月以來，隨時得劉先生珍貴意見，並蒙校閱修正，於此編者特誌深摯之謝意.

編 者

三十二年七月 貴州修文

目　　錄

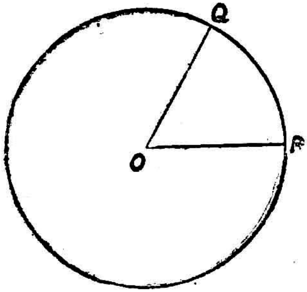
最新實用三角

第一章 角之量法

1. **三角學** 三角學一詞希臘原文之意爲三角形之測量，亦卽在研究三角形之邊與角之關係也．但輓近，三角學之範圍大有擴張，現包括所有關於角之函數關係之硏究，其結果在純粹理論之研究上或在實用上均爲極重要之工具

2. **角之單位** 二直線相交卽成一角．角之大小，必先定單位以量之．量角之單位有三種，分述如下：

(一)六十分制 六十分制以「度」爲單位，一度爲直角之九十分之一，亦爲圓周三百六十分之一弧所對之圓心角．度以下，復分一度爲六十分，再分一分爲六十秒．度，分，秒，吾人以 °，′，″，表之；例如五度三分五十秒記爲 $5°3'50''$．度以下之分秒亦有以十進法記之者，如六度半記如 $6.5° = 6°30'$.



第一圖

(二)弧度制 以 r 爲半徑作圓；圓上弧長等於 r 之弧所對之圓心角稱爲一弧角．如圖，設 PQ 之弧長等於半徑 OP，則

$$\angle POQ = 1 \text{弧角}.$$

已知圓周爲 $2\pi r$，卽圓周爲半徑 r 之 2π 倍，故環繞一點一周所得之

角可分爲 2π 個弧角.

(三)百分制　分直角爲一百「級」，一級爲一百分，一分爲一百秒，是爲百分制. 級，分，秒，以 ^{g}，$'$，$''$ 表之；例如十一級二十分八十五秒記爲 $11^{g}\ 20'\ 85''$.

六十分制爲昔日巴比倫人所創，巴族天文學家觀測天象時以六十進位，故度爲六十分，分爲六十秒. 此制通行，垂四千餘年，爲世人稔知，實用上多用此制，至今不衰. 弧度制自西曆十八世紀起始通行，在高等數學中類皆用之，因其可直視之爲數而免寫符號故也. 例如角爲 3 弧角可祇書爲 3. 百分制爲十八世紀末法國大革命時改制之際所定，故又稱法國制. 然因六十分制通行已久，一旦改制，各種觀測結果，以及成案均須更改，似無必要；此制終未廣爲應用.

3. **各種單位間之關係**　因定直線上一點，將線繞轉一週後，復合初位，所得之角爲 2π 個弧角；但此角又爲三百六十度，故

$$2\pi\ \text{弧角}=360^\circ; \qquad (1)$$

即

$$1\ \text{弧角}=\frac{180^\circ}{\pi} \qquad (\pi=3.14159\cdots)$$

$$=\frac{180^\circ}{3.1416}$$

$$=57^\circ.2957=57^\circ\,17'45'';$$

反之

$$1^\circ=\frac{2\pi\text{弧角}}{360}=\frac{\pi\text{弧角}}{180}$$

$$=\frac{3.1416\text{弧角}}{180}$$

$$= 0.01745\text{弧角}$$

由(1) 讀者可自推算:

$$180^\circ = \pi\text{弧角},\ 270^\circ = \frac{3\pi}{2}\text{弧角},$$

$$90^\circ = \frac{\pi}{2}\text{弧角},\ 30^\circ = \frac{\pi}{6}\text{弧角等.}$$

設一角 α, 以六十分制計之爲 D 度,以弧度制計之爲 R 弧角, 以百分制計之爲 G 級.

$$\text{因}\quad \text{直角} = 90^\circ = \frac{\pi}{2} = 100^g,$$

則 $\frac{D}{90}$, $\frac{R}{\frac{\pi}{2}}$, $\frac{G}{100}$ 三者均表 α 角與一直角之比, 因得公式

$$\frac{\alpha\text{角}}{\text{直角}} = \frac{D}{90} = \frac{R}{\frac{\pi}{2}} = \frac{G}{100}. \tag{2}$$

