

张奠宙 李士锜 主编

数学教育研究前沿

第二辑

华东师范大学出版社

中小学概率的 教与学

李俊 著



教育部《义务教育数学课程标准(2011年版)》

中小学概率的 教与学

曹建 著

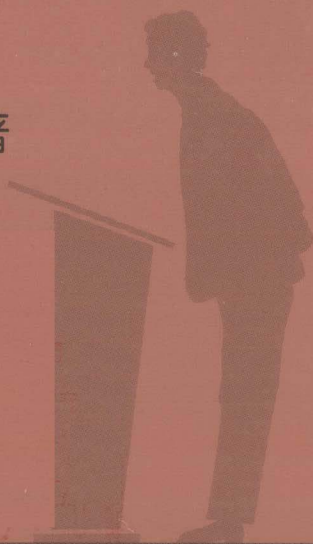
本书是《中小学概率的教与学》系列丛书之一，旨在帮助中小学教师理解概率的概念、性质、运算，掌握概率的教学方法，提高概率的教学质量。本书共分五章，第一章介绍概率的基本概念，第二章介绍概率的加法公式、乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式，第三章介绍二项分布、超几何分布、泊松分布、正态分布，第四章介绍多元正态分布，第五章介绍多元正态分布的判别分析。本书可作为中小学教师培训教材，也可作为中小学教师参考书。

张奠宙 李士锜 主编

数 学 教 育 研 究 前 沿 · 第 2 辑

中小学概率 的教与学

李 俊 著



华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

中小学概率的教与学/李俊著. —上海:华东师范大学出版社, 2003. 5

(数学教育研究前沿. 第2辑/张奠宙, 李士铨主编)

ISBN 7-5617-3270-8

I. 中... II. 李... III. 概率论-教学研究-中小学 IV. G633.662

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 017377 号

数学教育研究前沿·第2辑

中小学概率的教与学

著 者 / 李 俊

组 稿 / 倪 明

特约编辑 / 陈信漪

封面设计 / 高 山

版式设计 / 蒋 克

出版发行 / 华东师范大学出版社

电话 021-62865537 传真 021-62860410

门市(邮购)电话 021-62869887

<http://www.ecnupress.com.cn>

社 址 / 上海市中山北路 3663 号

邮编 200062

印 刷 / 上海华成印刷装帧有限公司

开 本 / 890 × 1240 32 开

印 张 / 5

插 页 / 4

字 数 / 143 千字

版 次 / 2003 年 5 月第一版

印 次 / 2003 年 5 月第一次

书 号 / ISBN 7-5617-3270-8 / G · 1716

本辑定价 / 55.00 元(本册 11.00 元)

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社市场部调换或电话 021-62865537 联系)

总 序

——建设有中国特色的数学教育理论

数学教育的历史和数学本身的历史一样长。当人类结绳记事的时候,就有把数量大小、先后次序传授给下一代的教育。在埃及的纸草、巴比伦的泥板、中国的竹简上,都留下了数学的痕迹,那是当时让儿孙们去认读的文书。中国隋唐时期设明算科,凭数学知识居然可以到朝廷去做官,更是数学教育史上一件盛事。

至于现代的学校数学教育,自然始于西方。中国实行学校制度,普遍开设数学课程,当是辛亥革命推翻清朝以后的事,至今也就百年。不过,中国数学教育的发展似乎并不落后。近百年来,先学日本,继学欧美,再学苏联,可谓博采众长。经过大跃进、调整巩固、文革动乱、拨乱反正,自己也慢慢摸索出一条发展中国数学教育的路子来了。依照国际数学水平测试的结果,中国学生的数学成绩不仅远超发展中国家,而且也优于发达国家。个中原因,现在还没有非常认真地总结过。一个不争的事实是,儒家文化、考试文化、考据文化等因素,是影响中国数学教育成功的因素之一。那么,在实践中获得成功的中国数学教育,是否可以产生一种理论呢?似乎还不能给出一个明确的结论。

数学教育作为一种理论,大约是 20 世纪 60 年代以后的事。那时荷兰数学家弗赖登塔尔担任国际数学教育委员会主席。他主张数学教育研究应当像数学研究一样,要明确前人做了些什么,现在有什么问题,我用什么方法研究,得到了什么新的结果。1968 年第一次



