

高等学校教材

Mechanical Behavior  
of Materials

材料力学行为

杨王玥 强文江 等编



化学工业出版社

高等学校教材

Mechanical Behavior  
of Materials

材料力学行为

杨玉明 强文江 等编



化学工业出版社

·北京·

本书主要讨论材料在各种条件下的变形与断裂行为。依据材料的力学行为遵循弹性变形—塑性变形—断裂的变化过程，将宏观性能与组织结构变化联系起来，除了金属材料以外，还对聚合物、陶瓷以及复合材料的力学行为作了一定的补充。既从力学角度，也从材料学角度对材料力学行为进行研究。第1章主要阐述了材料的弹性变形。第2, 4, 5~7, 9章描述了材料在不同条件下表现出的变形和断裂行为，它们分别为室温下静载（第2章）、温度与加载速率的影响（第4章）、载荷大小与方向随时间变化的影响（第5章）、高温下的行为（第6章）、环境介质与载荷的联合作用（第7章）、纤维增强复合材料的力学行为（第9章）等。第3章介绍了断裂力学与断裂韧性的初步知识，引入了金属、陶瓷材料及聚合物的韧化方法。第8章为金属材料的强化。

本书可作为高等学校金属材料工程、材料成形与控制工程、冶金工程、机械设计等专业的教材。

### 图书在版编目 (CIP) 数据

材料力学行为/杨玉玥, 强文江等编. —北京: 化学工业出版社, 2009.9  
高等学校教材  
ISBN 978-7-122-06458-5

I. 材… II. ①杨…②强… III. 材料力学-高等学校-教材 IV. TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 135316 号

---

责任编辑: 陶艳玲  
责任校对: 陈 静

装帧设计: 张 辉

---

出版发行: 化学工业出版社 (北京市东城区青年湖南街 13 号 邮政编码 100011)  
印 装: 化学工业出版社印刷厂  
787mm×1092mm 1/16 印张 16 字数 398 千字 2009 年 8 月北京第 1 版第 1 次印刷

---

购书咨询: 010-64518888(传真: 010-64519686) 售后服务: 010-64518899

网 址: <http://www.cip.com.cn>

凡购买本书, 如有缺损质量问题, 本社销售中心负责调换。

---

定 价: 32.00 元

版权所有 违者必究

# 前 言

材料是人类社会物质文明的基础，被称作现代社会文明的四大支柱之一。具备特殊的性能或者优异的综合性能是所有工程材料的共性特征。因此，材料性能是从事材料的研究、生产和应用的科学研究与工程技术人员共同关心的内容。

依据材料的性能表现——也就是受到外界因素作用时发生的状态变化属于物理范围还是化学范围，将材料的性能划分为物理性能和化学性能两大类。从所使用材料的数量看，工程材料的绝大部分都是在承受载荷作用，称作结构材料；与之相对的是所谓的功能材料，主要利用它们在电、磁、光、热、声等方面的一些特殊物理性能。由于工程上结构材料数量多，暴露的问题非常多，相关的研究工作细致，而其实际意义重大，有关材料承受应力作用时表现出来的性能——材料的力学性能，或者称作机械性能，从材料的物理性能中单独分离出来。这样，材料的性能通常划分为化学性能、物理性能和力学性能。

从研究角度看，材料性能可以简单地归结为材料在一定外界条件下，对于外部作用的响应。其中的外界条件是指使材料状态发生变化的作用因素，分为主要作用因素和环境因素。其中的主要作用因素包括应力、温度、磁场、电场、化学介质、辐照等一种或者一种以上的联合作用，而环境因素则是指环境温度与介质。所谓的状态变化，包括形状、表观等各种各样关系到材料使用需求的性质。

材料性能的突出特点为其涵盖面的广泛性。这样，处理材料性能问题时，掌握一定的方法，能够举一反三，从而能够快速掌握某种新的材料性能，是很重要的。推荐给读者的基本处理方法包括以下四个互相关联的方面。

① 认识现象——主要弄清楚所讨论的材料性能的作用因素和发生的变化类型；

② 了解规律——知晓状态变化与作用因素之间关系的主要规律，其中许多是大量实验和工程实践总结的结果，对于安全、经济地使用材料具有非常重要的意义；

③ 揭示本质或机理——从材料的微观角度分析材料在作用因素影响下发生状态变化的过程；这一点对于材料的生产和研究人员至关重要，因为基于对本质或机理的分析，再综合有关材料学科的基础知识，就可以得出有关性能的影响因素；

④ 掌握控制与改进方法——借助于材料性能的宏观规律性和微观本质给出的影响因素，结合材料制备、微观组织结构的控制方法的知识，就可以对材料的性能进行控制和改进工作，选取合理的成分，制定适当的工艺制度，得到性能合格的材料。

