

水文統計方法

講義

華東水利學院

1956年1月

水文統計方法

顧崇壽編於一九五五年·水文專修科二年級用

目 錄

第一篇 頻度分析

第一章 緒 論

第一節	水文統計方法概說	1
第二節	頻度分配數列	9
第三節	頻度分配圖	18

第二章 平均數

第一節	概說	29
第二節	算術平均數	31
第三節	中位數與四分位數	44
第四節	眾數	52
第五節	幾何平均數與調和平均數	57

第三章 變異度

第一節	變異度的初步量度方法	63
第二節	均方差	72
第三節	變異係數與相對變異度	80

第四章 偏度和峯度

第一節	偏度	4-1
第二節	峯度	4-6

第五章 動差的計算

第一節	基本公式	5-1
第二節	動差的普通計算法	5-9

第三節	變率及動差計算的變率法	5—21
第四節	曲線配合原理	5—26

第六章 正態曲線(摘要)-----6—0

(機率與二項分配及超幾何分配，皮爾森第三型曲線，第一型、第五型及其他型曲線，夏里埃A型曲線，抽樣誤差公式來源，各章均從略)

第二篇 相關分析

第七章 直線相關

第一節	相關概說	7—1
第二節	迴歸直線	7—4
第三節	迴歸線誤差	7—19
第四節	相關係數	7—24
第五節	直線相關的其他問題	7—33
第六節	分組資料的相關計算法	7—41

第八章 非直線相關

第一節	相關比	8—0
第二節	多項式迴歸	8—4
第三節	函數項直線迴歸	8—7

(複相關及偏相關的解析法，及相關中的誤差公式來源等章均從略)

第九章 相關中的平均法和圖解法

第一節	兩變數相關的簡易求法	9—1
第二節	曲線變換為直線配合法	9—9
第三節	多變數相關的圖解法	9—13

第十章 時間數列的修訂

第一節	簡單移動平均數	10—1
第二節	加權移動平均數	10—7

第四章 偏度和峯度

第一節 偏度

§ 4.1 偏度的意義 分配不對稱狀態稱為「偏態」，偏態的程度，即分配的不對稱程度，稱為偏度（асимметрии, skewness）。由於觀測資料很少能呈對稱分配，通常多帶有偏態，僅偏斜之程度有所不同，是以偏度的研究在頻度分析中居於重要之地位，兩分配可以算術平均數及均方差（因之變差係數）相同，但偏度則不同。

如以橫軸代表變數 X 由左向右增加，縱軸代表頻度 f 或頻度密度 $f(X)$ ，若分配曲線或直方圖之長尾在右端者，則稱為「右偏」或「正偏」；若長尾在左，則稱為「左偏」或「負偏」，分別如圖 4.1 甲、乙兩圖，正偏時，當變數 X 由低值夾向高值時，其頻度先急劇增加，然後徐緩下降，負偏時則反是，又雖同為正偏，但頻度增加及下降之速度則各有不同，即正偏的程度可有不同，如圖 4.3 中 A 曲線升降速度均較 B 曲線為大，亦即其偏度較大，偏度大小及正負的測量方法有三種。

正偏(右偏)

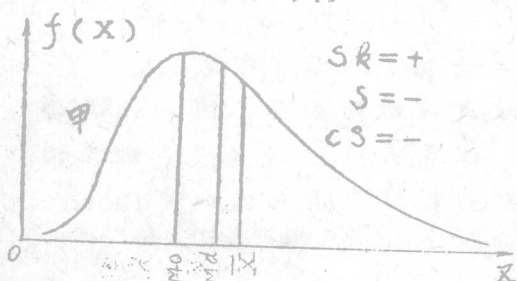
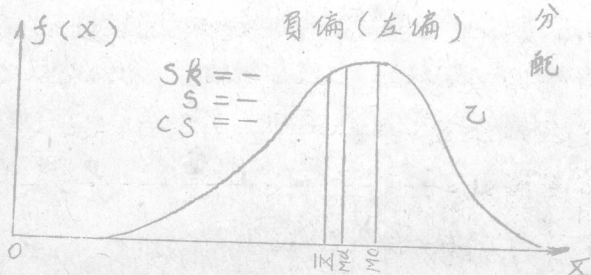


圖 4.1 正負偏態分配

負偏(左偏)



偏度的計算公式有三種（三種數值各不相同，不能彼此比較），均（1）為消除變異度後的無單位的純粹數字，（2）其數值正負大小即表現偏度正負大小，（3）數值為零時表示對稱。

§4.12. 鮑萊氏的偏度公式 当分配對称時，上下兩四分位數對中位數之距離相等，当分配不對称時則不等，於是英人鮑萊氏 (Arthur L. Bowley) 創用下列偏度計算公式

$$S_k = \frac{(Q_3 - Md) - (Md - Q_1)}{(Q_3 - Md) + (Md - Q_1)} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2Md}{Q_3 - Q_1} \quad \text{----- (4.1)}$$