国际数学教育大会召开,算是现代数学教育研究的肇始。

如果说,中国在数学教育的实践上取得了引人注目的成就,那么在数学教育研究上则相对落后。长期以来,是把数学教育研究等同于国家数学教学大纲的说明书(“教材教法”),或者走“一般教育学+数学例子”的研究道路。数学解题理论只到波利亚为止。发表的文章中,除了解题的以外,往往是介绍国外的东西,或者综合性地加以报导,并未参与研究或进行评论。至于自己的主张,则往往只是“浅谈”、“初议”、“思考”、“感想”而已。其中不乏真知灼见,却因缺乏“科学”的方法,淹没在泛泛而谈的论述之中。

我们在20世纪80年代就想改变这一现状,编写过《数学教育研究导引》一书,试图介绍一些数学教育研究的范本。此书发行一万册,后常见在不少文章中引用其中的观点,大概还算有些影响。十几年过去了,我国的研究工作有了一些进展,于是就有出版这套《数学教育研究前沿》丛书的计划。蒙华东师范大学出版社领导和倪明同志的支持,历时三载,现在终于和大家见面了。作为这套书的编辑者,我们是力求展现中国式的数学教育研究,尽量把学术含量较高的作品收集起来。其中有在美国、新加坡、德国以及香港和内地大学所做的博士论文,也有针对中国现状所做的调查报告、专题研究,意在积累和展示中国数学教育学者的研究成果,为建设中国特色的数学教育理论提供一些基础。

本丛书的主题及其结论固然可以供大家参考,但我们更愿意推荐的是作者使用的一些研究方法。近年来我国的数学教育研究在方法方面已经有所改进,但从选题的范围,到探索论据的途径和角度,直至提炼结论的恰当程度,仍大有提高之处。纵观近几年国际上的数学教育研究,方法上正在经历变动,更加强调整定性分析与定量分析的完善结合。要尽快提升我们研究的水平,关注和学习研究的方法在当前显得尤为重要。借鉴丛书提供的优秀的方法范例,能使我们的一些课题研究以及博士、硕士论文的写作有更严谨的、规范的参照坐标。



收录本丛书前两辑的均是薄本子,约10万字。我们希望研究的课题适当小一些,谈的问题精一些,并做到言之有物,言必有据。这是我们的编辑意图。范良火的《教师教学知识发展研究》,因英文版的篇幅较大,为反映全貌,保留它的完整性,全文照译,单独作为第三辑。

数学教育研究的目的,是揭示数学教育的基本原理、特有规律,把隐藏在大量实践背后的因果线索理清楚,并上升为理论。这里,不能仅仅停留在若干教育学、心理学的一般规律上,更不能只满足于符合一些时髦的口号。弗赖登塔尔的“数学现实论”、“数学再创造论”、“数学形式化原则”;波利亚的“合情推理”学说;范·希尔的“几何学习5水平”界说;杜宾斯基的APOS数学概念教学观;徐利治的数学方法论;陈重穆的“淡化形式、注重实质”;张景中院士研究的“ $Z+Z$ ”数学教育软件等等,都具有浓厚的数学品味和理论价值。从本丛书的成果中,我们也看到了这样的特点。作者们并没有停留在“建构主义”、“个性发展”、“尝试探索”一类的教育学口号之上,而是针对数学教育情境,由下而上,比较扎实地就某个专题进行探究。一位数学教育名家说过,数学教育研究应当“上通数学,下达课堂”,大概是不错的。

现在我们还有许多重要的事情要做。例如,数学“双基”教学模式,数学练习的变式方法,数学训练中的熟能生巧,数学解题教学中的中国式设计,数学课程的中国特色,以及中国数学教育的原始资料的积累等等,都有待于今后的努力开拓。建设有中国特色的数学教育理论,任重而道远。愿我们大家积极地进取开拓,在不远的将来,在世界数学教育论坛上能够多听到中国的声音。中国应该为国际数学教育事业作出自己的贡献。

张奠宙 李士铸

2002.9.7



迟到的收获

——《中小学概率的教与学》序言

这是第一部研究中国基础教育中概率教学的著作。于是,既感到珍贵,又觉得来得太晚了些。

朴素的概率论,恐怕是人人都有的。在中国传统文化中,也有许多涉及可能性的例子。田忌赛马故事开博弈论的先河,背后有概率的影子。至于“万无一失”比喻“有绝对把握”,则是对“小概率事件”的一种认识。但是,朴素的概率观念不能走得太远,很快就会出错。