材料的力学性能是指材料构件在一定环境条件下，承受载荷或应力作用时状态的变化，应用材料设计制造材料构件的技术人员习惯上将其称为机械性能。

根据这样的定义，力学性能的作用因素是载荷或应力，所发生的状态变化总体上有三种基本类型，即弹性变形（elastic deformation）、塑性变形（plastic deformation）和断裂（fracture or rupture），此外，还涉及表面磨损磨蚀等材料构件表面状态的变化，尤其是这种变化导致的失效与破坏，例如滚珠表面磨损造成的损坏。讨论材料的力学性能时，通常需要给出材料受力作用发生上述形状变化时的环境条件，主要包括材料所处的环境温度以及可能存在的特殊介质，因为它们对于材料发生的变化可能会有显著的影响。有时，材料受力作

用时发生的变形或断裂，受应力作用时间的显著影响，表现出强烈的时间相关性（time dependence）。

简而言之，力学性能就是材料在给定环境条件下承受应力作用时发生弹性变形、塑性变形或者断裂的行为。受到应力状态与方式、作用因素的组合、环境条件及时间影响，材料的变形-断裂过程，包含着庞杂繁多的具体内容，其原因可简单概括总结如下。

首先，载荷或者应力的作用方式，会显著影响材料的变形与断裂过程。从施加载荷作用的速率角度出发，保持恒定或者变化非常缓慢的静态载荷与高速变化的动态载荷的作用效果不同。因此，在静载性能之外，还有高速冲击载荷下的冲击韧性以及交变载荷下的疲劳问题。应力状态也显著影响材料的变形和断裂行为；弹性变形与应力之间关系（胡克定律），对于正应力和切应力形式不同，杨氏弹性与切变弹性模量也存在显著差别；单向应力与多向应力作用下，塑性变形的屈服条件不同。同为正应力，许多材料在拉伸和压缩时，应力造成的变形-断裂过程显著不同，等等。其次，力学性能中还包括应力与腐蚀性介质联合作用下金属材料的应力腐蚀破坏问题。温度、介质等环境条件以及时间可能带来的影响，无疑使得材料承受应力作用时的变形与断裂问题变化更加复杂化。

材料的力学性能，因为结构材料的大量工程应用而具有非常重要的实际意义。工程应用对于结构材料的要求中，基本的要求包括刚度、强度、断裂安全。所谓的刚度要求是指材料构件在实际应用中所限定的载荷作用范围内，其弹性变形量不得超过某个限定数值；强度要求是指材料构件在限定上限的载荷作用下能够避免发生永久性的塑性变形；而断裂安全性要求是指材料构件在实际应用中的载荷作用下不得在某个局部或者整体发生断裂。此外，工程材料构件的实际使用要求，还可能有耐磨性等。为此，使用材料制造结构构件时需要相应地进行刚度、强度、断裂设计。良好的设计，应当是在保证材料构件的安全可靠性的前提下，尽量减轻构件的重量，节省材料，最大限度地发挥材料的承载能力。全面、准确了解材料的力学性能以及不同材料的性能特点，是在工程上合理选择材料、正确使用材料的基础。

本教材的读者对象是材料专业的本科生。作为材料专业人才，不仅要面对材料的应用问题，还要面对材料的生产和研究。因此，本教材力图从材料性能的宏观规律和微观机理两方面出发，总结归纳材料性能的影响因素以及控制方法。其中，非常注重介绍材料的力学性能与其成分与结构、微观组织之间的关系，从而为材料的生产制备合理选择合金成分、生产及制备工艺提供依据，希望由此为从事材料制备以及新材料的研发工作的人员从实用性和处理问题的思想方法两个方面提供帮助。由于读者对象初步涉足结构材料问题，本书比较侧重材料受力作用时发生变形与断裂的微观机理，对于各类材料力学性能的水平及相对高低等不做强过多强调。因此，本书冠名为材料力学行为。

材料的力学行为处于结构材料研究、生产和材料应用之间，因此，往往涉及这两边的相关知识。就结构材料的工程应用来说，其基础知识广泛地涉及力学知识，帮助我们了解材料结构在外部载荷作用下的内部应力、变形的分布情况，《工程力学》、《材料力学》、《弹性力学》及《弹塑性力学》或《塑性力学》等课程的一些力学知识成为本课程的相关基础知识。在材料的生产研究方面，相关的知识则包括材料的结构、相变、晶体缺陷、微观组织演变与控制等材料方面的专业基础知识，基础的先期课程是《金属学原理》或者《材料科学基础》。另外，材料的力学性能还必然以典型的结构材料及其应用为背景，并且与材料制备与加工方法方面的专业知识相结合，最终达到控制材料的力学性能、满足实际需要的目的。因此，有关结构材料、材料制备与生产方法等方面的知识，与本课程内容联系起来，可以互相促进，帮助读者全面理解材料学科的整体内涵。