例如一角爲 60°, 則 $D = 60$,代入 (2) 式,

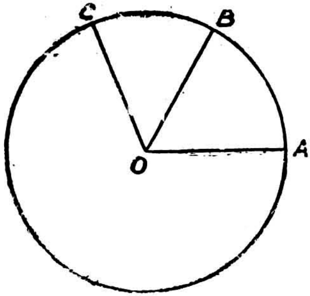
$$\text{則}\quad R = \frac{\frac{\pi}{2}\cdot D}{90} = \frac{\frac{\pi}{2}\cdot 60}{90} = \frac{\pi}{3},$$

即 60° 爲 $\frac{\pi}{3}$ 弧角.

$$G = \frac{100D}{90} = \frac{100.60}{90} = 66.6667$$

即 60° 爲 $66^g\ 66'\ 67''$.

4. 弧長　設 $\angle AOC$ 爲任意一圓心角，則因圓心角之大小與所張之弧之長成正比例，故



第二圖

$$\frac{\angle AOC}{\angle AOB} = \frac{\widehat{AC}}{\widehat{AB}}$$

用弧度制時，$\widehat{AB}=$ 半徑，而 $\angle AOB$ 爲一單位角，故

$$\angle AOC = \frac{\widehat{AC}}{\text{半徑}} \text{ 弧角;}$$

卽　圓心角等於 $\dfrac{\text{圓心角所張之弧長}}{\text{半徑}}$ 弧角.

又　　$\widehat{AC} = \angle AOC.$ 半徑，

卽一圓弧之長爲半徑與此弧所對圓心角（用弧度制）之乘積.

例 1. 設圓半徑爲 2 尺 5 寸，圓心角 α 所張之弧長爲 1 尺，求 α 角.

解.　$$\alpha = \frac{\text{弧長}}{\text{半徑}} = \frac{1}{2.5} = 0.4$$

故 α 爲 0.4 弧角，卽 $57^\circ\ 17'\ 45'' \times 0.4 = 14^\circ 19' 26''.5$

例 2. 設圓半徑爲 5 尺，求圓心角爲 $33^\circ\ 15'$ 所張之弧長.

解.　先化 $33^\circ\ 15'$ 爲弧角.

$$33^\circ\ 15' = 33\frac{1}{4}^\circ$$

$$35^\circ\ 15' = 33\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{180} \text{ 弧角}$$

$$= \frac{133}{720}\pi \text{弧角}$$

$$\text{弧長} = \text{圓心角} \times \text{半徑}$$

$$= \frac{133}{720}\pi \cdot 5$$

$$= \frac{133}{144} \cdot \frac{22}{7} \quad (\text{取}\pi = \frac{22}{7})$$

$$= 2\frac{65}{72} = 2.9 \text{强}$$

即弧長為 2.9 尺強.

習 題 一

以百分制表下列諸角:

1. $69^\circ\ 13'\ 30''$

答: $76^g\ 91^`\ 66^{``}.7$

2. $19^\circ\ 0'\ 45''$

答: $21^g\ 12^`\ 50^{``}$

$142^\circ\ 15'\ 45''$

答: $158^g\ 6\ 94^{``}.4$

以六十分制表下列諸角:

4. $1^g\ 2^`\ 3^{``}$

答: $55'\ 5''.8$

5. $56^g\ 87^`\ 50^{``}$

答: $50^\circ\ 11'\ 15''$

6. $37' 5''$

答: $20' 0.4''$

7. 兩角之和爲 80^{g}, 其差爲 18°, 問各幾度?

答: 45°, 27°.

8. 設三角形三角之比爲 4: 5: 6, 問三角各爲幾弧角? 幾度?

答: $\frac{4\pi}{15}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{5}$;

48°, 60°, 72°.

9. 設一二等邊三角形之底角爲頂角之 12 倍, 問頂角爲幾級?

答: 8^{g}.

計算下列諸題時, 可設 $\pi = \frac{22}{7}$.

10. 一飛輪每秒鐘轉動 35 周, 問轉 5 弧角須時若干?

答: $\frac{1}{44}$ 秒.

11. 一鐘分針長 4.4寸, 問一小時間針行之弧長若干?

答: 0.27 寸.

12. 繫馬於樹, 馬張緊全繩走 52.36 尺, 樹端之繩張角 75°, 求繩長.

答: 40 尺.

13. 前題, 若繩長 27 尺, 樹端繩之張角爲 70°, 求馬在繩之他端走路若干?