由於上式分子分母同一單位，分母為四分位差之二倍，故算得之 S_k 值為一純粹數字或不名數，其數值在 -1 至 $+1$ 之間，鮑萊氏指出当 $S_k = 0.1$ 時，偏度為中等；当 $S_k = 0.3$ 時，偏度顯著。

但上述偏度計算方法與四分位數有同樣缺點，即乃由全數列之位置決定，而非由全數列之數值決定因此不能反映每一觀測值尤其極端數值的影響，是以上式在水文上極少應用。

§4.13 偏差係數 当分配為對称時，對算術平均數之各奇次動差均為零，但当分配不對称時，只一級動差為零，其餘各奇次動差並不為零，其中最低者為三級動差，以 μ_3 表之，例如前章甲數列 6、9、10、12、13 五數之 $\bar{x} = 10$ ， $\sigma = 2.74$

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{N} \sum (x_i - \bar{x}) = \frac{1}{5} \{ (6-10) + (9-10) + (10-10) + (12-10) + (13-10) \} = \frac{1}{5} \{ -4 - 1 + 0 + 2 + 3 \} = \frac{1}{5} \{ -5 + 5 \} = 0 \\ \mu_3 &= \frac{1}{N} \sum (x_i - \bar{x})^3 = \frac{1}{5} \{ (-4)^3 + (-1)^3 + 0 + 2^3 + 3^3 \} \\ &= \frac{1}{5} \{ -64 - 1 + 0 + 8 + 27 \} = \frac{1}{5} \{ -65 + 35 \} = -6 \end{aligned}$$

由上例可知對算術平均數之一級動差 μ_1 ，所以永為零，乃由正負離差適相抵消之故，但離差經三次方後各離差猶如以其自身之平方值為權數，於是極端離差在總和中所佔之比例增大，除非各正負離差彼此完全相等（對称時），否則其立方離差正負數值之和常不相等，表示有偏態存在。正偏時，大於算術平均數之各極端項甚於小於算術平均數之各極端項，極端正離差數值超過極端負離差數值，經三方後，相距更大，於是正立方之離差之和超過負立方離差之和，得 μ_3 為正數表示正偏，上項超過之數愈大， μ_3 之正值亦愈大，表示正偏度愈大（設各均方差相等）負偏時則反是。

是故對算術平均數之第三級動差 μ_3 可測量偏度，但

μ_3 之單位為原觀測值 X 之單位之三次方，在各數列單位不同時不便比較；且各偏差之大小因此 μ_3 之大小與變異度之大小有關，在偏度相同時，若變異度大， μ_3 亦大。如將各偏差先除以均方差，再求第三級動差，則可免除上二缺點，變為無單位的及消去變異度的純粹數字，可在各數列間進行比較。但

$$\frac{1}{N} \sum \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^3 = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sum (X_i - \bar{X})^3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

是以如將以原單位計的第三級動差 μ_3 以均方差之三次方除之，則得以均方差為單位計的第三級動差，以 α_3 記之，作為測量偏度之用，水文上以 C_s 記之，稱為「偏差係數」

(Коэффициент асимметрии, coefficient of skewness)。

$$C_s = \alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^3}{N \sigma^3} \quad \text{--- (4.2)}$$

上例甲數列 $C_s = \frac{-600}{(2.74)^3} = -0.29$ (負偏)

永定河官所流量 (表 3.1) $C_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{8266.8}{(1.790)^3} = +1.441$ (正偏)

宜昌流量 (表 3.2) $C_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{557.0}{(1.89)^3} = +0.3314$ (正偏)

雖然在特殊例子裡，當 C_s 等於 0 時仍非對稱分配；但在通常情形之下，偏差係數確為一滿意的偏度的尺度，其對頻度曲線形狀的關係如圖 4.2，它在水文上經常與算術平均數及變差係數一起使用。

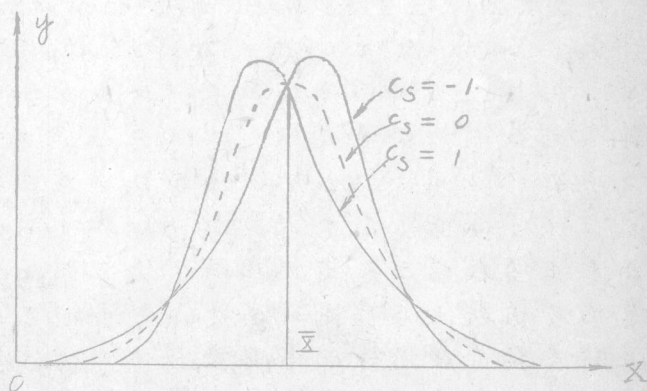


圖 4.2 偏差係數對曲線形狀的關係
(算術平均數及均方差均相同)

