杨象富等编著

名师帮你学数学

高中代数（上）

中国青年出版社

名师帮你学

数　学

（高中代数·上）

杨象富　等

中国青年出版社

责任编辑:赵惠宗
封面设计:沈云瑞

图书在版编目(CIP)数据

名师帮你学数学(高中代数·上)/杨象富等编著.—北京:中国青年出版社,1994,8

ISBN7—5006—1610—4

Ⅰ.名… Ⅱ.杨… Ⅲ.代数—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634,614

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 02337 号

名师帮你学数学(高中代数·上)

杨象富　等

*

中国青年出版社出版　发行

社址:北京东四 12 条 21 号　邮政编码:100708

兵器工业出版社印刷厂印刷　新华书店经销

*

787×1092　1/32　12.75 印张　260 千字

1994 年 8 月北京第 1 版　1994 年 8 月北京第 1 次印刷

ISBN 7—5006—1610—4/G·397　定价 7.80 元

主要作者简介

杨象富 浙江宁海县人，宁海中学教科室主任。1981 年评为特级教师，1989 年批准为中国数学奥林匹克高级教练。近年曾受聘参加全国高考和全国高中数学联赛命题工作。

作者已在宁海中学(省重点中学)执教 42 年，坚持联系实际进行数学教育研究，已出版《杨象富数学教学经验》、《中学数学综合题的解法发现》、《高中代数复习与研究》等十种。

马　明　南京师大附中原副校长，特级教师，国家教委中小学教材审定委员会中学数学审查委员，南京师大数学系兼职教授，江苏省中小学数学教学研究会副理事长。

主要作品有《马明数学教育论文集》、《周期函数初论》、《三角浅说》、《圆和二次方程》、《同解方程和同解不等式》、《节约的数学》、《初中数学思维训练与解题方法》、《高中数学解题思路训练》等。

陈振宣　杭州市人。上海老中教一级。退休后被上海师大教科所聘为特邀研究员，1993 年被上海市新学科研究所思维科学室聘为研究员。1994 年被中国管理科学研究院思维科学研究所评为研究教授。

作者长期从事数学思维方法及思维科学研究，主要著作有《中学数学思维方法》、《数学思想方法入门》、《数学题解辞典》、《高考中常用的数学思想方法》等。

赵大悌　1940 年生，山东乐陵人。北京海淀教师进修学校中学教研室副主任、数学组长。北京数学教学研究会常务理事、北京数学会普委会副主任。1991 年被评为北京市特级教师。参加过北京市高师院校高考命题、全国高考“考试说明”的审定、北京市数学竞赛的命题等工作。曾到全国十几个省市讲学，并参加编写书籍数十本，在省市级以上刊物发表文章数十篇。

前　言

数学教育历来存在两种策略思想，一是“以多取胜”，另一是“以少御多”. 上世纪末英国出版了一系列颇有影响的教科书：*Chrystal* 的《*Text Book of Algebra*》，*Hall and Knight* 的高等代数与三角，*Loney* 的三角、坐标几何，都以题型丰富、难题多、解法巧妙见长. 这些书流行几十年. 此风东渐，日本的上野清编写了以《大代数讲义》为代表的一系列讲义，实际上是上述英国教材的编译之作. 此后长泽亀之助又有以题解为中心的《数学辞典》问世，逐渐介绍到我国来，使“以多取胜”的策略在中国数学教育界占统治地位，影响深远，且有愈演愈烈之势. 然而“题海”无边，既苦了教师与学生，又不能真正提高广大学生的数学素质. 于是，“题海”的危害日益成为教育界的共识：一是加重了学生的负担，严重摧残青少年的身心健康；二是把学生的思维禁锢于机械摹仿的定势之中，而难以自拔，造成高分低能. 因此，反对“题海”之声一阵高于一阵. 但在激烈的考试竞争之中，多数教师又不得不搞“题海”. 坊间习题集，*A*、*B* 卷已成泛滥之势，教育行政领导部门屡禁 而不止. 这就是目前亚洲地区数学教育中的“怪圈”.

要跳出“怪圈”，非改弦易辙，走“以少御多”之路不可.

要“以少御多”，既减轻负担，又提高质量，必须探索总结数学教育的内在规律. 按规律办事，才能真正提高数学素质，逐步达到不怕考题千变万化，都能游刃有余，跳出“题海”，走上数学教育的坦途.