西方的概率论出自赌博,把赌金的分配和数学期望联系起来,从“可能性”的常识,进入了数学的殿堂。概率和赌博连在一起并没有什么不光彩。人在世界上,就是要在各种可能发生的情况下,带有风险地作出决策,风险的大小就是概率。1671年,伯努利家族的雅可布第一(Bernoulli, Jacob I)写了《猜度的艺术》,算是“概率论”的肇始。尽管中国不缺乏赌博,比如“麻将”里就有许多概率问题,只是没有“闲人”去思考出那个“伟大的期望值”。

概率论传入中国是20世纪的事。1905年京师大学堂的教科书《普通代数学》(江宁徐虎臣编译)中把概率叫做“适遇”。1916年的《科学》上曾有文介绍“决疑数学”,概率则称“或然率”。1930年代,中国的中学多采用英美教科书,《范氏大代数》中就有古典概率的计算,曾经是高考的一部分。到了1950年代学习苏联之后,概率被扫地出门。1980年代初列入数学教学大纲,不久再次受逐。1990年代



后期,才又重新列入“实验”,直到现在还没有完全普及。倒是 2001 年颁布的全日制义务教育《数学课程标准》,让学生从小学开始就接触概率论。概率统计是否要列入中国的中小学数学课程?这一历时百年的争论,大概在 21 世纪初终于有了肯定的结果。

本书是作者在新加坡南洋理工大学完成的博士论文,原文是英文的。我常常在想,中国的数学教育研究文章可说汗牛充栋,为何没有人去关注“概率教学”?或许有人说,课程中没有概率,所以没有人研究。但是,课程能不能包括概率论,总不能靠一些决策人“拍脑袋”加以论定。课程标准要包括哪些内容,是应该有前期的科学研究作为根据的,也就是说,数学教育研究应该走在国家制定《数学课程标准》的前面。概率教学的缺失,是中国数学文化的不足。

说了上面的话,不是批评任何人,做得不够的也包括笔者自己。为了中国数学教育的明天,让我们做一些扎扎实实的研究,把前些时候的欠账一一补上,以优异的研究成果向人民报告,让世界听到我们的声音。

张奠宙

2002.9.6



前 言

如果岁月倒流三十余年,在那一切都要计划的年代,广大老百姓是不需要多少概率知识的。但是,市场经济替代计划经济以后,通过产品市场、人力市场、金融市场、投资市场等等渠道,人们已经深刻地感受到不确定性的无所不在,感受到了了解和预测这种不确定性的重要。

随机现象有两个重要特征,一是它的不确定性,这是人们容易观察到的明显特征。二是它的规律性,即大数属性,正因为它有这一属性,所以才与数学发生了联系。但是人们在平时零星的观察中一般不容易发现随机现象背后的规律,于是,经验和直觉几乎成了人们决策的所有基础,互相难以交流和商讨,决策错误屡见不鲜。因此,概率以及与之密切相关的统计走进大众的数学教育是势在必行的。

据魏宗舒先生回忆^①:“(我国20世纪)40年代以前的中学代数教科书,很多都有概率这一章。……所举的例子都是一些排列组合和坛中摸球等问题,很少具体应用,生命力不强,后来就中断了。”直到1980年颁布的全国数学教学大纲才新增加了“概率统计的初步知识”等内容,从此,全国各地在初三(九年级)都有约10学时学习统计,但由于各种实际原因,高中阶段的概率内容几乎没有开展教学。90年代,上海的高中数学课程标准率先明确规定概率为必学必考的内容,安排在高三年级学完排列组合内容之后,约占10学时,主要学

^① 魏宗舒. 关于中学数学中讲概率的一些意见. 数学教学, 1979(2): 4~5



理理论概率的计算,但在历年上海数学高考中概率内容只占150分中的4分。

再把视线移向国际。自从20世纪50年代国际统计学会(ISI)决定要在世界各国的各级学校努力推进并开展统计学^①的教学,特别是20世纪70年代后期以来,统计学的教与学的研究和实践都取得了长足的进步。目前,关心这个领域发展的同行们已经有了自己的专业组织“国际统计学教育协会”(ISAE)、专业刊物《统计学教学》(Teaching Statistics)和每四年一届的大聚会“统计学教学国际大会”(ICOTS)。但统计学教学在世界范围内进入中小学的时间都还很短,还没有成为学校数学的一个重要分支,所以,有关的课程、学习心理、教学和评价等方面的研究以及教师培训、教学材料的开发等领域都还留有许多空白。

限于篇幅,本书有选择地介绍了我于1997年6月至2000年7月在新加坡南洋理工大学学习时所完成的研究工作。研究的主要问题有三个:中国学生对概率这一概念主要有哪些错误认识(*miskonception*)?学生认识概率概念一般经历怎样的认知发展过程?通过一个以活动为主的短期教学计划是否能够增进普通中学八年级学生对概率这一概念的理解?

