

科學叢書

幾何原理

孫叢 譯
種桂
傅韓

共學社

社 學 共

科 學 叢 書

江苏工业学院图书馆

藏 書 章

輯 傳

法國赫爾勃特原著

桂 種

叢 孫

譯 述

何

原

理

商務印書館發行

(Hilbert, D.) 45

程宇啟

民國二十一年一月二十九日

敝公司突遭國總務處印刷

所編譯所書被炸燬附

設之涵芬樓市書館尙公

小學亦遭殃及付焚如三十

五載之經營一旦迭蒙

各界慰問督盼恢復詞意

懇摯銜感何窮雖處境艱

困不敢不勉爲其難因將

較切各書先行覆印其他

亦將次第出版是圖版裝製

不能盡如原式所限想荷

鑒原謹布下忱

上海商務印書館謹啓

版 有 所 翻 印 必 究

中華民國十三年三月初版

民國廿一年十月印行 國難後第一版

共學社 科學叢書 幾何原理一冊

Fundamentals of Geometry

冊定價大洋肆角伍分

埠酌加運費匯費

法國 David H.

韓傅 桂種 叢孫

上海河南路 商務印書館

上海及 商務印書館

發行所

印刷行

譯述

原

敘 言

幾何猶算術也，必需少數簡單基本的原則以爲論證之基礎。初等基本之原則，名爲幾何之公理。

公理之選擇及其間關係之考究，乃幾何之大問題，從歐几里特以來，鴻篇傑作，研究及之者不可勝數。此問題實即吾人關於空間的直覺之論理的分析也。

本篇目的在選擇一組簡單而且完全之獨立公理爲根據，更由是導出幾何之重要定理，公理分類務求明晰，援理推證亦務求界限清楚。

幾何原理目錄

敘 言

第 一 章

五 類 公 理

§1. 幾何要素及五類公理.....	1
§2. 類 I 結合公理.....	2
§3. 類 II 順序公理	5
§4. 結合公理及順序公理之演論	7
§5. 類 III 平行公理(歐几里特公理)	11
§6. 類 IV 合同公理.....	12
§7. 合同公理之演論	16
§8. 類 V 連續公理(亞幾默德公理)	26
附. 完備公理.....	27

第 二 章

公理之互相諧和及互相獨立

§9. 公理之互相諧和	28
§10. 平行公理之獨立(非歐几里特幾何)	31

§11. 合同公理之獨立	32
§12. 連續公理之獨立(非亞幾默德幾何)	35

第三章

比例論

§13. 複素數組織	38
§14. 巴斯開定理之證明	41
§15. 根據巴斯開定理之線段計算法	47
§16. 比例及相似之定理	51
§17. 直線及平面之方程式	54

第四章

平面面積理論

§18. 多角形之算術的等積及代數的等積	58
§19. 等底且等高之平行四邊形及三角形	61
§20. 三角形及多角形之面積測度	65
§21. 代數的等積與面積測度	69

第五章

德沙格氏定理

§22. 德沙格氏定理及其在平面幾何用合同公理 之證法	74
--------------------------------------	----

§23. 在平面幾何不用合同公理不能證明德沙格氏定理	77
§24. 根據德沙格氏定理而不用合同公理之線段計算新法續論.....	84
§25. 線段計算新法中加法之交換定律及結合定律	86
§26. 線段計算新法中乘法之結合定律及分配定律.....	88
§27. 以此線段計算新法爲基礎之直線方程式	95
§28. 線段系視如複數系.....	100
§29. 用德沙格氏數系創立空間幾何	101
§30. 德沙格氏定理之真諦	105

第六章

巴斯開定理

§31. 關於巴斯開定理之可否證明之二定理....	108
§32. 乘法交換定律之於亞幾默德數系	109
§33. 乘法交換定律之於非亞幾默德數系	112

- §34. 關於巴斯開定理之二定理之證明(非巴斯開幾何).....116
- §35. 關於交點定理用巴斯開定理及德沙格氏定理之證明.....117

第七章

根據五類公理之幾何作圖法

- §36. 用直尺及線段遷移器之幾何作圖法.....120
- §37. 可用上述作圖法所得之點之坐標之解析的表徵.....124
- §38. 用平方之和表示代數的數及整的有理函數之方法.....126
- §39. 幾何作圖題可否用直尺及線段遷移器作成之準則.....133

結 論

幾何原理

第一章

五類公理

§1. 幾何要素及五類公理

幾何中有三種不同之物：第一種曰點 (*Points*) 以 $A, B, C, \dots$ 表之；第二種曰直線 (*Straight lines*) 以 $a, b, c, \dots$ 表之；第三種曰平面 (*Planes*) 以 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ 表之。點稱為直線幾何之要素 (*Elements of lineear geometry*)；點及直線稱為平面幾何之要素 (*Elements of plane geometry*)；點、直線及平面稱為空間幾何之要素 (*Elements of geometry of space*)，或稱空間之要素 (*Elements of space*)。

吾人覺點、直線及平面其間有種種相互關係，常以置在 (*Being situated on*) 介乎 (*Between*) 平行 (*Parallel*) 合同 (*Congruente*) 連續 (*Continuous*) 等語表明之。此種相互關係，加以正確而且完全之述說即為幾何之

公理 (*Axioms of geometry*). 公理可分五類而各類皆可表現吾人空間直覺之一種基本事實。類名如下:

I, 1-9. 結合公理 (*Axioms of connection*).