数学素质的核心是数学思维的素质. 根据我们的研究，要提高数学思维的水平，必须抓住以下三条：

第一，要熟练掌握数学思维的载体，在数学语言与数学知识的理解与运用方面下功夫．数学语言有三种形态：①自然语言（这是理解数学概念与原理的基础）；②数学符号语言（这是简缩数学思维，提高思维效率的根本）；③数学图象语言（这是形象思维的载体）．注意符号语言与图象语言的互译，是抽象思维与形象思维，左、右脑协同操作的训练，是开发大脑潜能的重要途径之一．

第二，要强化数学思维方法的概括与领会，知识与语言是思维的工具，思维方法则是思维的导航器．“题海”只注意题型归类和解题模式的汇集，形成各式套路，让学生去摹仿，这无助于思维水平的提高．数学思维方法是从思维的高度引导学生作概括，一旦真正领会，应用之广与灵活变化，是初料所难以估计的．有的学生对思维方法有所理解之后说：“似乎忽然自觉聪明起来了”．反映了他们的真实感受．

第三，要注意情感因素与心理素质的培养．人是有情感的，人的思维总是伴随情感而进行，情感可能激励思维，也可能成为思维的障碍．数学思维要正常发挥，不能不注意心理素质的培养．通过数学教育逐步转变学生的学习态度，培养兴趣、意志、毅力，顽强的探究意识，善于排除情绪波动，保持思维的积极态势．情感与心理素质是思维能力的另一侧面，千万忽视不得．

以上是我们编写这套书的动机与指导思想，我们的具体做法是：

1．与教材同步配套，以教材的大节或大体上相当于一周的学习内容，将每一章分为若干讲，便于与教材配合学习．

2．每讲有一段无标题的引言，对所学内容提出简明的要求及学习方法指导，引导入门，利于复习和深入．

3. 每讲的范例是本书的主体，开头是对概念性强、思维灵活的基础题(不少是自编的)的分析，用以加深理解、发展运用知识与语言的能力，进而通过剖析典型综合题，引导从思维的高度作概括，逐步领会常用的数学思维方法，提高捕捉正确合理的解题思路的能力.

4. 每章之末的小结，旨在教会“从厚到薄”与“从薄到厚”的治学方法，使一门学科的内容“收之可藏于密，放之则弥六合”，形成知识网络，明白内容经纬，便于检索和应用. 同时把握住这一知能发展的最佳时期，通过综合性较强的范例，以扩大全章学习的收获，加强对数学思维方法的理解. 运用妙题巧解，实际应用，激发兴趣，转变数学态度，形成智力因素与情感因素的良性循环.

5. 最后一册《中学数学思想方法选讲》，将前五册涉及的数学思维方法，进行系统提高，使认识与情感获得升华，脑潜能得到充分开发.

阅读引言和范例的分析与说明，犹如聆听名师指导点拨，每周一练既精选又精编，竭力为师生免于题海之苦着想.

丛书主编组由马明、陈振宣、杨象富、赵大悌、赵惠宗同志组成. 本册由杨象富等同志编写.

编写这样的课外读物，还是初次尝试，敬请读者指正. 让我们共同努力，逐步形成一套摆脱题海，跳出怪圈，提高素质，利于实用，具有特色的学生课外读物.

目　录

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

第一讲　集　合

由康托尔(Cantor，1845－1918，德国)创立的集合论，是整个现代数学的基础之一.

在高中代数第一章第一大节学习集合的初步知识，主要为了掌握集合的语言.这种语言较之普通语言能更准确、简练、清晰地表达数学知识和逻辑联系，有利于加深对知识的理解和数学思维能力的提高.

本节内容有三段：集合及其表示方法，元素与集合的关系(属于、不属于)；集合与集合的关系(包含、相等)，子集、空集概念；集合的运算(交、并、补)，交集、并集、补集概念.

本节概念多，符号多，要注重辨析概念之间的差异和联系。为了更好地掌握集合语言；应注意集合语言三种不同表达方式(普通语言、符号语言、图象语言即韦恩图)的互译训练.

