

高級中學教科適用

最新實用三角學

錢克仁編著

高級中學教科用

最新實用三角學

錢克仁編著

開明書店印行

最新實用三角學

三十五年七月初版 三十六年七月再版

每冊定價國幣二元五角

編著者 錢克仁

發行者 開明書店
代表人 范洗人

印刷者 開明書店

有著作權 不准翻印

編輯大意

一、本書依據二十九年七月頒布之高中課程標準編輯，足供高級中學第一學年平面三角學教學之用。

二、本書共分九章，前五章注重三角形之解法，以及實用問題之解決；後四章注重理論之探究，以備學生以後進修高深數學之用。

三、初中畢業學生雖曾習過對數，但初中代數學中未能廣用對數，故本書不厭重複，第四章仍專論對數，俾學生習之，熟能生巧，於解三角形時，收精確敏捷之效。

四、座標理論為近世數學重要基礎之一，本書特加詳論，使高中一年級學生先得一明確概念，嗣後對函數之變跡，方程式之圖解，始勿再視為畏途。

五、三角學為理論部份較少之數學教程，故本書特多選例題，以為學生解題之示範，多備習題，以為學生習作思考之用。

六、本書受劉薰宇先生之鼓勵，並承借大量參考書，始行動筆寫作。幾月以來，隨時得劉先生珍貴意見，並蒙校閱修正，於此編者特誌深摯之謝意。

編者

三十二年七月 貴州修文

目 錄

第一章 角之量法	1
1. 三角學	1
2. 角之單位	1
3. 各種單位間之關係	2
4. 弧長	4
第二章 三角函數	8
5. 銳角之三角函數	8
6. 餘角函數	9
7. 平面上點之座標	12
8. 任意角之三角函數	15
9. 負角之三角函數	19
10. 三角函數之基本關係	22
11. 三角函數之線的表示	30
12. 特別角之函數	32
13. 三角函數表檢查法	35
14. 化第二, 第三, 第四象限角之函數爲銳角之函數	39
第三章 直角三角形解法	48
15. 解三角形	48
16. 解直角三角形	43

17. 二等邊三角形之解法	51
18. 解正多邊形	52
19. 應用問題	57
第四章 對數	65
20. 定義	65
21. 對數之基本定理	65
22. 常用對數	71
23. 定位部與定值部	71
24. 對數表之用法	73
25. 三角函數對數表	77
第五章 任意三角形之解法	82
26. 本章之目的	82
27. 正弦定律	82
28. 已知一邊及二角	84
29. 已知二邊及一對角	86
30. 餘弦定律	94
31. 已知二邊及其夾角	95
32. 正切定律	98
33. 三角形之面積	105
34. 三角形內切圓之半徑	107
35. 已知三邊求三角	108

36. 航海上之應用.....	110
-----------------	-----

第六章 三角恆等式114

37. 三角恆等式	114
38. 二角之和之正弦與餘弦	114
39. 二角之差之正弦與餘弦	118
40. 二角之和或差之正切與餘切	121
41. 倍角之三角函數	124
42. 半角之三角函數	128
43. 雜例	130
44. 函數之和與差	136
45. 三角形中邊與角之關係式	142

第七章 反三角函數,三角方程式.....146

46. 反三角函數	146
47. 函數值相同之角	146
48. 有同正弦值諸角之通值	147
49. 有同餘弦值諸角之通值	148
50. 有同正切值諸角之通值	149
51. 反三角函數恆等式	151
52. 反三角函數方程式	153
53. 三角方程式	155
54. 聯立三角方程式	159

55. 消去法	161
第八章 三角函數之變跡	166
56. 定義	166
57. 正弦曲線	166
58. 正切曲線	167
59. 正割曲線	168
60. 三角函數之週期性	169
第九章 三角函數極限, 造表法略論	171
61. 三角函數極限之基本定理	171
62. 與 0° 或 90° 相鄰諸正銳角之函數	173
63. 造表法略論	177
64. 表之精確度	178
附錄	181
一 三角學中西名詞對照表	181
二 對數表	184
三 三角函數表	186
正弦餘弦真數表	
正切餘切真數表	
四 三角函數對數表	190
正弦餘弦函數對數表	
正切餘切函數對數表	