II, 1-5. 順序公理 (*Axioms of order*).

III, 平行公理 (*Axioms of parallel*).

IV, 1-6. 合同公理 (*Axioms of congruence*).

V, 連續公理 (*Axioms of continuity*).

§2. 類 I. 結合公理

本類公理可證實點與直線與平面間之結合的關係。其公理如下:

I, 1.* 一直線上最少有二點不相同。

I, 2. 相異二點 A, B 恆決定一直線 a 。

可書為

$$AB = a, \text{ 或 } BA = a.$$

* 湯譯, (i) 一直線上至少有二點不相同, (ii) 一平面上至少有三點不在一直線上, (iii) 空間至少有四點不在一平面上, 三語併為 I, 7. 林譯將 (i) (ii) 兩語併為 I3, 列入平面幾何公理, 僅以 (iii) 屬於空間幾何公理。譯者按 (i) 為直線幾何公理, (ii) 為平面幾何公理。

決定 (Determine) 一語, 亦可以他語代之。例如曰 A 在 a 上, 或曰 A 爲 a 之一點, 或曰 a 通過 A 與 B , 或曰 a 連結 A 與 B 或到 B 等等, 均無不可。若一點 A 在直線 a 上, 同時又在他一直線 b 上, 則稱直線 a, b 有公共點 A , 或謂 a, b 兩直線相交於 A 。

I, 3. 一直線上相異的任意兩點能完全決定該直線。 即如設 $AB=a$ 及 $AC=a$, 而 $B \neq C$, 則 $BC=a$ 。

I, 4.* 一平面上至少有三點不在一直線上。

I, 5. 不在同一直線上之三點 A, B, C 恆全完決定一平面 α 。 可書爲 $ABC=\alpha$ 。

此又可以 $\perp A, B, C$ 在平面 α 上¹, $\perp A, B, C$ 爲平面 α 上之點¹ 諸語表之。

I, 6. 一平面 α 上, 不在一直線之任意三點 A, B, C 能完全決定該平面。

I, 7. 若一直線 a 上之兩點 A, B 在一平面 α 上, 則 a 上各點均在 α 上。

此種情形又可謂直線 a 在平面 α 上。

I, 8. 若 α, β 二平面有一公共點 A , 則至少必還有一公共點 B 。

I, 9.* 空間至少有四點不在一平面上。

公理類 I, 1 僅述及直線上之點,即直線幾何之要素,故稱爲類 I 之直線幾何公理。公理類 I, 2-4 僅述及平面上點及直線,即平面幾何之要素,故稱爲類 I 之平面幾何公理。而公理類 I, 5-9 則稱爲類 I 之空間幾何公理,以便分別。

由類 I 之公理導出之定理如下:

定理 1. 一平面上之二直線可有一公共點或無公共點;二平面可有一公共直線或無公共點;一平面與不在該平面上之任一直線可有一公共點或無公共點。

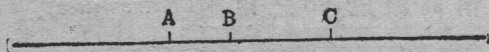
定理 2. 過一直線與不在該直線上之任一點,或過有一公共點之二直線,均僅可作一平面。

*(即 Veblen-Young's Projective Geometry 之所謂展延公理 [Assumption on Extension] 者是也) 他類公理之爲直線的,平面的,抑空間的既嚴格分別之,此處自不宜混合,故逕分別列之。又僅論直線幾何而不論平面幾何時,則直線幾何公理中之“在一直線上”等字樣,可以取消。(以後諸類亦然) 公理類 I, 9 之“空間”二字,可有可無。

§3. 類 II. 順序公理

本類公理可確定介乎一語之意義,由此意義再證實直線上或平面上或空間之各點的順序. 直線上各點彼此有相互關係,特以介乎一語表之. 其公理如下:

II, 1. 一直線上之 A, B, C 三點,若 B 介乎 A 與 C 之間,則 B 亦必介乎 C 與 A 之間.



第一圖

II, 2. 若 A, C 爲一直線上之二點,則至少有一點 B 介乎 A 與 C 之間;且至少另有其他一點 D ,而 C 介乎 A 與 D 之間.