【范例】

例1　(1)0与$\{0\}$，(2)0与$\varnothing$，(3)$\varnothing$与$\{0\}$，(4)$\{0,1\}$与$\{(0,1)\}$；(5)$\{(a,b)\}$与$\{(b,a)\}$各是什么关系？用适当的符号表示出来.

分析　首先要分清是“元素与集合”的关系，还是“集合与集合”的关系；是后者又要辨别两集合的元素是否相同.

解　(1)$\{0\}$是含单元素0的集合，0与$\{0\}$的关系是“属

于与否”的关系，所以 $0\in\{0\}$.

(2)空集$\varnothing$不含任何元素，所以 $0\notin\varnothing$.

(3)$\varnothing$与$\{0\}$都是集合，两者的关系是“包含与否”的关系. 空集是任何非空集合的真子集，所以$\varnothing\subset\{0\}$.

(4)$\{0,1\}$是含两个元素 0 与 1 的集合，而$\{(0,1)\}$是以“有序数组”为元素的单元素$(0,1)$的集合，所以$\{0,1\}$与$\{(0,1)\}$不相等，即$\{0,1\}\neq\{(0,1)\}$.

(5)当 $a=b$ 时，$\{(a,b)\}=\{(b,a)\}$；当 $a\neq b$ 时，$\{(a,b)\}\neq\{(b,a)\}$.

说明 空集$\varnothing$是有许多特殊性质的重要集合，值得重视. (5)中的 $a=b$ 是可能的特殊关系，不可不考虑到.

(下面的例 2、例 3 以及本书的其它选择题，都给出代号为 A、B、C、D 的四个结论，其中只有一个是正确的，要求把正确结论的代号填写在括号内.)

例 2 (选择题)若全集 $I=\{X\mid X\leqslant 9, X\in N\}$，$M=\{1,7,8\}$，$P=\{2,3,5,7\}$，$S=\{1,4,7\}$，则$(M\cup P)\cap\overline{S}=($ $)$.

(A)$\{2,3,6,8\}$　　(B)$\{1,3,5,7\}$

(C)$\{2,3,5,8\}$　　(D)$\{2,3,5,7\}$

解 $\because$ $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,

$M\cup P=\{1,2,3,5,7,8\}$,

而 $\overline{S}=\{2,3,5,6,8,9\}$.

$\therefore$ $(M\cup P)\cap\overline{S}=\{2,3,5,8\}$，应选(C).

说明 这里用了“求解对号法”. 从题设的信息入手，对准问题的目标，逐步运算求解，把所得结果与诸选择支对照，选定正确的一个. 这是解选择题常用的基本方法.

例 3 (选择题)已知集合 $M=\{x\mid y^2=x+1\}$，$P=\{x\mid y^2=-2(x-3)\}$，那么 $M\cap P=($ $)$.

(A) $\left\{(x,y)\,|\,x=\frac{5}{3},y=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}\right\}$

(B) $\{x\,|\,-1<x<3\}$

(C) $\{x\,|\,-1\leqslant x\leqslant 3\}$　　(D) $\{x\,|\,x\leqslant 3\}$

解一　由 M：$x=y^2-1\geqslant -1$，即 $M=\{x\,|\,x\geqslant -1\}$.

P：$x=-\frac{1}{2}y^2+3\leqslant 3$，即 $P=\{x\,|\,x\leqslant 3\}$.

$\therefore$　$M\cap P=\{x\,|\,-1\leqslant x\leqslant 3\}$，应选(C).

解二　用逐步淘汰错误结论的办法.

注意到 $M\cap P$ 的元素是 x，而不是 (x,y)，可否定(A). 比较(B)与(C)的差异，取 $x=-1$：

$\because$　$-1\in M$，$-1\in P$，　$\therefore$　$-1\in(M\cap P)$，

于是又可否定(B). 再由比较(C)与(D)的差别而取 $x=-2$，因为 $-2\notin M$，淘汰(D)，故选(C).

说明　解二是"淘汰法"，即抓住选择支之间的差异，取特殊值或通过举反例而排除假支，去伪存真. 这对解选择题也很有效.

