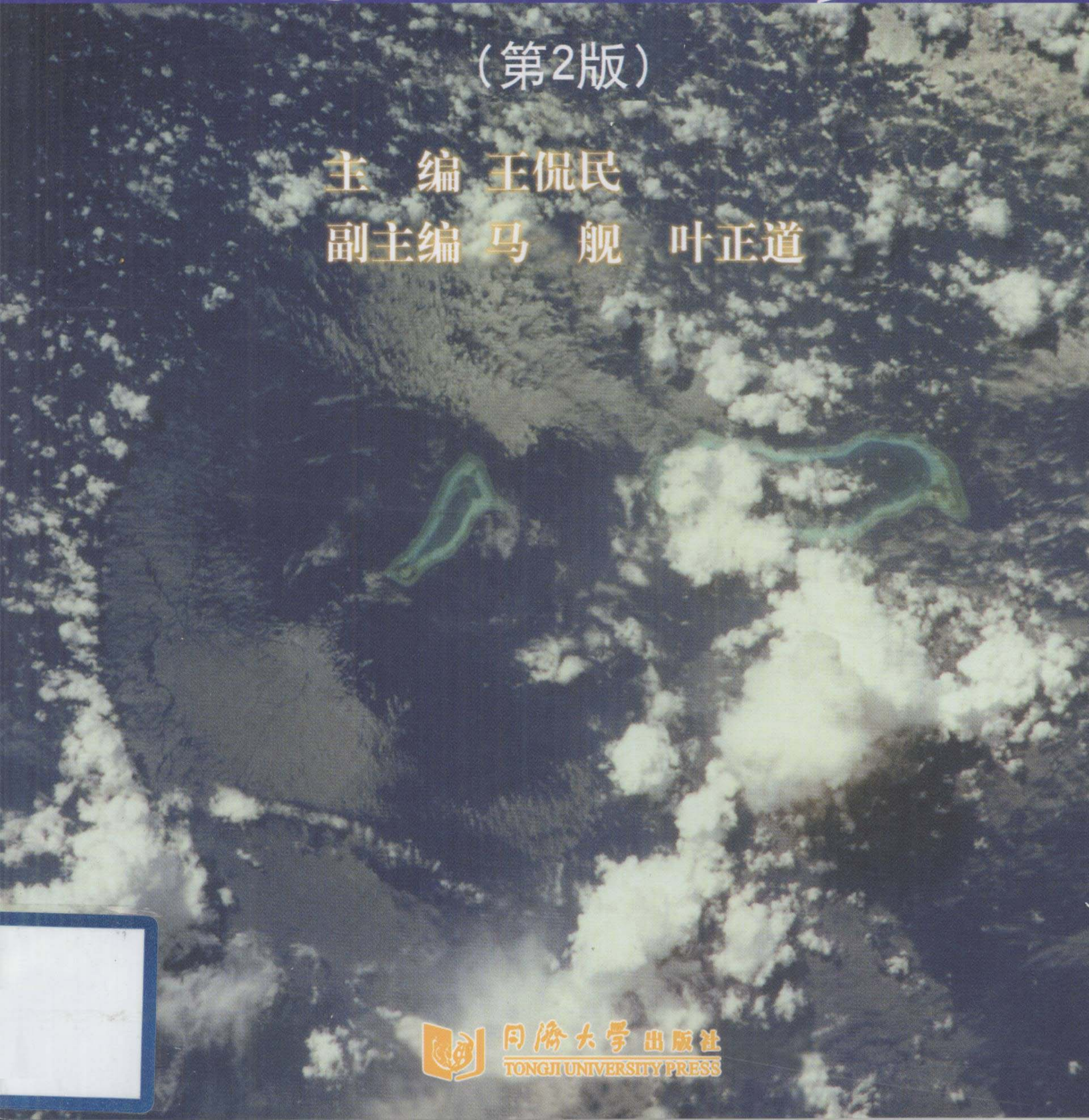
新世纪高级应用型人才培养系列教材
A Practical Textbook Series for the New Century

