名师帮你学数学

马明、马复等编著

中学数学思想方法选讲

中国青年出版社

重质量　重提高素质

名师精心点拨

同步配套　每周一讲

家长的好帮手

《名师帮你学数学》丛书

高中代数（上）	杨象富等
高中代数（下）	陈振宣等
立体几何	杨象富等
解析几何	陈振宣等
高三总复习	赵大悌等
中学数学思想方法选讲	马　明等

ISBN 7-5006-1622-8

9 787500 616221 >

ISBN 7-5006-1622-8

G·342　定价：5.60元

名师帮你学数学

中学数学思想方法选讲

马明　马复　等

中国青年出版社

（京）新登字 083 号

责任编辑：赵惠宗
封面设计：沈云瑞

图书在版编目（CIP）数据

名师帮你学数学：中学数学思想方法选讲．—北京：中国青年出版社，1994，9

ISBN7－5006－1622－8

Ⅰ．名… Ⅱ．马… Ⅲ．数学－思想方法－中学生－教学参考资料Ⅳ．G634，604

中国版本图书馆 CIP 数据核字（94）第 02342 号

名师帮你学数学
（中学数学思想方法选讲）
马明　马复　等

*

中国青年出版社出版　发行
社址：北京东四 12 条 21 号　邮政编码：100708
空军指挥学院印刷厂印刷　新华书店经销

*

787×1092　1/32　8.75 印张　180 千字
1994 年 9 月北京第 1 版　1994 年 9 月北京第 1 次印刷
定价 5.60 元

主要作者简介

马　明　南京师大附中原副校长，特级教师，现任国家教委中小学教材审定委员会中学数学审查委员，南京师大数学系兼职教授，江苏省中小学数学教学研究会副理事长。

作者从事中等数学教学40多年，坚持联系实际进行数学教育研究，讲课严谨，风趣横生，使数学教学不断科学化、艺术化。

主要作品有《马明数学教育论文集》、《周期函数初论》、《三角浅说》、《圆和二次方程》、《同解方程和同解不等式》、《节约的数学》、《初中数学思维训练与解题方法》、《高中数学解题思路训练》等。

陈振宣 杭州市人。上海老中教一级。退休后被上海师大教科所聘为特邀研究员，1993年被上海市新学科研究所思维科学室聘为研究员。1994年被中国管理科学研究院思维科学研究所评为研究教授。

作者长期从事数学思维方法及思维科学研究，主要著作有《中学数学思维方法》、《数学思想方法入门》、《数学题解辞典》、《高考中常用的数学思想方法》等。

杨象富 浙江宁海县人，宁海中学教科室主任。1981年评为特级教师，1989年批准为中国数学奥林匹克高级教练。近年曾受聘参加全国高考和全国高中数学联赛命题工作。

作者已在宁海中学(省重点中学)执教42年，坚持联系实际进行数学教育研究，已出版《杨象富数学教学经验》、《中学数学综合题的解法发现》、《高中代数复习与研究》等十种。

赵大悌 1940年生，山东乐陵人。北京海淀教师进修学校中学教研室副主任、数学组长。北京数学教学研究会常务理事、北京数学会普委会副主任。1991年被评为北京市特级教师。参加过北京市高师院校高考命题、全国高考“考试说明”的审定、北京市数学竞赛的命题等工作。曾到全国十几个省市讲学，并参加编写书籍数十本，在省市级以上刊物发表文章数十篇。

序　言

解决问题，无疑是数学教学过程中的一个重要环节. 教师怎样教授解题，学生怎样学习解题，则是数学教学活动中的热点. 与通常习题集不同的是，本书抓住数学思想方法，从剖析数学思想方法与多种题型，解题术之间“源与流”的关系入手，力图使读者在提高自身解题能力方面有较大的收益. 事实上，就整个数学教育目标而言，数学思想方法的传授亦是其根本之所在. 因为，无论对于科技工作者，教育工作者，或是其它社会人才，最重要的是数学的精神、思想和方法，数学知识则是第二位的.

本书原稿曾作为两届高中学生的选修教材，实践证明：它使学生的认识水平得以明显提高，更重要的是，学生的学习效率得到很大的提高. 这一点的意义极为重大.

书中内容曾在中学数学杂志上连载三年多，收到较强烈的反响，已有若干所学校将它定为选修课教材. 其实，对于必修课来说，它也不失为一个好的参考资料、对高三第二轮复习更具现实意义.

书名定为“选讲”，是因为中学数学内容里所包含的数学思想方法不只限于书中所列，这里只列举了其中重要的部分. 尤其值得一提的是，许多数学问题的解决，往往是几种不同的数学思想方

法协同作用的结果，至多是在不同的阶段，由不同的数学思想方法起重要作用而已，本书的最后三讲正体现了这个意思.