关键　在解有关集合的问题时，对元素的识别是个关键. 对例 3，如果审题漫不经心，一看到求两个集合交集，就不假思索地解方程组，于是掉进陷阱(A)内. 其实集合 $M\cap P$ 的元素根本不是 (x,y)，而是 x. 再如集合

$\{a\,|$二次方程 $x^2-ax+1=0$ 有实根$\}$，

$\{x\,|$二次方程 $x^2-ax+1=0$，且 $|a|\geqslant 2\}$，

$\{$二次方程 $x^2-ax+1=0\}$

就是三个不同的集合. 又如集合

$\{x\,|\,y=-x^2+4x\}$，$\{y\,|\,y=-x^2+4x\}$ 与 $\{(x,y)\,|\,y=-x^2+4x\}$ 也是互不相同的.

例 4　设集合 $A=\{1,a,b\}$，$B=\{a,a^2,ab\}$，且 $A=B$，求实

数 a,b.

分析 根据集合中元素的“三性”(确定性,互异性,无序性),为求出 a、b,只需列出关于 a、b 的两个方程.

解 由 $A=B$,可得

$$\begin{cases}1\cdot a\cdot b=a\cdot a^2\cdot ab,\\1+a+b=a+a^2+ab\end{cases}$$

即 $\begin{cases}ab(a^3-1)=0, & ①\\(a-1)(a+b+1)=0. & ②\end{cases}$

因为集合中的元素互异,所以 $a\neq0,a\neq1$. 于是由①得 $b=0$,再从②得 $a=-1$.

$\therefore\quad a=-1,\quad b=0.$

说明 如果解 $\begin{cases}1=a^2,\\b=ab,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1=ab,\\b=a^2\end{cases}$

并舍去增解,仍得 $a=-1,b=0$.

关键 解例 4 的关键是要有方程(组)的思想. 在刘徽注释我国的数学经典《九章算术》(成书在一世纪)的“方程”章时写明:“二物者再程,三物者三程,皆如物数程之”,意思是要求出几个未知数就须列出几个等式. 这种方程组的概念,在全世界是最早的.

例 5 向 50 名学生调查对 A、B 两事件的态度,赞成 A 的人数是全体的五分之三,其余的不赞成;赞成 B 的比赞成 A 的多 3 人,其余的不赞成. 另外,对 A、B 都不赞成的学生数比对 A、B 都赞成的学生数的三分之一多 1 人. 问对 A、B 都赞成的学生和都不赞成的学生,各有多少人?

分析 这里的数量关系比较错综复杂,采用韦恩图可加强直观性.

解 赞成 A 的人数为 $50\times\dfrac{3}{5}=30$,赞成 B 的人数为 30

$+3=33.$

如图 1—1，记 50 名学生组成的集合为 I，赞成事件 A 的学生全体为集合 A，赞成事件 B 的学生全体为集合 B. 设对 A、B 都赞成的学生人数为 x，则由题意知对 A、B 都不赞成的学生人数为 $\frac{x}{3}+1$，赞成 A 而不赞成 B 的人数为 $30-x$，赞成 B 而不赞成 A 的人数为 $33-x$，于是可得方程：$(30-x)+(33-x)+x+(\frac{x}{3}+1)=50$

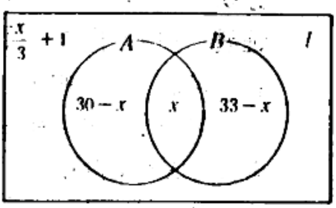

图 1—1

解得　$x=21, \frac{x}{3}+1=8.$

所以，对 A、B 都赞成的学生有 21 人，对 A、B 都不赞成的学生有 8 人.

关键　"画出韦恩图！"这是解本题的关键. 韦恩图可以帮助我们直观地理解某些概念和关系，也有利于记忆和思考问题. 培养自己使用韦恩图的能力和习惯，对当前和今后的学习，都会有所裨益.

例 6　用图表示下列各集合之间的关系：

(1)R，Q^+(正有理数集)，Z，N，$\{0\}$；

(2)$A=\{$四边形$\}$，$B=\{$平行四边形$\}$，$C=\{$菱形$\}$，$D=\{$矩形$\}$，$E=\{$正方形$\}$，$F=\{$梯形$\}$.