线性代数

（第2版）

主　编 王侃民
副主编 马　舰　叶正道



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

新世纪高级应用型人才培养系列教材

A Practical Textbook Series for the New Century

线性代数

（第 2 版）

主　编　王侃民

副主编　马　舰　叶正道

同济大学出版社

TONGJI UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/王侃民主编. —2 版. —上海:同济大学出版社,
2010.1
(新世纪高级应用型人才培养系列教材)
ISBN 978-7-5608-4229-5

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—
教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 003729 号

新世纪高级应用型人才培养系列教材

线性代数(第 2 版)

主　编　王侃民　　副主编　马　舰　叶正道

责任编辑　卞玉清　　责任校对　徐春莲　　装帧设计　陈益平

出版发行　同济大学出版社　　www.tongjipress.com.cn
（地址：上海市四平路 1239 号　邮编：200092　电话：021-65985622）
经　　销　全国各地新华书店
印　　刷　同济大学印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　11
印　　数　1—6000
字　　数　220000
版　　次　2010 年 1 月第 2 版　　2010 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5608-4229-5

定　　价　19.00 元

再版前言

教材改革作为我国高等院校教学改革的重要方面，正在不断地深入，本书正是在这一形势下，遵循《工科类本科数学基础课教学基本要求》的要求，考虑经济学类后继课程的需要，使之能够适应更多的学校和专业对“线性代数”这门基础课程的具体教学要求而编写的.

目前，随着我国经济建设的发展，许多高等院校以培养应用型科学技术人才为主要目标. 针对这一具体情形，本书的编写原则是：在教学内容的深度和广度方面达到教育部高等学校“线性代数”课程教学的基本要求，注重线性代数概念的直观性引入，加强学生应用能力的培养，力求做到易教、易学. 本书的编写力图做到以下几点：

(1) 概念的引入直观. 以问题或通俗简单的实例引入概念，避免线性代数概念的抽象性. 在引入例如 n 阶行列式、矩阵、向量组的线性相关等这些概念时，均以解线性方程组为切入点，尤其在引入比较抽象的概念时，更是如此. 例如，向量组线性相关与线性无关的概念是用齐次线性方程组是否有非零解来引入的，向量组的线性表示是用非齐次线性方程组有解引入的，使学生感到直观、明了，易于理解和接受.

(2) 在内容、结构等方面作了精心编排，以适应目前“线性代数”课程教学内容多、学时少的特点. 本书以解线性方程组为主线，除概念的引入用线性方程组外，在定理的证明上力争使用解线性方程组的方法. 由于这一思想，我们没有将线性相关、线性相关性等概念、定理单独列为一章，而是融入在线性方程组这一章，从而使对线性相关性的讨论变得相对更加容易. 本书也较早地引入了矩阵的秩和初等变换的概念，使得教学难点分散，易于学生的学习和掌握，也显示了矩阵方法的简洁与精巧性.

本书包括行列式、矩阵、线性方程组、相似矩阵及二次型等内容；习题分为(A)和(B)两类，(A)类为计算、证明题，(B)类为选择填空题.

本书自 2005 年初版以来，累计发行量达 5 万余册，被全国数十所高校师生所采用，在此深表谢意. 由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，希望专家、同行与广大读者批评指正.

编　者

2010 年 1 月

《新世纪高级应用型人才培养系列教材》

总编委会

目　　录

第一章　行列式 …… (1)
第一节　二阶、三阶行列式 …… (1)
一、二阶行列式 …… (1)
二、三阶行列式 …… (3)
第二节　排列与逆序 …… (6)
一、排列的逆序数 …… (6)
二、逆序数的性质 …… (6)
第三节　n 阶行列式的定义 …… (7)
第四节　行列式的性质 …… (12)
第五节　行列式按行(列)展开 …… (18)
第六节　克莱姆法则 …… (25)
习题一 …… (29)