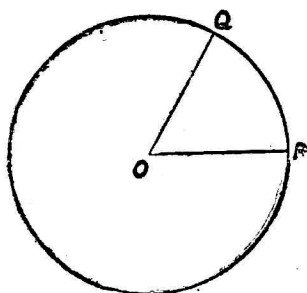
最新實用三角

第一章 角之量法

1. 三角學 三角學一詞希臘原文之意為三角形之測量，亦即在研究三角形之邊與角之關係也。但較近，三角學之範圍大有擴張，現包括所有關於角之函數關係之研究，其結果在純粹理論之研究上或在實用上均為極重要之工具

2. 角之單位 二直線相交即成一角。角之大小，必先定單位以量之。量角之單位有三種，分述如下：

(一)六十分制 六十分制以「度」為單位，一度為直角之九十分之一，亦為圓周三百六十分之一弧所對之圓心角。度以下，復分一度為六十分，再分一分為六十秒。度，分，秒，吾人以 $^{\circ}$, $'$, $''$ 表之；例如五度三分五十秒記為 $5^{\circ}3'50''$ 。度以下之分秒亦有以十進法記之者，如六度半記如 $6.5^{\circ}=6^{\circ}30'$ 。



第一圖

(二)弧度制 以 r 為半徑作圓；圓上弧長等於 r 之弧所對之圓心角稱為一弧角。如圖，設 PQ 之弧長等於半徑 OP ，則

$$\angle POQ = 1 \text{ 弧角.}$$

已知圓周為 $2\pi r$ ，即圓周為半徑 r 之 2π 倍，故環繞一點一周所得之

角可分爲 2π 個弧角。

(三)百分制 分直角爲一百「級」，一級爲一百分，一分爲一百秒，是爲百分制。級，分，秒，以 $^{\circ}$, $'$, $''$ 表之；例如十一級二十分八十五秒記爲 $11^{\circ} 20' 85''$ 。

六十分制爲昔日巴比倫人所創，巴族天文學家觀測天象時以六十進位，故度爲六十分，分爲六十秒。此制通行，垂四千餘年，爲世人稔知，實用上多用此制，至今不衰。弧度制自西曆十八世紀起始通行，在高等數學中類皆用之，因其可直視之爲數而免寫符號故也。例如角爲 3 弧角可祇書爲 3。百分制爲十八世紀末法國大革命時改制之際所定，故又稱法國制。然因六十分制通行已久，一旦改制，各種觀測結果，以及成案均須更改，似無必要；此制終未廣爲應用。

3. 各種單位間之關係 因定直線上一點，將線繞轉一週後，復合初位，所得之角爲 2π 個弧角；但此角又爲三百六十度，故

$$2\pi \text{ 弧角} = 360^{\circ}; \quad (1)$$

$$\text{即} \quad 1 \text{ 弧角} = \frac{180^{\circ}}{\pi} \quad (\pi = 3.14159\dots)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{180^{\circ}}{3.1416} \\ &= 57^{\circ}.2957 = 57^{\circ} 17' 45''; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{反之} \quad 1^{\circ} &= \frac{2\pi \text{ 弧角}}{360} = \frac{\pi \text{ 弧角}}{180} \\ &= \frac{3.1416 \text{ 弧角}}{180} \end{aligned}$$

$$= 0.01745 \text{ 弧度}$$

由(1)讀者可自推算:

$$180^\circ = \pi \text{ 弧度}, \quad 270^\circ = \frac{3\pi}{2} \text{ 弧度},$$

$$90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ 弧度}, \quad 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ 弧度等.}$$

設一角 α , 以六十分制計之爲 D 度, 以弧度制計之爲 R 弧度, 以百分制計之爲 G 級.

$$\text{因 直角} = 90^\circ = \frac{\pi}{2} = 100^g,$$

則 $\frac{D}{90}, \frac{R}{\frac{\pi}{2}}, \frac{G}{100}$ 三者均表 α 角與一直角之比, 因得

公式

$$\frac{\alpha \text{ 角}}{\text{直角}} = \frac{D}{90} = \frac{R}{\frac{\pi}{2}} = \frac{G}{100}. \quad (2)$$

例如一角爲 60° , 則 $D = 60$, 代入 (2) 式,

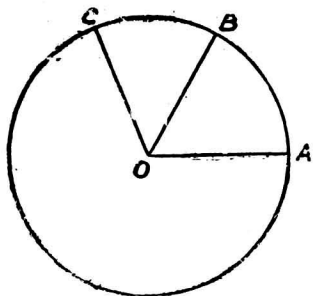
$$\text{則 } R = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot D}{90} = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot 60}{90} = \frac{\pi}{3},$$

即 60° 爲 $\frac{\pi}{3}$ 弧度.

$$G = \frac{100D}{90} = \frac{100 \cdot 60}{90} = 66.6667$$

即 60° 爲 $66^g 66' 67''$.