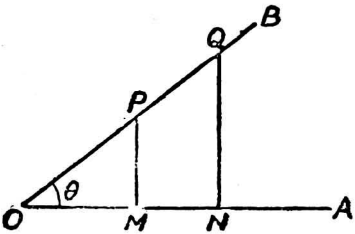
答: 33 尺.

14. 一人跑步於周長 792 公尺之圓形跑道上，平均每分鐘經歷之圓心角為 $2\frac{6}{7}$ 弧角，問此人若跑路 9 公里，須時若干？（1公里＝1000公尺）

答；25 分

第二章 三角函數

5. 銳角之三角函數 設二直線 OA, OB 交成銳角 θ，在 OB 上任取二點 P, Q，作 PM，QN 垂直於 OA. 則所得 $\triangle POM$，$\triangle QON$ 為二相似三角形，因二者均有直角及 θ 故也. 相似三角形對應邊之比相等，故有



第三圖

$$\frac{MP}{OP}=\frac{NQ}{OQ}=\frac{\theta\text{之對邊}}{\text{斜邊}};$$

$$\frac{OM}{OP}=\frac{ON}{OQ}=\frac{\theta\text{之隣邊}}{\text{斜邊}};$$

$$\frac{MP}{OM}=\frac{NQ}{ON}=\frac{\theta\text{之對邊}}{\theta\text{之隣邊}},$$

$$\frac{OM}{MP}=\frac{ON}{NQ}=\frac{\theta\text{之隣邊}}{\theta\text{之對邊}},$$

$$\frac{OP}{OM}=\frac{OQ}{ON}=\frac{\text{斜邊}}{\theta\text{之隣邊}},$$

$$\frac{OP}{MP}=\frac{OQ}{NQ}=\frac{\text{斜邊}}{\theta\text{之對邊}}.$$

吾人因此得知，一角之二邊任意延長，其所成直角三角形之邊之比為一定. 然若角有變更，則所成直角三角形之邊之各比均將隨之變值. 因此，各邊之比為角之函數. 一角 θ 所在直角三角

形中各邊之比稱θ之三角函數,卽上述之六種.角之三角函數既有六種,吾人必各冠之以名,以爲區別.

命 $\dfrac{MP}{OP}=\dfrac{\theta\text{之對邊}}{\text{斜邊}}=Sin\,\theta$, 讀如$\theta$之正弦(*Sine*);

$\dfrac{OM}{OP}=\dfrac{\theta\text{之隣邊}}{\text{斜邊}}=Cos\,\theta$, 讀如$\theta$之餘弦(*Cosine*);

$\dfrac{MP}{OM}=\dfrac{\theta\text{之對邊}}{\theta\text{之隣邊}}=Tan\,\theta$, 讀如$\theta$之正切(*Tangent*);

$\dfrac{OM}{MP}=\dfrac{\theta\text{之隣邊}}{\theta\text{之對邊}}=Cot\,\theta$, 讀如$\theta$之餘切(*Cotangent*);

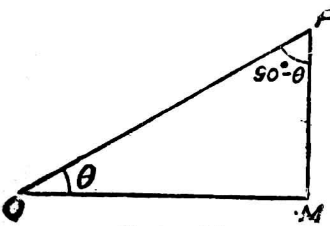
$\dfrac{OP}{OM}=\dfrac{\text{斜邊}}{\theta\text{之隣邊}}=Sec\,\theta$, 讀如$\theta$之正割(*Secant*);

$\dfrac{OP}{MP}=\dfrac{\text{斜邊}}{\theta\text{之對邊}}=Csec\,\theta$, 讀如$\theta$之餘割(*Cosecant*).

$Sin\,\theta$. $Cos\,\theta$ 既爲θ之函數,則 $1-Cos\,\theta$,

$1-Sin\,\theta$ 亦爲θ之函數;命 $1-Cos\,\theta=Vers\,\theta$,讀如$\theta$之正矢(*Versed Sine*);

$1-Sin\,\theta=Covers\,\theta$,讀如$\theta$之餘矢(*Coversed Sine*).因是,六種三角函數之外,復得二種,惟後二者較爲少用鮮見.



第四圖

6.　餘角函數　在直角三角形$\triangle MOP$內,設$\angle MOP=\theta$,則$\angle MPO=90°-\theta$,卽$\angle MPO$爲$\angle MOP$之餘角.

就$\angle MPO$處觀之,則MO爲