第二章　矩阵 …… (38)
第一节　矩阵的概念 …… (38)
第二节　矩阵的运算 …… (40)
一、矩阵的加法和数与矩阵的乘法 …… (40)
二、矩阵的乘法 …… (43)
三、矩阵的转置 …… (49)
四、方阵的幂 …… (50)
第三节　几种特殊的矩阵 …… (50)
一、对角矩阵 …… (50)
二、数量矩阵 …… (51)
三、单位矩阵 …… (52)
四、三角形矩阵 …… (52)
五、对称矩阵 …… (53)
第四节　逆矩阵 …… (53)
第五节　矩阵的初等变换 …… (57)
第六节　矩阵的秩 …… (65)
第七节　矩阵的分块 …… (68)
习题二 …… (74)

第三章　线性方程组 …………………………………………………… (81)
第一节　线性方程组的消元解法 ……………………………………… (81)
第二节　n 维向量空间 ……………………………………………… (91)
第三节　向量组的线性相关性 ………………………………………… (94)
一、线性组合………………………………………………………… (94)
二、线性相关与线性无关 …………………………………………… (96)
三、向量组线性相关性的定理 ……………………………………… (100)
四、向量组的秩 ……………………………………………………… (103)
五、向量空间的基与维数 …………………………………………… (107)
第四节　线性方程组解的结构………………………………………… (108)
一、齐次线性方程组解的结构 ……………………………………… (109)
二、非齐次线性方程组解的结构 …………………………………… (114)
习题三………………………………………………………………… (117)

第四章　相似矩阵及二次型………………………………………… (123)
第一节　二次型与对称矩阵…………………………………………… (123)
第二节　向量组的正交规范化………………………………………… (128)
第三节　相似矩阵……………………………………………………… (135)
第四节　方阵的特征值与特征向量…………………………………… (137)
第五节　实对称矩阵的对角化………………………………………… (144)
第六节　化二次型为标准型…………………………………………… (150)
第七节　正定二次型…………………………………………………… (155)
习题四………………………………………………………………… (159)

习题答案…………………………………………………………… (163)

第一章　行列式

行列式是由解线性方程组产生的，它是一个重要的数学工具，在科学技术的各个领域内均有广泛的应用．本章先介绍二阶行列式和三阶行列式，并把它推广到 n 阶行列式，然后给出行列式的性质和计算方法，最后介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆法则．

第一节　二阶、三阶行列式

一、二阶行列式

在初等数学中，我们曾讨论过二元一次方程组和三元一次方程组的求解问题．

设二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，x_1, x_2 为未知量；$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 为未知量的系数；b_1, b_2 为常数项．我们用消元法分别消去 x_2, x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，求得解线性方程组(1.1)的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

为便于叙述和记忆，引入记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.3}$$

称式(1.3)中的 D 为二元一次方程组(1.1)的系数行列式. 数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式 D 的元素. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标,表明该元素位于第 i 行;第二个下标 j 称为列标,表明该元素位于第 j 列.

二阶行列式表示的代数和,可以用画线(图 1-1)的方法记忆,即实线连接的两个元素的乘积减去虚线连接的两个元素的乘积.

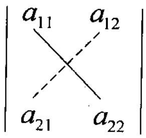


图 1-1

根据二阶行列式的定义,二元线性方程组(1.1)的解式(1.2)中的分子也可用二阶行列式来表示. 若记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

其中,$D_i(i=1,2)$ 表示把 D 中第 i 列换成式(1.1)右边的常数列所得到的行列式.

于是,当 $D\neq 0$ 时,二元线性方程组(1.1)的解表示为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{D_1}{D}, \\ x_2=\dfrac{D_2}{D}. \end{cases} \tag{1.4}$$

例 1

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=4\times 3-(-1)\times 2=14.$$

例 2

$$D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

问:(1) 当 λ 为何值时,$D=0$,

(2) 当 λ 为何值时,$D\neq 0$.