§ 4.14 皮尔森的偏度測量方法 對於同一類型的理論頻度分配曲線偏差係數 C_s 值愈大，偏度愈大，但對不同類型的理論頻度分配曲線，則不能比較，例如同一的 C_s 值 ($\bar{x}$, σ , C_u 均相同) 對皮尔森第一、三、五型曲線形狀的關係即不同，第一型偏度最大，第三型次之，第五型最小，故須另求測量偏度之法，以補 C_s 之不足。

當分配為對稱時，算術平均數，中位數，及眾數合而為一。當分配為偏態時，三者分離。在正偏時，算術平均數受若干高值極端項影響最大，數值增大最多，中位數只受位置影響，增大較少，眾數則不受極端項影響，最為穩定。是以正偏時 $\bar{x} > Md > M_0$ ，同理在負偏時， $\bar{x} < Md < M_0$ ，是以算術平均數與眾數之距離稱為「偏距」，以 d 表之為

$$\text{偏距 } d = \bar{x} - M_0 \quad (4.3)$$

可以測量偏度，但偏距數值仍保持原單位，且因變異度之增大而增大，故須以均方差除之，化為無單位的消除變異度的純粹數字，為皮尔森氏 (Karl Pearson) 所創用，並即稱之為偏度，以 S 表之為

$$S = \frac{\bar{x} - M_0}{\sigma} = \frac{d}{\sigma} \quad (4.4)$$

但應用上項公式有一困難，即真正（理論）眾數難於確定。性如屬於皮尔森各型曲線的分配情況（代表之範圍甚廣，已有正負偏之鈴形分配分丁形分配，在實用上已包括絕大部份的單眾數各種類型的分配），則理論眾數及偏度可由下二式確切求得。（証明見第七章，對已分組及未分組資料同樣適用）

$$M_0 = \bar{x} - \frac{\sigma \alpha_3 (\alpha_4 + 3)}{2(5\alpha_4 - 6\alpha_3^2 - 9)} = \bar{x} - \frac{\sigma C_s (C_e + 6)}{2(5C_e - 6C_s^2 + 6)} \quad (4.5)$$

$$S = \frac{\bar{x} - M_0}{\sigma} = \frac{\alpha_3 (\alpha_4 + 3)}{2(5\alpha_4 - 6\alpha_3^2 - 9)} = \frac{C_s (C_e + 6)}{2(5C_e - 6C_s^2 + 6)} \quad (4.6)$$

式中 $\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = C_s$, $\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$, $C_e = \alpha_4 - 3$ (見下節)

宜昌流量例，已知 $\bar{x} = 51.60$ 千秒公方， $\sigma = 11.89$ 千秒公方，

$\alpha_3 = C_S = 0.3314$, $\alpha_4 = 2.232$ (見下節) 代入上二式得

偏度 $S = +0.5776$ (正偏), 偏距 $d = S\sigma = 6.87$ 千秒公方
 众数 $M_0 = \bar{x} - S\sigma = \bar{x} - d = 44.73$ 千秒公方。

S 及 C_S 值並無理論上限存在, 惟通常其絕對值多小於 2, S 與 C_S 間並無一般的固定關係存在, 惟在皮爾森第三型曲線分配時, 則有下列關係存在, 在夏里埃 A 型曲線分配時亦近似地有下列關係存在即

$$S = \frac{1}{2} C_S \quad \text{----- (4.7)}$$

因此有若干統計學者以 $\frac{1}{2} \alpha_3$ 代替 α_3 作為測量偏度之尺度, 在皮爾森第一型時, $S > \frac{1}{2} C_S$; 在第五型時, $S < \frac{1}{2} C_S$ 。是故對同樣之 C_S 值, 第一型曲線偏度大於第三型, 第五型曲線偏度則小於第三型。

圖 4.3 兩曲線均為正偏的第三型分配, A 綫之偏度較 B 綫為大, 不但表現在 S 及 C_S 值均較大, 且其偏距 d 亦較大, 曲綫起點至众數之距離 a 則較小 (假設兩均方差相等)。