出于教学的考虑，建议在高一(下)开始使用本书，事实上，本书的写作也考虑到了这一点：讲述数学思想方法时选用的例题尽量保证使用者已具备相应的知识量，为此也舍弃了若干好的例题.不过，对学习者而言，最好的例题或许是自己实践的结果.

蔡淑琴老师参与了本书部分章节的素材收集与整理工作.写作过程中曾引用一些文献上的资料，在此谨表谢意.

作者水平有限，不妥之处尚希不吝赐教.

作者

1994.6.

本书为《名师帮你学数学》丛书中的一种，丛书主编组由马明、陈振宣、杨象富、赵大悌、赵惠宗同志组成.本册由马明、马复、蔡淑琴等同志编写.

编写这样的课外读物，还是初次尝试，敬请读者指正.让我们共同努力，逐步形成一套摆脱题海，跳出怪圈，提高素质，利于实用，具有特色的学生课外读物.

编者

目　　录

第1讲　化归思想

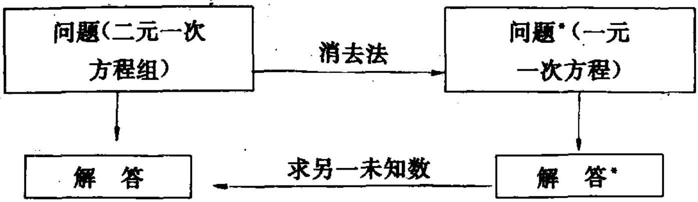
在解决问题的过程中，数学家往往不是对问题进行直接攻击，而是对问题进行变形、转化，直至把它化归为某个(些)已经解决的问题，或容易解决的问题. 匈牙利著名数学家P. 罗莎曾用以下比喻十分生动地说明了化归法的实质. 她写道："假设在你面前有煤气灶、水龙头、水壶和火柴，现在的任务是要烧水，你应当怎样去做?"正确的回答是："在水壶中放上水，点燃煤气，再把水壶放到煤气灶上". 接着，罗莎又提出第二个问题："假设所有的条件都不变，只是水壶中已有了足够的水，这时你应该怎样去做?"对此，人们往往回答说："点燃煤气，再把壶放到煤气灶上. "但罗莎认为这并不是最好的回答，因为，"只有物理学家才这样做，而数学家则会倒去壶中的水，并且声称我已经把后一问题化归成先前的问题了. "

"把水倒掉"！——这是多么简洁的回答. 比喻有点夸张，但它的确表明了数学家思考与解决问题的一个特点——与其它应用科学家相比数学家特别善于使用化归思想.

一、化归思想的分析

例1　在一元一次方程解法的基础上，学习二元一次方程组的解法，用的就是化归思想. 在这里，化归思想是通过消去法实现的——用消去法减少一元，至于是用"加减消去法"，或是"代入消去法"，这里是不管的.

整个化归过程可归结为：



例 2 在掌握了扇形或三角形这些基本图形的面积计算以后，可以用分割法求出比较复杂的图形的面积. 如求弓形的面积.

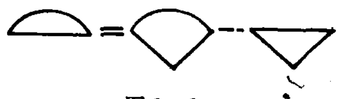
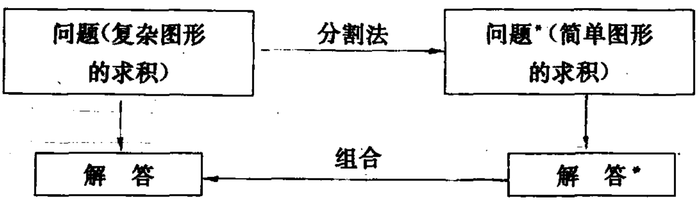


图 1—1



例 3 解析几何的建立.

这是用化归法解决问题的典型例子.

笛卡儿在研究思维原则时有一个期望：

将一切问题化归为数学问题；

将一切数学问题化归为代数问题；

将一切代数问题化归为单个方程的求解.

这个“期望”虽无法实现，但是笛卡儿在这个无法实现的期望面前前进了一步——只是前进一步，终于创设了解析几何. 这是笛卡儿于 1619 年 11 月，在多瑙河畔的诺伊堡军营的夜晚的一次“冲动”. 这次“冲动”使算术、代数和几何统一起来. 他从自古已知的天文和地理的经制出发，指出平面上的点和实数对(x,y)的对应关系，终于将几何图形(点的集合)与

代数方程 $f(x,y)=0$（实数对 (x,y) 的集合）统一起来.