解

$$D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda,$$

$$\lambda^2-2\lambda=0,\text{则 } \lambda=0,\lambda=2.$$

因此,可得

(1) 当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=2$ 时,$D=0$,

(2) 当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq 2$ 时,$D\neq 0$.

例 3 解二元线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2=1, \\ 3x_1+x_2=0. \end{cases}$$

解 计算二阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-2\neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1, \quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=-3$$

因此

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{1}{2}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{3}{2}.$$

二、三阶行列式

设三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{1.5}$$

其中，x_1,x_2,x_3 为未知量；$a_{11},a_{12},a_{13},a_{21},a_{22},a_{23},a_{31},a_{32},a_{33}$ 为未知量的系数；b_1,b_2,b_3 为常数项. 我们用消元法消去 x_2,x_3，得

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1$$

$$=b_1a_{22}a_{33}+b_3a_{12}a_{23}+b_2a_{13}a_{32}-b_3a_{22}a_{13}-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{23}a_{32}$$

为方便起见，引入记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1.6}$$

称 D 为三阶行列式.

三阶行列式表示的代数和，可以用画线(图 1-2)的方法记忆，其中，各实线连接的三个元素的乘积是代数和中的正项，各虚线连接的三个元素的乘积是代数和中的负项.

称式(1.6)中的 D 为三元一次方程组(1.5)的系数行列式. 根据三阶行列式的定义，我们有

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=b_1a_{22}a_{33}+b_3a_{12}a_{23}+b_2a_{13}a_{32}-b_3a_{13}a_{22}-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{23}a_{32}$$

若 $D\neq 0$,得

$$x_1=\frac{D_1}{D}.$$

同理,可得

$$x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

其中

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

$D_i(i=1,2,3)$是把系数行列式 D 中的第 i 列去掉,换上线性方程组(1.5)的右边常数列所得到的行列式.

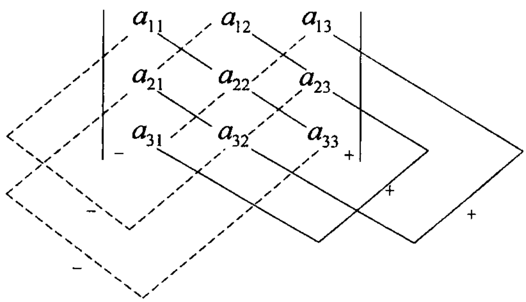


图 1-2

例 4 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}=1\times0\times6+2\times5\times(-1)+3\times4\times0$

$$-1\times5\times0-2\times4\times6-3\times0\times(-1)$$

$$=-10-48=-58.$$

例 5 a,b 满足什么条件时,有

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

解
$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=a^2+b^2.$$

若要 $a^2+b^2=0$，则 a 与 b 必须同时等于 0. 因此，当 $a=0$ 且 $b=0$ 时，给定的行列式等于 0.

例 6 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}>0$ 的充分必要条件是什么？

解 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}=a^2-1$. $a^2-1>0$ 等价于 $|a|>1$.

因此，$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}>0$ 的充分必要条件是 $|a|>1$.

例 7 解方程组

$$\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3=0, \\ 2x_1-x_2+2x_3=2, \\ x_1+x_2-x_3=1. \end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq 0, \quad D_1=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=1,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-12, \quad D_3=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-9.$$

所以有

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{1}{2}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}=6, \quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{9}{2}.$$

第二节　排列与逆序

用对角线法则计算行列式，虽然直观，但对于四阶及更高阶行列式，该方法就不适用了. 为了求四元及四元以上的线性方程组，需要把二、三阶行列式的概念推广. 下面先介绍排列与逆序的概念.

一、排列的逆序数

由数码 1,2,3,…,n 组成的一个 n 元有序数组，称为一个 n 级排列. 例如，1234 及 2431 都是 4 级排列，25413 是一个 5 级排列.

