高級幾何學

算學叢書

高級幾何學

N. Altshiller-Court 著
陸欽軾 譯

商務印書館發行

中華民國二十三年三月初版

算學叢書 高級幾何學一册
College Geometry
（一〇三〇一）

每册定價大洋貳元肆角
外埠酌加運費匯費

原著者 N. Altshiller-Court
譯述者 陸欽軾
發行人 王雲五 上海河南路
印刷所 商務印書館 上海河南路
發行所 商務印書館 上海及各埠

B五六三

原著者爲中文譯本序

Time has not impaired the vigor of the ancient science of geometry. The last one hundred years have witnessed the birth of several new branches of geometry and many new conceptions in this domain of scientific pursuit. Even the very geometry of old has during this time been extended far beyond its original boundaries. The present book is an attempt to put within the reach of the learner some of these additions to the geometry of the triangle and of the circle. May this book be of as much service to the students of china as it proved to be to the students of the United States.

The Author

何 序

吾國中學畢業生算學知識，以幾何爲最缺乏.故當其入大學也，每視理科之算學課程爲畏途，因而規避敷衍之敝，半及青年，此至可痛惜者也.余在大學授課時，於一年級學生恆先略解析幾何及微積分，而特爲補習中等算學，於幾何尤三致意焉.良以幾何方法謹嚴，可訓練其科學思想，一也；幾何問題，變化甚多，可引起學生之興趣，而發展其天才，二也；幾何爲空間最優美之科學，與其他高等算學關係甚衆，三也；最大之原因，厥爲學生之了解幾何不甚澈底，於定理固未諳熟，於方法更覺茫然，以致演題之時，苦不能下手，及爲他人所解出，則又覺平常無奇，終於見題生畏，雖有研究科學之雄心，不得不放棄而改覓他途，此爲余補習之第四原因也.余所注重者，爲幾何原理及證題方法.如軌跡之於作圖題，反演之於切圓問題，皆不憚詳言.此外如位似圖，如圓冪之研究，如平面上之移動及際樞之應用，如錐線之重要性質，其他凡中學之所忽

略與近世幾何初步之所需要者,皆一一補習之以余所得經驗,凡學生對於所補習功課能了解者,以後對於其他任何算學課程,皆能循序而進,毫無困難.惟以所任功課繁多,隨講隨爲門人筆錄,未能自著成書,以公之世,至今猶以爲憾也.今年夏以楊永清及孫署冰兩先生之介,獲讀陸君欽軾所譯美國高爾式之幾何,與余平時所注重者,雖互有詳略,要爲高中大學中間階段所必需,則無疑問矣.余既佩其勤,又知此書之能嘉惠學子,故樂爲之序云.

何魯

例　言

1. 本書爲美國科學博士高爾式 Nathan Altshiller-Court)所著,專論初等幾何學中之高深學識.譯者以其取材豐富,論理新穎,故譯之以爲高級中學校師範學校或大學校之課本,且供校外師生之參考.

1. 凡近代闡發之定理,以及新增之名辭,本書莫不搜羅淨盡.例如極點,極線,根軸,根圓,九點圓,同軸圓,反形法,逆平行線,類似中線,來莫恩軸,及布洛喀圓等等,均儘量採納,以備學者將來之應用

1. 本書教材貫串,由淺入深,定理習題,亦皆佈置得宜.讀者循序漸進,卽能瞭解其理論之要旨,以及演題之方法.

1. 本書字句雋潔,意義暢達,故內容雖廣,而篇幅不多,適供一學期之用.

1. 本書之高氏原本,現尙初期出版,魚魯之誤,容

所不免.譯者已逐一校勘,並經原著者覆閱,庶免毫釐千里之差.

1. 譯者除將原文逐句譯述外,又詮註以啓蘊奧,極蒙原著者贊許,不敢妄參私意.

1. 本書所討論之圖形,或因太簡而從略,或因過繁而遺闕.今擇其重要者補諸篇末,讀者按圖索驥,自易一目了然.

1. 譯者學問譾陋,未窺高深,尙希博雅君子匡其不逮.

譯者謹識

目　錄

高級幾何學

第一章

幾何作法

1. 作圖題之普通解法

1. 記法(Notation). $A, B, C, \cdots\cdots$ 表示三角形 (triangle) 或多角形 (polygon) 之頂點 (vertices) 及角 (angles).

$a, b, c, \cdots\cdots$ 表示三角形或多角形之邊 (sides) 三角形中,小楷字母所表示之邊,與大楷字母所表示之角,彼此相對.

h_a 爲 a 邊上之垂高 (altitude).

m_a 爲 a 邊上之中線 (median).

t_a 爲 A 角之平分線 (bisector).

$2p$ 表示三角形之周線 (perimeter).

S, 三角形之面積 (area).

R, 外半徑* (circumradius)

r, 內半徑** (inradius)

---

* 譯者附註——卽外接圓之半徑

** 譯者附註——卽內切圓之半徑.

習　題

1. 自直線 (straight line) 上之一點 (point) 豎立此線之垂線 (perpendicular).

2. 自直線外之一點,放落此線之垂線.