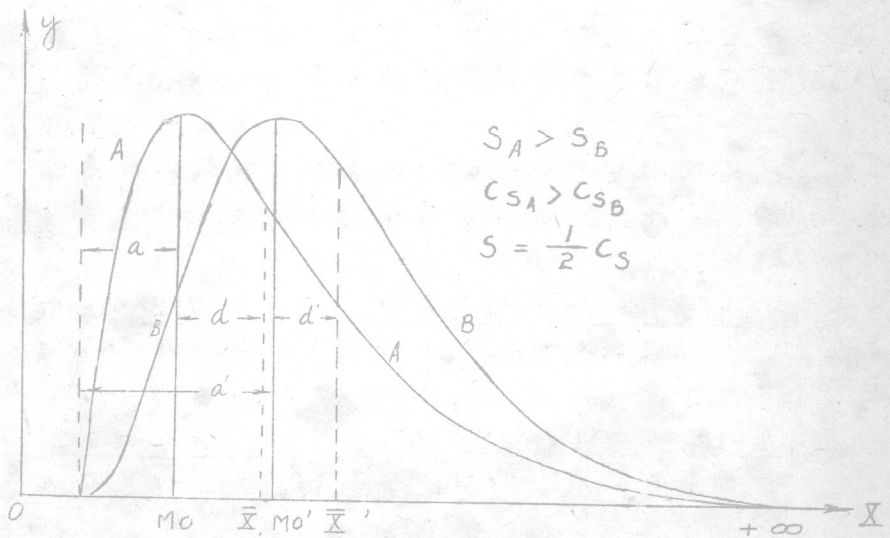


圖 4.3 不同偏度之兩皮爾森第三型頻度分配曲綫。

第二節 峯度

§ 峯度的意義 兩種分配可能算術平均數，均方差，及偏差係數均相等，而頻度分配曲線形狀仍不同，此主要表現在單峰（單眾數）頻度曲線的如山峰形的部份的高聳及廣狹程度，此稱為峯度（*kurtosis*），它表示各變數值集中在眾數左近的相對數目的大小，切勿與異變度之大小造成分配之集中與分散之意義相混，峯度乃表示在消除變異度後或當變異度相等時的分配集中於眾數的相對程度分配愈集中於眾數附近，則峯愈狹，分配愈不集中在眾數附近，則峯愈闊，峯高表示頻率密度大，峯狹表示集中範圍窄。

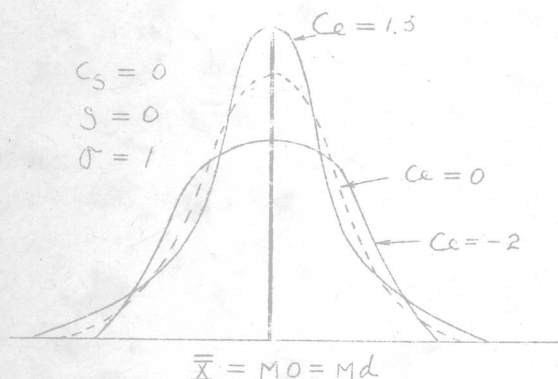


圖 4.4 不同峯度對頻度曲線的關係。

但為使頻度曲線下之面積恒為 1，當分配為狹峯態時，中間各項離差數值小，兩端離差必增大，以資補償，是以狹峯態常帶有長尾，反之在闊峯態時中間離差大兩端離差必減小，以

資補償，是以闊峯態常帶有短尾。如圖 4.4

§ 峯差係數 當頻度曲線帶有長尾時，由於其兩端離差大（指對數學平均數的離差），經四次方後，在離差四次方之總和中所佔之比例大為增大；且正負離差經四次方後均變為正值，不能彼此抵消，可將偏度消除，是以對算術平均數之第四級動差 μ_4 可以測量峯度，又為消除原單位四次方及變異度之影響起見， μ_4 須以 σ^4 除之，變為以均方差為單位（或當 $\sigma = 1$ 時）的對算術平均數的第四級動差，以 α_4 表示，用以測量峯度，於是

$$\text{峯度 } \alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^4}{N \sigma^4} \quad (4.8)$$

在正態分配時， $\alpha_4 = 3$ ，（見第七章），稱為中峯態，可

作為峯度之比較標準，各峯度減去3後之餘數大小及正負，表示其峯度大於或小於正態分配之峯度之數值，稱為「峯差」(Экцесс, excess (of kurtosis))，今以「峯差係數」稱之以表明其為一無單位之純粹數字，並與變差係數及偏差係數名稱一致並另以 C_e 表之，於是

$$\text{峯差係數 } C_e = \alpha_4 - 3 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \quad (4.9)$$

算例：永定河官所流量(表3.1)： $\sigma = 17.90$ 秒公方

$$\alpha_4 = \frac{52107}{(17.90)^4} = 5.076, \quad \mu_4 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^4}{N} = \frac{10421380}{20} = 52107, \quad C_e = 5.076 - 3 = 2.076 \text{ (狹峯長尾)}$$

宜昌流量(表3.2)：

$$\mu_2 = \sigma^2 = 141.44, \quad \mu_4 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^4 f_i}{\sum f_i} = 44.656,$$

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = 2.232, \quad C_e = \alpha_4 - 3 = -0.768 \text{ (濶峯短尾)}$$