4. 弧長 設 $\angle AOC$ 爲任意一圓心角，則因圓心角之大小與所張之弧之長成正比，故



第二圖

$$\frac{\angle AOC}{\angle AOB} = \frac{\widehat{AC}}{\widehat{AB}}$$

用弧度制時， $\widehat{AB}$ = 半徑，而 $\angle AOB$ 爲一單位角，故

$$\angle AOC = \frac{\widehat{AC}}{\text{半徑}} \text{ 弧角；}$$

即 圓心角等於 $\frac{\text{圓心角所張之弧長}}{\text{半徑}}$ 弧角。

又 $\widehat{AC} = \angle AOC \cdot \text{半徑}$ ，

即一圓弧之長爲半徑與此弧所對圓心角（用弧度制）之乘積。

例 1. 設圓半徑爲 2 尺 5 寸，圓心角 α 所張之弧長爲 1 尺，求 α 角。

解.
$$\alpha = \frac{\text{弧長}}{\text{半徑}} = \frac{1}{2.5} = 0.4$$

故 α 爲 0.4 弧角，即 $57^\circ 17' 45'' \times 0.4 = 14^\circ 19' 26'' .5$

例 2. 設圓半徑爲 5 尺，求圓心角爲 $33^\circ 15'$ 所張之弧長。

解. 先化 $33^\circ 15'$ 爲弧角。

$$33^\circ 15' = 33 \frac{1}{4}^\circ$$

$$33^\circ 15' = 33 \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{180} \text{ 弧角}$$

$$= \frac{133}{720} \pi \text{ 弧角}$$

$$\text{弧長} = \text{圓心角} \times \text{半徑}$$

$$= \frac{133}{720} \pi \cdot 5$$

$$= \frac{133}{144} \cdot \frac{22}{7} \quad (\text{取 } \pi = \frac{22}{7})$$

$$= 2 \frac{65}{72} = 2.9 \text{ 強}$$

即弧長爲 2.9 尺強。

習 題 一

以百分制表下列諸角：

1. $69^{\circ} 13' 30''$

答: $76^{\circ} 91' 66''.7$

2. $19^{\circ} 0' 45''$

答: $21^{\circ} 12' 50''$

$142^{\circ} 15' 45''$

答: $158^{\circ} 6' 94''.4$

以六十分制表下列諸角：

4. $1^{\circ} 2' 3''$

答: $55' 5''.8$

5. $56^{\circ} 87' 50''$

答: $50^{\circ} 11' 15''$

6. $37^{\circ} 5''$

答: $20' 0.4''$

7. 兩角之和爲 80° , 其差爲 18° , 問各幾度?

答: $45^{\circ}, 27^{\circ}$.

8. 設三角形三角之比爲 4:5:6, 問三角各爲幾弧角? 幾度?

答: $\frac{4\pi}{15}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5};$
 $48^{\circ}, 60^{\circ}, 72^{\circ}.$

9. 設一二等邊三角形之底角爲頂角之 12 倍, 問頂角爲幾級?

答: 8° .

計算下列諸題時, 可設 $\pi = \frac{22}{7}$.

10. 一飛輪每秒鐘轉動 35 周, 問轉 5 弧角須時若干?

答: $\frac{1}{44}$ 秒.

11. 一鐘分針長 4.4 寸, 問一小時間針行之弧長若干?

答: 0.27 寸.

12. 繫馬於樹, 馬張緊全繩走 52.36 尺, 樹端之繩張角 75° , 求繩長.

答: 40 尺.

13. 前題, 若繩長 27 尺, 樹端繩之張角爲 70° , 求馬在繩之他端走路若干?