第二圖

II, 3. 一直線上之任意三點中,必有一點介乎其餘二點之間,且三點中僅有一點能介乎其餘二點之間.*

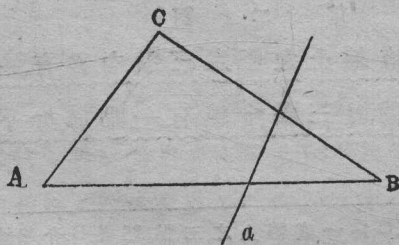
*意謂若 A, B, C 爲一直線上之三點,則必 B 介乎 A 與 C 之間,或 A 介乎 B 與 C 之間,或 C 介乎 A 與 B 之間;苟 B 介乎 A 與 C 之間,則 A 不得介乎 B 與 C 之間, C 不得介乎 A 與 B 之間.

II, 4. 一直線上之任意四點 A, B, C, D 恆可排列之使 B 介乎 A 與 C 之間, 又介乎 A 與 D 之間, 且 C 介乎 A 與 D 之間, 又介乎 B 與 D 之間.

定義. 一直線上 A, B 二點之組 (System of two points) 曰線段 (Segment) 以 AB 或 BA 表之. 凡介乎 A 與 B 間之各點, 皆稱線段 AB 之點 或稱線段 AB 以內之點.

此直線上其餘各點, 則稱為線段 AB 以外之點.
 A 與 B 稱為線段 AB 之兩端 (Extremities).

II, 5. 設 A, B, C 為不在同一直線上之三點, 又設 a 為平面 ABC 上之直線而不通過 A, B, C . 若 a 通過線段 AB 上之一點, 則必通過線段 AC 上之一點或通過線段 BC 上之一點.



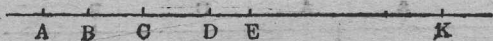
公理類 II , 1-4 僅述及直線上之各點, 故稱爲類 II 之直線公理. 公理類 II , 5 則述及平面幾何之要素(即點及直線)的關係, 故稱爲類 II 之平面公理.

§4. 結合公理及順序公理之演論

由公理 I , II 可以導出以下諸定理.

定理 3. 一直線上二點之間恆可有無窮個點.

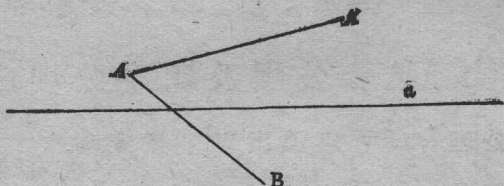
定理 4. 若有有窮個與點在一直線上恆可排爲 $A, B, C, D, E, \dots, K$, 而使 B 介乎 A 與 $C, D, E, \dots, K$, 之間, C 介乎 A, B 與 $D, E, \dots, K$, 之間; 餘類推. 除此種順序以外, 含有以上性質者, 僅爲其反對順序 $K, \dots, E, D, C, B, A$.



第 四 圖

定理 5. 平面 α 上之任一直線 a 可將 α 平面上其餘各點分爲二部分; 其一部分之一點 A 與他一

部分之一點 B 所決定之線段 AB 上,必含有 a 之一點;而同一部之二點 A, A' 所決定之線段 AA' ,則不含有 a 之點在。



第五圖

定義. 若 A, A', O, B 為直線 a 上之四點, O 居於 A 與 B 之間而不居於 A 與 A' 之間,則謂 AA' 兩點在 a 上居 O 點之同側;而 A, B 兩點在 a 上居 O 點之異側。居 O 點之同側各點,總稱為發端於 O 之半線 (*Half ray*);故直線上各點皆可分該直線為二半線。



第六圖

循用定理 5 之記號,則謂 A, A' 兩點在 a 平面上居直線 a 之同側;而 A, B 兩點在 a 平面上居直線 a 之異側。

定義。 一組線段 $AB, BC, CD, \dots, KL$ 總稱為連 A 與 L 之折線 (*Broken line*), 而為簡便起見, 以折線 $ABCD \dots KL$ 表之; 在 $AB, BC, CD, \dots, KL$ 諸線段上之點以及 $A, B, C, D, \dots, K, L$ 各點, 均稱為該折線之點。在特別情形若 A 點與 L 點相合或一致, 則此折線稱為多角形 (*Polygon*), 而以多角形 $ABCD \dots K$ 表之; $AB, BC, CD, \dots, KA$ 諸線段稱為多角形之邊 (*Sides*); 而 $A, B, C, D, \dots, K$ 各點稱為多角形之頂 (*Vertices*)。多角形之有三頂點者為三角形 (*Triangles*), 有四頂點者為四角形 (或四邊形) (*Quadrangles*), 有五頂點為五角形 (*Pentagons*), 以至有 n 個頂點者為 n 角形 (n -gons)。若多角形之各頂點各各不同 (即分離) 且無在各邊線段之上者, 並且無有二邊相交者, 則稱為簡單多角形 (*Simple polygon*)。

根據定理 5, 以下諸定理不難證明:

定理 6. 任何一簡單多角形, 若其頂點全在一平面 α 上, 則必將平面上而不在多角形各邊上之各點分為內外兩部, 而有下列諸性質: 設 A 為內部之一點 (內部點), B 為外部之一點 (外部點), 則連