當 $C_s = \alpha_3 = 0$ ，及 $\alpha_4 = 3$ 或 $C_e = 0$ 時，為正態分配，然 α_4 並非峯度之良好尺度，一般言之， α_4 只能表現峯之寬狹及尾之長短，並不能表現峯之高低，當 $\alpha_4 > 3$ 或 $C_e > 0$ 時，可稱為狹峯長尾；當 $\alpha_4 < 3$ 或 $C_e < 0$ 時，可稱為濶峯短尾。學生 T 氏 ("Student"，為 Gosset 之筆名) 曾作一比喻以助記憶，說濶峯短尾猶如鴨鵝蹣跚而狹峯長尾猶如袋鼠站立，由此引起一種通行的誤解，以為當 $\alpha_4 > 3$ 時，峯高於正態，稱為高峯態；當 $\alpha_4 < 3$ 時，峯低於正態，稱為低峯態(均方差相等)，此種說法不能認為普遍正確，曾引起許多批評。

一般言之，頻數曲線兩尾之長短高低遠較峯態之狹濶高低對 α_4 值之影響為大，如永定河官所流量資料(表3.1)第一項(1939年， $\bar{x} = 94.1$)極端值之偏差四次方數值佔總數之十分之九，為其高 α_4 值之主要決定因素，且各級偏差均對算術平均數計算，在分配有偏態時，更不能表現對眾數之相對集中程度，是以與其說 α_4 或 C_e 表現峯度之大小不如說它是表現「尾度」之大小，而水文上注重者正是尾之長短與高低。

[註] 有若干分配曲線，當 α_4 增大時（均方差不變），峯之高度增加，例如皮爾森第三型曲線 $y = y_0 \left(1 + \frac{x}{a}\right)^p e^{-px/a}$ ，（原点在众数）之最高縱坐標（通過众数之縱綫）

$$y_0 \approx \frac{\sqrt{p}}{a\sqrt{2\pi}} = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}\sqrt{4-C_s^2}}, \text{ 而 } 2\alpha_4 = 6 + 3\alpha_3^2$$

$$\text{或 } C_e = 1.5 C_s^2.$$

於是當 σ 不變時，若 α_4 或 C_e 增大，則 C_s^2 增大，於是 y_0 增高。但在第一型曲線時，情形複雜，為簡單起見，設 $C_s = 0$ ，於是第一型變為對稱，稱為第二型。

方程式為 $y = y_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^m$ （原点在众数），

$$m = \frac{5\alpha_4 - 9}{2(3 - \alpha_4)}, \quad a^2 = \frac{2\sigma^2\alpha_4}{3 - \alpha_4}, \quad (\text{須 } \alpha_4 < 3),$$

$$y_0 = \frac{\Gamma(m - 1\frac{1}{2})}{a\sqrt{\pi} \Gamma(m + 1)} \approx (m - 2\frac{1}{2})^{m-2} e^{2\frac{1}{2}} / a\sqrt{\pi} m^{m+\frac{1}{2}}$$

於是當 σ 不變時，若 α_4 增大， m 及 a 均增大，而 $m^{m+\frac{1}{2}}$ 較 $(m - 2\frac{1}{2})^{m-2}$ 增加為速（設 m 為正值），於是 y_0 之分母增大程度超過分子，即 y_0 變小，亦即最高縱坐標反而降低。總之， α_4 對一般頻度曲線峯之高度並無普遍關係存在（上列各公式見第七至十章）。

第五章 動差的計算

第一節 基本公式

§ 5.11 縱坐標動差與面積動差 由前已知算術平均數，均方差，變差係數，偏差係數，峰差係數均藉動差 (MOMENTS, moments)，之計算而得，故動差之計算在頻度分析工作中佔據主要之地位，前已述及其基本計算方法，本章目的則在介紹其簡捷計算法，及有關問題，作一彙總之敘述。統計計算通常甚繁，故講求其計算儘量簡單省時省事而又不損害結果數字之精度，在統計實務上甚為重要。統計動差純為一種數字計算，除一二級動差尚可有物理意義外（力矩、轉動慣量），三級以上動差並無物理意義可言。在統計實務上只用前四級動差，但在理論上却用到前八級動差。

統計動差有乘方動差，階級動差及絕對動差之分，此外尚有累差。今僅述乘方動差一種，餘均不常用。

不連續分配及連續分配任意變數 X' 對 $X'=0$ 之第 n 級動差以 V_n 表之，其通式為

$$V_n = \sum X_i'^n p_i, \quad \text{及} \quad V_n = \int_a^b X'^n f(X') dX' \quad \text{----- (5.1)}$$