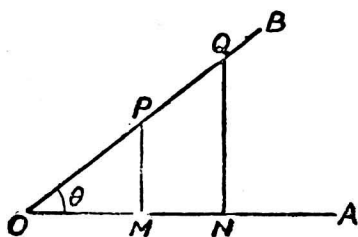
答: 33 尺.

14. 一人跑步於周長 792 公尺之圓形跑道上，平均每分鐘經歷之圓心角爲 $2\frac{6}{7}$ 弧角，問此人若跑路 9 公里，須時若干？
(1公里=1000公尺)

答：25 分

第二章 三角函數

5. 銳角之三角函數 設二直線 OA , OB 交成銳



第三圖

角 θ , 在 OB 上任取二點 P , Q , 作 PM , QN 垂直於 OA . 則所得 $\triangle POM$, $\triangle QON$ 爲二相似三角形, 因二者均有直角及 θ 故也. 相似三角形對應邊之比相等, 故有

$$\frac{MP}{OP} = \frac{NQ}{OQ} = \frac{\theta\text{之對邊}}{\text{斜邊}},$$

$$\frac{OM}{OP} = \frac{ON}{OQ} = \frac{\theta\text{之隣邊}}{\text{斜邊}},$$

$$\frac{MP}{OM} = \frac{NQ}{ON} = \frac{\theta\text{之對邊}}{\theta\text{之隣邊}},$$

$$\frac{OM}{MP} = \frac{ON}{NQ} = \frac{\theta\text{之隣邊}}{\theta\text{之對邊}},$$

$$\frac{OP}{OM} = \frac{OQ}{ON} = \frac{\text{斜邊}}{\theta\text{之隣邊}},$$

$$\frac{OP}{MP} = \frac{OQ}{NQ} = \frac{\text{斜邊}}{\theta\text{之對邊}}.$$

吾人因此得知, 一角之二邊任意延長, 其所成直角三角形之邊之比爲一定. 然若角有變更, 則所成直角三角形之邊之各比均將隨之變值. 因此, 各邊之比爲角之函數. 一角 θ 所在直角三角

形中各邊之比稱 θ 之三角函數，即上述之六種。角之三角函數既有六種，吾人必各冠之以名，以爲區別。

命 $\frac{MP}{OP} = \frac{\theta\text{之對邊}}{\text{斜邊}} = \sin \theta$ ，讀如 θ 之正弦 (Sine)；

$\frac{OM}{OP} = \frac{\theta\text{之隣邊}}{\text{斜邊}} = \cos \theta$ ，讀如 θ 之餘弦 (Cosine)；

$\frac{MP}{OM} = \frac{\theta\text{之對邊}}{\theta\text{之隣邊}} = \tan \theta$ ，讀如 θ 之正切 (Tangent)；

$\frac{OM}{MP} = \frac{\theta\text{之隣邊}}{\theta\text{之對邊}} = \cot \theta$ ，讀如 θ 之餘切 (Cotangent)；

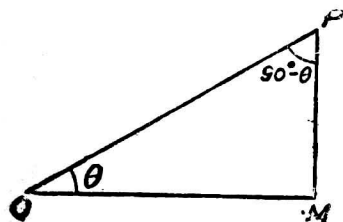
$\frac{OP}{OM} = \frac{\text{斜邊}}{\theta\text{之隣邊}} = \sec \theta$ ，讀如 θ 之正割 (Secant)；

$\frac{OP}{MP} = \frac{\text{斜邊}}{\theta\text{之對邊}} = \csc \theta$ ，讀如 θ 之餘割 (Cosecant)。

$\sin \theta$, $\cos \theta$ 既爲 θ 之函數，則 $1 - \cos \theta$,

$1 - \sin \theta$ 亦爲 θ 之函數；命 $1 - \cos \theta = \text{Vers } \theta$ ，讀如 θ 之正矢 (Versed Sine)；

$1 - \sin \theta = \text{Covers } \theta$ ，讀如 θ 之餘矢 (Covered Sine)。因是，六種三角函數之外，復得二種，惟後二者較爲少用鮮見。



第四圖

6. 餘角函數 在直角三角形 $\triangle MOP$ 內，設 $\angle MOP = \theta$ ，則 $\angle MPO = 90^\circ - \theta$ ，即 $\angle MPO$ 爲 $\angle MOP$ 之餘角。

就 $\angle MPO$ 處觀之，則 MO 爲