定义 1.1　**在一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中，如果较大的数 i_t 排在较小数 i_s 前面 ($i_s < i_t$)，则称 i_t 与 i_s 构成一个逆序. 一个 n 级排列中逆序的总数称为它的逆序数，记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$. 如果排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 是奇数，则称为奇排列，逆序数是偶数则称为偶排列.**

例如，排列 23154 中，2 在 1 前面，3 在 1 前面，5 在 4 前面，共有 3 个逆序，即 $N(23154)=3$. 所以，23154 是奇排列. 而排列 $123\cdots n$ 的逆序数是零，是偶排列.

例如，由 1,2,3 这 3 个数码组成的 3 级排列共有 $3!=6$ 种，其排列情况如表 1-1.

表 1-1

排列	逆序数	排列的奇偶性
123	0	偶排列
132	1	奇排列
213	1	奇排列
231	2	偶排列
312	2	偶排列
321	3	奇排列

在一个排列 $i_1 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$ 中，如果仅将它的两个数码 i_s 与 i_t 对调，得到另一个排列 $i_1 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$，这样的对换，记为对换 (i_s, i_t).

例如，对排列 21354 施以对换(1,4)后得到排列 24351.

二、逆序数的性质

定理 1.1　**任意一个排列经过一个对换后改变其奇偶性.**

证

(1) 对换相邻的两个数码的特殊情形,设排列为 $AijB$,其中,A,B 表示除 i,j 两个数码外其余的数码;经过对换 (i,j),变为 $AjiB$.

比较上面两个排列中的逆序,显然,A,B 中数码的次序没有改变,并且 i,j 与 A,B 中数码的次序也没有改变,仅仅改变了 i 与 j 的次序,因此,新排列仅仅比原排列增加了一个逆序(当 $i<j$ 时),或者减少了一个逆序(当 $i>j$ 时),所以它们的奇偶性不同.

(2) 在一般的情形,设排列为 $Aik_1k_2\cdots k_sjB$,经过对换 (i,j),变为排列 $Ajk_1k_2\cdots k_siB$. 新排列可以由原来的排列中将数码 i 依次与 $k_1,k_2,\cdots,k_s,j$ 作 $s+1$ 次相邻对换,变为 $Ak_1k_2\cdots k_sjiB$. 再将 j 依次与 $k_s,k_{s-1},\cdots,k_1$ 作 s 次相邻对换得到,即新排列可以由原来的排列经过 $2s+1$ 次相邻对换得到. 由(1)的结论可以知道这两个排列的奇偶性相反.

定理 1.2 n **个数码**($n>1$)**共有** $n!$ **个** n **级排列,其中奇、偶排列各占一半.**

证 n 级排列的总数为 $n!$,设其中奇排列为 p 个,偶排列为 q 个.

设想将每一个奇排列都施以相同的对换,例如,都用对换 $(1,2)$,则由定理 1.1可知,p 个奇排列全都变为偶排列,于是有 $p\leqslant q$;同理,如果将全部的偶排列也都施以同一变换,则 q 个偶排列全都变为奇排列,于是又有 $q\leqslant p$,所以得出 $p=q$,即奇、偶排列数相等,各为 $\frac{n!}{2}$ 个.

第三节　n 阶行列式的定义

为了把二、三阶行列式的概念推广到一般的 n 阶行列式,我们先来研究二、三阶行列式的结构.

二阶行列式和三阶行列式分别定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

可以看出:

(1) 二阶行列式表示所有不同的行不同的列的两个元素乘积的代数和. 两个元素的乘积可以表示为 $a_{1j_1}a_{2j_2}$,j_1j_2 为 2 级排列,当 j_1j_2 取遍了 2 级排列

(12,21)时,即得到二阶行列式的所有的项(不包含符号),共为 2! =2 项.

三阶行列式表示所有不同的行不同的列的三个元素乘积的代数和.三个元素的乘积可以表示为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$,$j_1j_2j_3$ 为 3 级排列,当 $j_1j_2j_3$ 取遍了 3 级排列(123,132,213,231,312,321)时,即得到三阶行列式的所有的项(不包含符号),共为 3! =6 项.