式中 p_i 代表頻率以小數表示， a, b 為分配之上下限， V 為希臘字母，讀如 nu，在物理意義上，上式表明各力 p_i ，或 $f(X') dX'$ ($i=1, 2, 3, \dots, m$)，各以 X_i' 為力臂（對軸線之垂直距離）並以 $X'=0$ 為軸線之第 n 級力矩之和，即力共力臂 n 次方之乘積之和。各力 p_i 在統計上代表各頻率，各力臂 X_i' 代表變數的各數值。

数理統計的作圖方法常以縱坐標代表頻度或力，以橫坐標代表變數或力臂設 X_i' 代表橫軸上之各孤立點或各孤立觀測值， p_i 為此等孤立點上所立之各孤立縱綫或縱坐標由此產生之動差常稱為「縱坐標動差」。設 X_i' 值為只為第 i 組內各數值之代表值。全組數值佔橫軸之一段距離，而頻率 p_i 或 $f(X') dX'$ ($= y dX'$) 代表在此組段上所作之矩形面積

為組距 $\Delta x' (= h)$ 或 dx' 與頻率密度 $f(x')$ ($= y$) 之乘積，由此產生之動差常稱為「面積動差」。

但除積分式只表現理論（連續）分配之面積動差外，由於觀測資料均為不連續分配（不管其變數在理論上是否連續）其動差均為有限差式，均為 x_i^n 與 p_i 相乘積之總和，均以 Σ 符號表示，如 x_i' 代表組距數列的各組組中值，且 p_i 代表各組距內頻率，則為面積動差；如 x_i 代表各孤立的觀測值， p_i 為此孤立值之出現頻率，則為縱坐標動差。

由此可知，由實際觀測資料計算動差時，如由未分組資料（各 p_i 均相等，故 p_i 可約去）計算，或雖分組但僅為重複變數值之合併，並無組距時，則得縱坐標動差；由已分組的有組距的資料計算時，則得面積動差。面積動差有分組誤差，縱坐標動差則無之。

§ 5.12 定點動差 由於力矩軸線（縱線）在橫軸上的位置不同，便產方動差（無論為縱坐標動差或面積動差）又分為定點動差，零點動差與中心動差三種：

設平常之變數值或觀測值均以 X 計算，其原點為 $X = 0$ 且變數 x' 與變數 X 間有函數關係為 $x' = X - X_0$ ， X_0 為任意定點，於是上列 V_n 在 X 軸上之力矩軸線變為 $X = X_0$ ，對 X 軸而言，由此產生之動差（力矩）特稱為「對任意定點之動差」，簡稱為「定點動差」，第 n 級定點動差在觀測分配時為：

$$V_n = \sum x_i'^n p_i = \sum (X_i - X_0)^n p_i = \frac{1}{N} \sum (X_i - X_0)^n f_i$$

在理論分配時 $V = \int_a^b x'^n f(x') dx' = \int_a^b (X - X_0)^n f(X) dX$

----- (5.2)

令 $n = 0, 1, 2, 3, 4$ ，則得對定點之零級、一級、二級、三級、四級動差，分別如下式（只寫出觀測動差，理論動差仿此，下同）：

$$\left. \begin{aligned}
 V_0 &= \sum x_i' p_i = \frac{1}{N} \sum (X_i - X_0)^0 f_i = \sum p_i = \frac{1}{N} \sum f_i \\
 V_1 &= \sum x_i' p_i = \frac{1}{N} \sum (X_i - X_0) f_i \quad (x_i' = X_i - X_0) \\
 V_2 &= \sum x_i'^2 p_i = \frac{1}{N} \sum (X_i - X_0)^2 f_i \quad (p_i = f_i / N) \\
 V_3 &= \sum x_i'^3 p_i = \frac{1}{N} \sum (X_i - X_0)^3 f_i \quad \left(\begin{array}{l} \text{總和} \sum \text{包括} \\ \text{全部觀測值} \end{array} \right) \\
 V_4 &= \sum x_i'^4 p_i = \frac{1}{N} \sum (X_i - X_0)^4 f_i
 \end{aligned} \right\} \text{---(5.3)}$$

X_0 所以稱為「任意定點」，乃因其數值可由人任意^{自由}決定，但既決定後，即作為常數看待，在通篇計算過程中，不能中途更動，又常簡稱為「定點」（ $X - X_0$ ）或 x' 可視為原變數 X 改以 X_0 為原點移軸後之新變數，稱為「定點離差」。