本书的第1章为研究背景介绍,说明作者为什么要选择这个课题以及研究的意义。

第2章为文献述评,除了回顾以往的研究成果,主要将重点放在对不同研究的对比分析上。在相关部分,还就本研究某些设计细节与文献的关系作了说明。

第3章简要介绍研究方法和设计、实施研究的过程。

从第4章开始,接连三章依次回答上述三个研究问题。第4章重点报告观察到的四组最主要的错误概念,分析其产生根源,并考察这些错误概念的使用与学校类型、年级水平的关系问题,以及题目背

① 统计学(Statistics)包括统计与概率。



景和数据大小对引发这些错误概念的影响。

第5章用 SOLO 分类法,给出了一张从四个考察角度评价学生对概率概念理解水平的评价表,该表揭示了学生认识概率概念所经历的循序渐进的发展过程。也按学校类型与年级水平分别统计了学生给出各水平回答的人数,以检查学生的理解与其所属学校类型、年龄等的关系问题。

第6章简单报告了一个教学实验的结果,旨在考察在普通中学初中阶段学习概率的可行性问题。

第7章是对整个研究的一个综述,从研究结果出发向课程开发者和第一线教师提出了一些具体的建议,并列出了可以继续研究的几个课题。

本书虽然关注的是不同年龄、不同学校类型、对概率有不同熟悉程度的学生对概率这一个数学概念的认识,应属于数学学习心理范畴,但是,教育是相通的,从学生的学习情况也能反映出课程、教学与评价等诸多方面存在的或应予关注的问题。相信这里陈述的一些结果和提出的一些建议对当前正在进行的课程改革会有一些帮助。

借此机会,衷心感谢所有关心、帮助和支持我完成这一研究的人们。感谢 Clifford Konold 先生、Jane Watson 女士、Joan Garfield 女士、Carmen Batanero 女士和 Jonathan Moritz 先生,他们有的认真地审查过这里的试测题,有的仔细地推敲过这里评价学生回答的标准,他们的意见和建议对提高本研究的质量有着极为重要的作用。

感谢所有参加研究的学生们,尽管他们没有学过或学过很少的概率,但是他们的回答非常认真、详细而坦诚。感谢这些学校的领导和教师,这些学校有:绍兴望华小学、绍兴文理学院附中、绍兴鲁迅中学、上海晋元中学、上海云岭实验中学、上海曹杨第二中学、华东师范大学第二附属中学、上海七宝中学、上海徐汇中学、上海虹桥中学、上海师资培训中心实验基地附属中学和上海新基础教育实验学校。

感谢尊敬的导师 *Lionel Pereira-Mendoza*,从他那里我学到了如何做研究,虽然“做研究”写起来只是短短三个字,但其中包含的



成分实在很多。也感谢新加坡南洋理工大学教育学院的很多教师：*Lee Peng Yee*、罗贯中、*Phang Lay Ping*、*Yap Sook Few*，他们在学术方面给了我很多实实在在的建议和帮助。新加坡南洋理工大学教育学院以及东南亚数学会先后为本研究收集数据提供了经费资助，谨表谢意。

感谢聂必凯、杨玉东两位博士生花了很多时间协助将本论文的英文版译成中文，也感谢陈信漪先生在编辑本书的过程中作了许多细致而必需的修改。

最后，谢谢我的家人，他们的爱、鼓励和支持让我能够坚持在异乡专心完成这艰苦的学业。

我将本书献给带领我走进数学教育研究领域的三位启蒙老师：陈昌平先生、张莫宙先生和唐瑞芬女士，不知他们是否满意。同时，我也期待着来自其他同行的意见与探讨。



目 录

总 序

迟到的收获——《中小学概率的教与学》序言

前 言

1. 介绍 (1)

1.1 背景 (1)

1.2 选题 (2)

1.3 问题 (4)

1.4 意义 (5)

2. 文献述评 (7)

2.1 对学生错误概念的研究 (7)