(2) 每一项的符号是,当这一项元素的行标按自然数顺序排列后,如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号,是奇排列则取负号.在上述二阶行列式中,当 $N(j_1j_2)$ 为偶数时取正号,为奇数时取负号.在上述三阶行列式中,当 $N(j_1j_2j_3)$ 为偶数时取正号,为奇数时取负号.

因此,二阶行列式可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1j_2)} a_{1j_1}a_{2j_2}.$$

$\sum$ 表示对 1,2 两个数的所有二级排列 j_1j_2 求和.

三阶行列式可写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

$\sum$ 表示对 1,2,3 三个数的所有三级排列 $j_1j_2j_3$ 求和.

根据这个规律,可给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.2 **用 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式.其中横排称为行,纵排称为列.它表示所有可能取自不同的行不同的列的 n 个元素乘积的代数和,各项的符号是:当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后,如果对应的列标构成的排列是偶排列取正号,是奇排列则取负号.因此,n 阶行列式所表示的代数和中的一般项可以写为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.7}$$

其中,$j_1j_2\cdots j_n$ 构成一个 n 级排列,当 $j_1j_2\cdots j_n$ 取遍所有 n 级排列时,则得到 n 阶行列式的代数和中所有的项.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}. \qquad (1.8)$$

其中，$\sum$ 表示对所有的 n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和.

一阶行列式 $|a|$ 就是 a. 行列式有时简单记为 $|a_{ij}|$，注意不要与绝对值记号混淆.

由定理 1.2 可以知道：n 阶行列式共有 $n!$ 项，并且冠以正号的项和冠以负号的项（不算元素本身所代的负号）各占一半.

例如，四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

所表示的代数和中共有 $4!=24$ 项.

例如，$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 行标排列为 1234，元素取自不同的行；列标排列为 1234，元素取自不同的列，并且逆序数 $N(1234)=0$，即元素乘积 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 前面应冠以正号，所以 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 为 D 中的一项.

再例如，$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 行标排列为 1234，元素取自不同的行；列标排列为 4312，元素取自不同的列，且逆序数 $N(4312)=5$，即 4312 为奇排列，所以元素乘积 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 前面应冠以负号，即 $-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 为 D 中的一项. 而 $a_{11}a_{24}a_{33}a_{24}$ 有两个元素取自第四列，所以它不是 D 中的项.

例 8 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值，其中，$a_{ii}\neq 0 (i=1,2,\cdots,n)$.

解：记行列式的一般项为

$$(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

D 中有很多项为零，现在考察有哪些项不为零. 一般项中第一个元素 a_{1j_1} 取自第一行，但第一行中只有 a_{11} 不为零，因而 $j_1=1$，即 D 中只有含 a_{11} 的那些项可能不为零，其他项都为零；一般项中第二个元素 a_{2j_2} 取自第二行，第二行中有 a_{21} 和 a_{22} 不为零，因为第一个元素已经取自第一列，因此，第二个元素不能再取自第一列，即不能取 a_{21}，所以，第二个元素只能取 a_{22}，从而 $j_2=2$，即 D 中只有含 $a_{11}a_{22}$ 的那些项可能不为零，其他项都为零；这样推下去，可得 $j_3=3, j_4=4, \cdots, j_n=n$. 因此，即 D 中只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项不为零，其他项都为零. 由于 $N(12\cdots n)=0$，因此，这一项应取正号，于是可得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

我们称上面形式的行列式为下三角行列式.

同理可得上三角行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特殊情况：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

我们称上面形式的行列式为对角形行列式.

行列式中从左上角到右下角的对角线称为主对角线. 由上面的例子我们得到三角形行列式及对角形行列式的值均等于主对角上元素的乘积.

由行列式的定义不难看出：一个行列式若有一行（或者一列）中的元素都为