第零級動差恒等於 1，代表頻度分配曲線全面積或總和頻率即

$$V_0 = 1 \text{ --- (5.4)}$$

對定點 X_0 之第一級動差為以定點 X_0 為原點之新變數 x' 之算術平均數 $\bar{x}'$ 。若還原於舊原點，則得原變數之算術平均數 $\bar{X}$ ，即

$$\bar{X} = X_0 + V_1 = X_0 + \bar{x}' \text{ --- (5.5)}$$

§ 5.13 零點動差 若定點 $X_0 = 0$ ，則 $x' = X$ ，定點 X_0 即為原變數 X 之原點或平常觀測值之零點，於是對定點之動差變為「對零點之動差」，簡稱「零點動差」，另以字母 M 表之，第 n 級之零點動差為：

$$\left. \begin{aligned}
 \text{在觀測分配時 } M_n &= \sum X_i^n p_i = \frac{1}{N} \sum X_i^n f_i \\
 \text{在理論分配時 } M_n &= \int_a^b X^n f(X) dX
 \end{aligned} \right\} \text{--- (5.6)}$$

第零級、一級、二級、三級、四級之零點動差分別為

$$\left. \begin{aligned}
 M_0 &= \sum X^0 p_i = \sum p_i = \frac{1}{N} \sum f_i = 1, \\
 M_1 &= \sum X_i p_i = \frac{1}{N} \sum X_i f_i \text{ 即 } M_1 = \bar{X} \\
 M_2 &= \sum X_i^2 p_i, \quad M_3 = \sum X_i^3 p_i, \\
 M_4 &= \sum X_i^4 p_i.
 \end{aligned} \right\} \text{--- (5.7)}$$

算術平均數為一級零點動差，其餘各級零點動差除在理論上有時應用外，對觀測分配不常使用，以其使計算數字增大。

§ 5.14 中心動差 (對算數平均數的動差) 若定點 $X_0 = \bar{X}$ ，則 $x = X - \bar{X} = x$ ，對定點之動差變為對算術平均數之動差 (中心動差)，對定點之動差變為對算術平均數之動差，又以算術平均數為分配中心，可簡稱為「中心動差」，另以希臘字母 μ (讀如 mu) 表之。第 n 級中心動差為：

$$\left. \begin{aligned} \text{在觀測分配時 } \mu_n &= \sum x_i^n p_i = \frac{1}{N} (\bar{X}_i - \bar{X})^n f_i \\ \text{在理論分配時 } \mu_n &= \int_a^b (X - \bar{X})^n f(X) dX \end{aligned} \right\} \text{-----}(5.8)$$

第零級、一級、二級、三級、四級中心動差分別為：

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 &= \sum p_i = \frac{1}{N} \sum f_i = 1, (x_i = X_i - \bar{X}) \\ \mu_1 &= \sum x_i p_i = \frac{1}{N} \sum (X - \bar{X}) f_i = 0 \\ \mu_2 &= \sum x_i^2 p_i = \frac{1}{N} \sum (X_i - \bar{X})^2 f_i = \sigma^2 \\ \mu_3 &= \sum x_i^3 p_i = \frac{1}{N} \sum (X_i - \bar{X})^3 f_i \\ \mu_4 &= \sum x_i^4 p_i = \frac{1}{N} \sum (X_i - \bar{X})^4 f_i \end{aligned} \right\} \text{-----}(5.9)$$

中心動差在統計上最為重要，通常，求定點動差或零點動差之目的，僅作為計算中心動差之過渡步驟，但由上知零點動差及中心動差均為定點動差分別當定點 $X_0 = 0$ 及當 $X_0 = \bar{X}$ 時之特例如單稱動差，即專指中心動差而言。

第一級中心動差恒為零，第二級中心動差為均方差平方 (或稱變差)。

§ 5.15 中心動差與定點動差或零點動差之關係 以公式 (5.5) 關係代入中心動差公式並有二項定理展開之得：

$$\begin{aligned} \mu_n &= \sum \{ (X_i - \bar{X})^n p_i \} = \sum \{ [(X_i' - (X_0 + V_1))]^n p_i \} \\ &= \sum \{ [(X_i - X_0) - V_1]^n p_i \} = \sum \{ (x_i' - V_1)^n p_i \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum (x_i^n p_i) - n \sum (x_i^{n-1} p_i) V_1 + \frac{n(n-1)}{2!} \sum (x_i^{n-2} p_i) V_1^2 \\
 &\quad - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \sum (x_i^{n-3} p_i) V_1^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \sum (x_i^{n-4} p_i) V_1^4 \\
 &\quad - \dots \\
 &= V_n - n V_{n-1} V_1 + \frac{n(n-1)}{2!} V_{n-2} V_1^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} V_{n-3} V_1^3 \\
 &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} V_{n-4} V_1^4 - \dots \quad \text{----- (5.10)}
 \end{aligned}$$