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{几何问题}} \arrow[r, "\text{建立坐标系}"] \arrow[d] & \boxed{\text{代数问题}} \arrow[d] \\
\boxed{\text{几何结论}} & \boxed{\text{代数结论}} \arrow[l, "\text{还原}"']
\end{tikzcd}
$$

上述各例说明，用化归思想解决问题的过程可归结为：

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{问　题}} \arrow[r, "\text{化　归}"] \arrow[d] & \boxed{\text{问　题}^*} \arrow[d] \\
\boxed{\text{解　答}} & \boxed{\text{解　答}^*} \arrow[l, "\text{还　原}"']
\end{tikzcd}
$$

二、实现化归的方法

P·罗莎所提的第二个问题中，“把水倒掉”是实现化归的关键. 笛卡儿把几何问题化归为代数问题，“建立坐标系”是实现化归的关键. 抓住关键，才能实现化归. 这可以从两个方面去考虑.

化归的实质是不断变更问题（将问题变形），因此可以从变形的成分这方面去考虑；也可以从实现化归的常用方法直接去考虑. 在实际运用中，这两个方面又是互相渗透、互相补充的. 为了说明问题的方便，下面分别进行阐述.

就变形的成分来说，

(*i*) 可以对整个问题进行变形（如前面例 3）；

(*ii*) 可以对问题中的未知成分进行变形（如前面例 2）；

(*iii*) 可以对问题中的已知成分进行变形（如前面例 1）.

为了熟悉并掌握这种变形方式，再举一些例题.

例 1　试证下述命题：凸多边形的锐角不能多于三个.

分析　也许你不相信这种数学现象是存在的. 于是便着手去画一个多于 3 个锐角的凸多边形. 不难发现，如果硬要安排四个为角为锐角，这个多边形便不会是凸多边形.

这时自然要去证明另一命题：如果多边形的锐角多于 3 个，那么这个多边形不是凸多边形.

这恰是原命题的逆否命题. 这是两个等价的命题.

这种证法就是反证法. 因此，反证法就是对整个问题进行变形的实例.

证明　（反证法）设 n 边形（$n \geqslant 4$）的锐角多于 3 个，那么这个 n 边形 n 个内角中至少有 4 个角都是锐角（不妨设为 A_1、A_2、A_3、A_4），即有

$$A_1+A_2+A_3+A_4<360^\circ \quad ①$$

设其余（$n-4$）个内角和为 S，由 n 边形内角和定理，有

$$A_1+A_2+A_3+A_4+S=(n-2)180^\circ \quad ②$$

由①、②得

$$S>(n-4)180^\circ \quad ③$$

S 是（$n-4$）个内角和，③式说明其中必有大于 180° 的内角，因此原 n 边形不是凸 n 边形.

例 2　18 瓶牛奶分放在 $4\times6=24$ 个方格内（如图 1－2，每格只能放一瓶），在数牛奶瓶时要求横数的瓶数为偶数，竖数的瓶数也为偶数，这件事能办到吗？

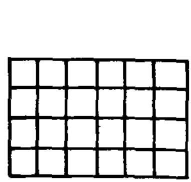


图 1－2

分析　不妨试放一下（请用铅笔在小方格内打上试放记号）.

可能屡试不成——瓶太多了，很难照

顾全面.

因此,能否“倒过来”想?——在 $4\times6=24$ 个方格内打上 $24-18=6$ 个不放瓶的记号,要求横数为偶数,竖数也为偶数,那么,没有记号的位置便是应该放置奶瓶的位置了.

只考虑 6 个记号,这要容易多了.最后将发现,这件事不仅能办到,而且有多种放置方法.

说明 问题中的未知成分是寻找符合题目要求的奶瓶位置,现在把这个未知成分变形为寻找不放奶瓶的位置.这就是“对问题中的未知成分进行变形”的实例.

有时还可以对问题中的已知成分进行变形.

例 3 鸡兔同笼.笼中有头 50,有足 140,问鸡、兔各有几只?

分析 每只鸡有两只脚,每只兔有 4 只脚,这是问题中不言而喻的已知成分.

对问题中的已知成分进行变形:“一声令下”,要求每只鸡悬起一只脚(呈金鸡独立状),又要求每只兔悬起两只脚(呈玉兔拜月状).那么,笼中仍有头 50,而脚中剩 70 只了.并且,这时鸡的头数与足数相等,而兔的足数与兔的头数不等——有一头兔,就多出一只脚,现在有头 50,有足 70,这说明有兔 20 头,有鸡 30 头.

以上是从变形成分来寻找化归方法的.

我们也可以从实现化归的常用方法直接去考虑.化归方法多种多样,常见的有:1.分割法;2.对应法;3.参数变异法等.