解

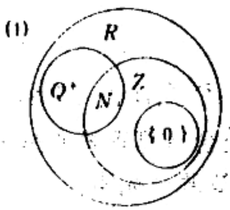

图 1—2(1)

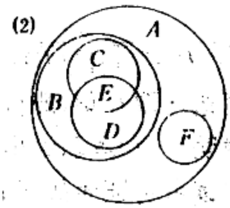

图 1—2(2)

说明 韦恩图非常清晰地表示出有关概念的相互关系. 这里特别要注意:

{平行四边形}$\cap${梯形}$=\varnothing$.

例 7 设 A、B 为任意两集合,证明如下的德·摩根(De morgan)定律:

(1)$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$; (2)$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

分析 为证集合 $M=N$,需证 $M\subseteq N$ 且 $N\subseteq M$.

证明 (1)先证 $X\in\overline{A\cup B} \Rightarrow X\in\overline{A}\cap\overline{B}$

若 $X\in\overline{A\cup B}$,则 $X\notin A\cup B$,即 $X\notin A$ 且 $X\notin B$.

$\therefore$ $X\in\overline{A}$且 $X\in\overline{B}$,即 $X\in\overline{A}\cap\overline{B}$;

再证 $X\in\overline{A}\cap\overline{B} \Rightarrow X\in\overline{A\cup B}$;

若 $X\in\overline{A}\cap\overline{B}$,则 $X\in\overline{A}$且 $X\in\overline{B}$,

即 $X\notin A$ 且 $X\notin B$, $\therefore$ $X\notin A\cup B$,

$\therefore$ $X\in\overline{A\cup B}$.

综合以上两方面,可知$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

以上证明可以简捷地表述如下:

$$\begin{aligned}\overline{A\cup B}&=\{X\mid X\in I,X\notin A\cup B\}\\&=\{X\mid X\in I,X\notin A \text{ 且 } X\notin B\}\\&=\{X\mid X\in\overline{A},\text{且 } X\in\overline{B}\}\\&=\overline{A}\cap\overline{B}.\end{aligned}$$

(2)以$\overline{A}$、$\overline{B}$分别代替(1)中的 A、B,并注意到$\overline{(\overline{A})}=A$,可得

$$\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}=\overline{(\overline{A})}\cap\overline{(\overline{B})}=A\cap B.$$

两边同取补集,即得$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$,所以$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

说明 (1)本题给出了证明集合运算等式的基本方法. 有兴趣的读者可证明如下的集合运算的分配律:

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

(2)德·摩根定律中的 A、B 具有任意性，因此若用图形验证定律，要考察以下的五种情况（如图 1－3）：

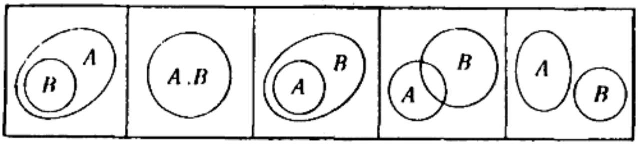

图 1－3

例 8 已知全集 I，集合 A 和 B，求 $\overline{A}\cap B$：

(1) $I=\{$实数对$(x,y)\}$，$A=\{(x,y)\mid\frac{y-4}{x-2}=3\}$，$B=\{(x,y)\mid y=3x-2\}$；

(2) $I=R$，$A=\{a\mid$二次方程 $ax^2-x+1=0$ 有实根$\}$，

$B=\{a\mid$二次方程 $x^2-ax+1=0$ 有实根$\}$

分析 首先要准确地理解集合 A，$\overline{A}$ 及 B，然后把求 $\overline{A}\cap B$ 转化为其它数学问题.

解 (1) $A=\{(x,y)\mid\frac{y-4}{x-2}=3\}$

$=\{(x,y)\mid y=3x-2$，但 $x\neq2\}$

$\therefore\ \overline{A}\cap B=\{(x,y)\mid x=2,y=4\}=\{(2,4)\}$

(2) $A=\{a\mid1-4a\geqslant0\}=\{a\mid a\leqslant\frac{1}{4}\}$，

$\therefore\ \overline{A}=\{a\mid a>\frac{1}{4}\}$.

而 $B=\{a\mid a^2-4\geqslant0\}=\{a\mid a\leqslant-2$ 或 $a\geqslant2\}$

$\therefore\ \overline{A}\cap B=\{a\mid a\geqslant2\}$.

说明 集合是一种语言，是其它数学问题的载体，解这类题首先要准确理解每一集合，然后把它转化为其它数学问题.

例 9 设集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-ax+2$