式中 V_1 為常數，故可拿出 $\sum$ 符號之外，上式為中心動差與定點動差之關係通式，如令 $n=1, 2, 3, 4$ ，並知 $V_0=1$ 於是

$$\left. \begin{aligned}
 \mu_1 &= V_1 - V_1 = 0 \\
 \mu_2 &= V_2 - V_1^2 \\
 \mu_3 &= V_3 - 3 V_2 V_1 + 2 V_1^3 \\
 \mu_4 &= V_4 - 4 V_3 V_1 + 6 V_2 V_1^2 - 3 V_1^4
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 \mu_1 &= M_1 - M_1 = 0, \quad (M_1 = \bar{X}) \\
 \mu_2 &= M_2 - \bar{X}^2 \\
 \mu_3 &= M_3 - 3 M_2 \bar{X} + 2 \bar{X}^3 \\
 \mu_4 &= M_4 - 4 M_3 \bar{X} + 6 M_2 \bar{X}^2 - 3 \bar{X}^4
 \end{aligned} \quad \text{--- (5.11)}$$

式中 $V_1 = \bar{X}'$ ，當 $X_0 = 0$ 時， $X' = X - X_0 = X$ ， V_n 變為 M_n ， V_1 變為 M_1 或 $\bar{X}$ ，如上列右邊各式，為中心動差與零點動差之關係。實際計算時以使用左邊為簡便，右式為左式之特例。

當 $X_0 = \bar{X}$ 時， $X' = X - X_0$ 變為 $X = X - \bar{X}$ ，則 $V_1 = \mu_1 = 0$ ，於是等號右邊各項，除第一項外，餘均為零。此時 $V_n = \mu_n$ ，但若 $X_0 \neq \bar{X}$ ，雖二者極為相近，例如當 $\bar{X}$ 帶有不盡小数而取其前數位作為 $\bar{X}$ 之近似值，而實為 X_0 ，或取鄰近任一整數值作為 X_0 時，則 $V_1 \neq \mu_1$ ，或 $V_1 \neq 0$ ，等號右邊除第一項外，其餘各項不為零，而表示以 X_0 代 $\bar{X}$ 時，使 V_n 代 μ_n 造成之誤差之校正項，是以由 V_n 間接計算 μ_n ，不但較為簡便，且精度亦較高，故 V_n 與 μ_n 關係式極為重要。

§ 5.16 組單位動差 若動差先除以組距後再求動差，則稱為「組單位動差」，即以組距為單位之動差，亦分為組單位定點動差及組單位中心動差，分別以 V_n' 及 μ_n' 表

之為：

$$V'_n = \frac{1}{N} \sum \left(\frac{X_i - X_0}{h} \right)^n f_i = \frac{1}{N} \sum u_i^n f_i$$

式中 $u_i = \frac{(X_i - X_0)}{h}$ 為組單位定點偏差，
 $h =$ 組距

$$\mu'_n = \frac{1}{N} \sum \left(\frac{X_i - \bar{X}}{h} \right)^n f_i = \frac{1}{h^n} \cdot \frac{1}{N} \sum (X_i - \bar{X})^n f_i \quad \frac{1}{h^n} \mu_n \quad (5.12)$$

μ'_n 通常並不直接計算，而均由 V'_n 間接算之，其關係通有公式 (5.11) 由組單位動差計算之目的乃使數字簡化，並利用下列簡單關係還原為原單位動差：

$$V_n = h^n V'_n, \quad \mu_n = h^n \mu'_n \quad (5.13)$$

為清楚起見，將關係式重寫如下：

$$\left\{ \begin{aligned} \mu_2 &= h^2 \mu'_2 = h^2 (V'_2 - V_1'^2) \\ \mu_3 &= h^3 \mu'_3 = h^3 (V'_3 - 3V'_2 V'_1 + 2V_1'^3) \\ \mu_4 &= h^4 \mu'_4 = h^4 (V'_4 - 4V'_3 V'_1 + 6V'_2 V_1'^2 - 3V_1'^4) \end{aligned} \right. \quad (5.14)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \text{且 } \bar{X} &= X_0 + V_1' = X_0 + h V_1' \\ \sigma &= \sqrt{\mu_2} = h \sqrt{V'_2 - V_1'^2} \\ C_5 &= \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\mu'_3}{\sigma'^3}, \quad C_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{\mu'_4}{\mu_2'^2} - 3 \end{aligned} \right.$$

式中 $\sigma' = \sqrt{V'_2 - V_1'^2}$ 為組單位均方差，且 $\sigma = h \sigma'$

由等距數列計算各級動差及各參數值時，以使用上式為最便，算例見下節。

§ 5.17 標準值及標準動差 由於各項觀測值（原變數）之數值大小，與其所取原點位置（尤其無天然零點時，如水位、溫度），單位大小（如水位可以公尺計，亦可以公分計），及變異程度（變幅、均方差）有關，在不同數列間不便比較，為消除此三種影響並化為同一天度起見，各數值均改以其算術平均數為原點，並以其均方差除之（因