1. 分割法

可以对问题中的已知成分进行分割.

例 4 解方程:$|x-1|+|x-3|=2$.

分析 困难在于绝对值符号的出现，如果将已知成分（已知方程）进行分割，则原方程可化归为下列三个方程：

(1) $(x-1)+(x-3)=2\ (x>3)$；

(2) $(x-1)-(x-3)=2\ (1\leqslant x\leqslant 3)$；

(3) $-(x-1)-(x-3)=2\ (x<1)$.

方程(1)无解（因为 $x=2$ 不满足 $x>3$）；

方程(2)的解为 $1\leqslant x\leqslant 3$；

方程(3)无解（因为 $x=1$ 不满足 $x<1$）.

故原方程的解为 $1\leqslant x\leqslant 3$.

也可以对问题中的未知成分进行分割. 求弓形面积时就是将弓形这个未知成分分割为扇形和三角形.（见前面例 2）.

常用的"交集法"也是按照这个思想去设计的. 所谓交集解题法是指：有些数学问题的解是由几个条件决定的，每一个条件都可以定出某种元素的一个集合，它们的交集元素就是问题的解. 几何作图法中的"交轨法"就是交集法的典型例题.

2. 对应法

解析几何法就是通过在数集与点集之间建立对应而达到化归目的的典型事例.

所谓对应法，就是在两类数学对象或两个数学元素的集合之间建立"一一对应关系".

例 5 在果园里种树，常用菱形种植法，即相邻两株的距离相等. 试证：在菱形种植法中，如果株距为 d，果园的面积为 A，则果树的株数 N 可以用下面的近似公式表达：

$$N\approx\frac{2A}{\sqrt{3}\,d^2}.$$

（这是林学上常用的公式）

分析 果园形状是任意的. 图 1－3 中黑点代表树的位

置，相邻两种的距离为 d，那么，对应于每株树，便有一个菱形，这个菱形每边长为 d，内锐角等于 60°，该菱形的右角顶点恰好是树的位置. 取这些菱形面积的和做为果园的面积的近似值，由于每个菱形面积等于 $\frac{1}{2}\sqrt{3}d^2$，就得到所需要的近似公式

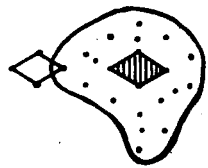


图 1—3

$$N\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}d^2\approx A.$$

说明 树的集合与菱形的集合之间建立了一一对应关系，计算树的株数化归为计算菱形的个数，便达到化难为易的化归目的了，这也属于前面讲的"对整个问题进行变形"的方法.

3. 参数变异法

对于一般一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，通常是用配方法，化归为开平方运算去解决的. 也可以采用引入参数，对问题进行变形达到化归目的：

令 $x=y+k$，则有

$a(y+k)^2+b(y+k)+c=0$

或 $ay^2+(2ak+b)y+(ak^2+bk+c)=0$ ①

这是 y 的二次方程，如果令 $2ak+b=0$，

即令 $k=-\frac{b}{2a}$，则①就是缺一次项的二次方程.

得 $ay^2+a\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right)^2+b\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right)+c=0$，

或 $y^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$，

即 $(x-k)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$，

即 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$,

所以当 $b^2-4ac\geqslant 0$ 时,得解

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

引入参数 k,并按预定思路定出 k 的值,这是解题的关键. 虽然,此法比配方法繁,但是 16 世纪意大利数学家塔塔里亚正是采用此法求得一般三次方程的解的:

对于一般三次方程

$$ay^3+by^2+cy+d=0 \qquad ①$$

引进参数 k,使得 $y=x+k$,则有

$$a(x+y)^3+b(x+k)^2+C(x+y)+d=0$$

或 $ax^3+(3ak+b)x^2+(3ak^2+2bk+c)x+(ak^3+bk^2+ck+d)=0$,

令 $3ak+b=0$,

即 $k=-\frac{b}{3a}$, 方程①化归为特殊形式

$$x^3+px+q=0 \qquad ②$$

再引进参数 h,使得 $x=z+h$,②式就可以变形为

$$(z+h)^3+p(z+h)+q=0$$

或 $z^3+3hz^2+3h^2z+h^3+pz+ph+q=0$

即 $z^3+(3hz+p)(z+h)+(q+h^3)=0$

令 $3hz+p=0$(即令 $h=-\frac{p}{3z}$),

上方程化归为

$$z^3+q-\left(\frac{p}{3}\right)^3\left(\frac{1}{z}\right)^3=0,$$

再令 $w=z^3$,并用 w 乘方程两端,原题就化归为大家熟知的二次方程