2.2 对学生概率思维框架的研究 (23)

2.3 对实际教学策略的研究 (32)

3. 研究的设计与实施过程 (36)

3.1 测试题目 (36)

3.2 主研究 (41)

3.3 数据编码 (44)

3.4 教学实验 (46)

3.5 数据分析 (50)



4. 对概率的主要错误概念 (51)

- 4.1 第四组:机会不能量化及预测 (52)
- 4.2 第五组:等可能性 (58)
- 4.3 第六组:预言结果法 (65)
- 4.4 第十一组:用自己的方法比较机会 (72)

5. 学习概率过程中认知的发展 (82)

- 5.1 每一类型测试题中各种水平的回答 (84)
- 5.2 理解水平指标 (95)
- 5.3 其他 (102)

6. 教学实验 (104)

- 6.1 教学实验的结果 (104)
- 6.2 进一步的信息 (110)

7. 总结、启示和建议 (113)

- 7.1 对本研究的总结 (113)
- 7.2 对教学的启示 (119)
- 7.3 继续研究的课题 (122)

附录 83 个用于主研究的测试问卷题目 (124)

参考文献 (141)

人名索引 (147)



1

介 绍



背 景

日常生活中,人们经常要在不确定的情况下作决定,如足球迷在买足球彩票时要预测每场比赛的结果、远行者上飞机前要决定是否买保险、病人家属根据医生所说的治愈机会要决定是否进行手术,等等。人们虽然作了决定,但清楚是在冒风险,人们常用不太可能、有可能、很有可能、不足一半的机会、百分之八十五的可能性等等词汇和数字来描述这种风险的大小。由于机会与人们的生活和工作密切相关,而且学习概率知识有助于更好地把握和理解风险,因此,将概率引入学校课程是合乎情理的。

为顺应社会的这一要求,自 20 世纪 80 年代以来,全球范围的“把统计和概率的初步知识作为数学基本修养的一部分而引入中学甚至小学课程这一运动正在升温”(参见 Garfield & Ahlgren, 1988, p. 44)与蔓延。从美国、澳大利亚和新西兰等国家于 20 世纪 80~90 年代发表的一些国家级课程改革文件来看,它们都建议应该在学校教育的早期就让学生开始学习概率,而且应该让学生在解释自己收集来的数据的情境下学习概率。例如,美国 1989 年的《学校数学课程与评估标准》倡议,“在幼儿园到小学四年级这一阶段,数学课程应将经历数据分析和概率包括进去,以便学生能……探究与机会有关的一些概念”(第 54 页)。在五~八年级和九~十二年级,该课程标



准建议继续扩展学生对模拟试验和实验概率的体验以进一步完善他们的理解。除了这些起指导作用的纲领性文件,市场上已经出现了一些像《探究机会与数据》(Lovitt & Lowe, 1993)、《交互式数学课程》(1998)和《重复抽样》(Simon, 1992)这些深受好评的教材、学生活动素材和教学软件。它们都有一个共同特点,即教学素材与学生的现实世界密切相关,教学途径不以令人生畏的排列组合知识为起点。



选 题

概率从它本身发展成为一个独立的学科到它广泛地进入中小学课程,只用了短短的几十年,这种速度是代数、几何等其他内容不可比拟的。然而,这样的快速推进也造成了教育研究跟不上课程改革步子的被动局面。

按照 Freudenthal(1973)的观点,教一个内容的最佳途径是联系学生的数学现实和生活现实,在将要传授的知识与学生已经在现实世界中积累的知识和经验之间、在将要传授的知识与已经教过的知识之间建立起紧密的联系。这是教学必须联系学生心理基础的观点。

那么,学生学习概率的心理基础是怎样的呢?从文献来看,以心理学工作者和统计学教育工作者为主的研究人员主要在以下两个领域开展研究工作,一是揭示人们对随机现象的认识,如人们的直觉、错误概念、偏见以及认知发展过程等;二是了解如何影响人们对随机现象的认识,比如采取怎样的教学措施帮助人们克服错误概念等。然而,就目前而言,这些研究基本上都是在一些西方国家做的,而且以中小学生为研究对象的也还不多。

大多数关于学生概率思维的研究都是 20 世纪 70 年代以后出现的。80 年代, Hawkins 和 Kapadia 在他们的文章中回顾并评述了这一领域已有的一些心理学和教学研究,他们提请读者思考一些问题,