3. 自一線上之一點作一角等於一已知角 (given angle).

4. 平分 (bisect) 一已知線段 (segment).

5. 平分一已知角

6. 經過一已知點,畫一線,使平行一已知線。

7. 畫一線,使與一已知線有一已知距離。

8. 以一已知線段,等分而成 n 段。

9. 內分 (divide internally) 及外分 (divide externally) 一已知線段,使分成一已知比。

10. 三等分 (trisect) 90° 角, 45° 角, 135° 角。

作一三角形,已知:

11. a, b, c.　12. a, b, C.　13. a, B, C.　14. a, h_a, B.

15. a, b, m_a.　16. a, B, t_b.　17. A, h_a, t_a.

作一直三角形* (right triangle), 已知其直角 (right angle) A, 及

* 譯者附註——直三角形 (right triangle) 即直角三角形 (right-angled triangle).

18. a, B.　19. b, C.　20. a, b.　21. b, c.

作一四邊形 (quadrilateral) $ABCD$, 已知:

22. A, B, C, AB, AD.　23. AB, BC, CD, B, C.

24. A, B, C, AD, CD.

25. 用一已知半徑 (radius) 畫一圓 (circle), 使與下圖相切於一已知點:

(a) 一已知線。　(b) 一已知圓。

26. 畫一已知圓之切線 (tangent), 使平行一已知線.

27. 自一已知圓外之一已知點,畫此圓之二切線.

28. 經過已知二點,畫一圓使有已知之半徑.

29. 經過已知二點,畫一圓,使其圓心 (center) 在一已知線上.

作一平行四邊形 (parallelogram), 已知:

30. AB, BC, AC.　31. AB, BC, B.

32. AB, BD, ABD 角

33. 作一正方形 (square), 已知其對角線 (diagonal).

34. 作二圓之公切線 (common tangents).

2. 以上諸題,甚易解答;其他習題,或須詳細研究,始有解法,則宜按步進行如下:

a. 假設此題已解,圖已作成,乃研究圖中已知件 (given parts) 與未知件 (unknown parts) 之互相關係,此謂題之解析 (analysis), *b*. 因此必得作圖要訣,然後書其作法.

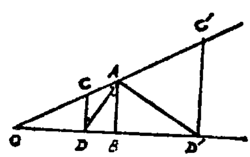
c. 證明依此作圖,全合題中一切條件.

d. 討論此題之可能情形,以及解答之多寡,等等.

以下例題即用此法:

3 題. 已知角之一邊上,有一已知點,在此邊上求一點,使離已知點及離此角之其他一邊,其距相等.

解析. 設 A (第 1 圖)爲已知點,而 C 爲所求點(required point)。放落垂線 AB 及 CD,依假設,旣 $AC=CD$,則 $\angle CDA=\angle CAD$;CD 線旣平行 AB 線,則 $\angle CDA=\angle DAB$,故 $\angle CAD=\angle DAB$,此即 AD 線爲 $\angle CAB$ 之平分線。



第 1 圖

作法. 自已知點 A 放落垂線 AB。畫 OAB 角之平分線,且令此平分線與 OB 之交點爲 D,在 D 上畫 OB 之垂線,此垂線遇 OA 於所求點 C。

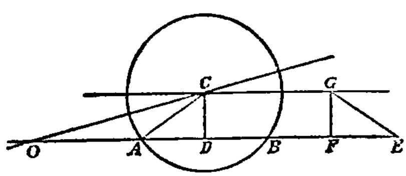
證明. 依作法 $\angle CAD=\angle BAD$, $\angle BAD=\angle ADC$,因依作法 AB 平行 CD,故 $\angle ADC=\angle CAD$,然則 ADC 爲等腰三角形 (isosceles triangle),而 $CA=CD$,此即求證之條件。

討論. 此題有二解,因 A 點上有二角,其平分線在 OB 上得二交點。

2 題. 用一已知半徑,畫一圓形,使其圓心在已知角之一邊上,而使此角之其他一邊上有一已知長短之弦 (chord).

解析. 設 C (第 2 圖) 爲所求圓之圓心,以致 $CA=R$, 而 $AB=l$, 其 R 及 l 各爲已知之長短,自 C 至 AB, 其垂線 CD 之垂足 (foot of the perpendicular) D, 爲 AB 之中點 (mid-point), 然則直三角形 ACD 中,今知其斜邊 (hypotenuse) $AC=R$, 而其股邊 (leg) $AD=\frac{1}{2}l$, 故 CD 亦爲可知邊,此即 C 點與已知線 OA 有一可知距離.

作法 已知角之 OA 邊上在任何一處,割去 $EF=\frac{1}{2}l$, 在 F 上竪立 OA 之垂線,又用 E 爲圓心 R 爲半徑,畫一圓弧 (arc), 遇此垂線於 G, 經過 G 作 OA 之平行線,使遇 OC 於 C, 以 C 爲圓心 R 爲半徑之圓,即此題之解答.



第 2 圖

證明. 依作法,此圓之圓心在已知角之一邊上,且有此已知長爲其半徑.故僅須表明在此角之其他一