本教材是作者结合多年来从事与力学行为相关的教学体验以及在结构材料组织控制与力学行为关系及性能优化领域研究的基础上撰写而成的。书中引入了作者在材料的组织控制与力学行为关系领域已公开发表的一些研究成果。

依据材料的力学行为遵循弹性变形-塑性变形-断裂的变化过程，主要讨论材料在各种条件下的变形与断裂行为。将宏观性能与组织结构变化联系起来，除了金属材料以外，还对聚合物、陶瓷以及复合材料的力学行为作了一定的补充。既从力学角度，也从材料学角度对材料力学行为进行研究。例如在断裂研究中，有断裂力学，也有断裂物理；既给出了含裂纹体材料的断裂判据，也从断裂的微观过程讨论了材料的韧化机制，提出了韧化途径。

本书第1章主要阐述了材料的弹性变形。第2、4、5、6、7、9章描述了材料在不同条件下表现出的变形和断裂行为，它们分别为室温下静载（第2章）、温度与加载速率的影响（第4章）、载荷大小与方向随时间变化的影响（第5章）、高温下的行为（第6章）、环境介质与载荷的联合作用（第7章）、纤维增强复合材料的力学行为（第9章）。第3章介绍了断裂力学与断裂韧性的初步知识，引入了金属、陶瓷材料及聚合物的韧化方法。第8章为金属材料的强化。

本教材的另一特点是有很强的兼容性，可适合于不同类型的课程使用。教师可根据专业设置的具体情况选用部分或全部内容。

参加本书编写工作的有强文江（第1、5、8章）、郑磊（第6章）、叶荣昌（第7章）、杨王玥（第2、3、4、6、9章）。全书由杨王玥、强文江统稿并审定。

因水平所限，教材中难免有不妥之处，恳请读者批评指正。

作者  
2009年7月

<b>第 1 章 材料的弹性与滞弹性</b> .....	1
1.1 受力与变形的表述方法 .....	1
1.1.1 受力状态的表述 .....	1
1.1.2 变形的表述 .....	3
1.2 材料的弹性概述 .....	4
1.2.1 材料的弹性变形与塑性变形 .....	4
1.2.2 材料的弹性类型 .....	5
1.2.3 工程材料的弹性特点 .....	6
1.3 材料的弹性变形规律 .....	7
1.3.1 线弹性应力-应变关系——胡克定律 .....	7
1.3.2 晶体的弹性各向异性与广义胡克定律 .....	8
1.4 线弹性材料的弹性常数 .....	10
1.4.1 各向同性材料的弹性常数 .....	10
1.4.2 晶体的弹性常数及其各向异性 .....	10
1.5 线弹性变形的机理与影响因素 .....	13
1.5.1 材料弹性的结合键机制 .....	14
1.5.2 材料在键合机制下的弹性模量与相关因素 .....	15
1.6 高分子材料的弹性与影响因素 .....	17
1.6.1 高分子材料的弹性变形 .....	17
1.6.2 原子结合键机制的弹性变形 .....	18
1.6.3 构象熵机制的弹性变形 .....	19
1.6.4 高弹体弹性的变形规律及影响因素 .....	20
1.7 材料的刚度与异常弹性 .....	22
1.7.1 材料的刚度与比模量 .....	22
1.7.2 材料的弹性反常 .....	22
1.8 材料的滞弹性 .....	24
1.8.1 滞弹性的标准线性固体模型 .....	25
1.8.2 标准线性固体的应力松弛与弹性后效 .....	26
1.8.3 一般情况下的应力-应变关系 .....	28
1.8.4 模量的频率特性及模量亏损 .....	29
1.9 材料的内耗 .....	31
1.9.1 内耗性能指标 .....	32
1.9.2 标准线性固体的内耗特性 .....	33
1.9.3 斯诺克 (Snoek) 内耗峰及其微观机理 .....	34
1.9.4 斯诺克内耗峰的影响因素及应用 .....	35
1.9.5 其他弛豫型内耗 .....	37

1.9.6 静态滞后型内耗 .....	39
<b>第2章 工程材料在静载下的力学行为</b> .....	<b>42</b>
2.1 金属在静拉伸条件下的力学行为 .....	42
2.1.1 拉伸试验 .....	42
2.1.2 单向拉伸时的工程应力、应变与真应力、真应变 .....	43
2.1.3 单晶体金属材料拉伸过程的变形行为 .....	45
2.1.4 多晶塑性材料拉伸过程中工程应力应变曲线的一般形状 .....	49
2.1.5 力学参数测定 .....	50
2.1.6 材料的屈服 .....	53
2.1.7 均匀塑性变形阶段的 Hollomon 公式 .....	55
2.1.8 静拉伸条件下的颈缩现象与颈缩判据 .....	57
2.1.9 静拉伸条件下的断裂 .....	57
2.2 陶瓷试验 .....	59
2.3 聚合物的变形 .....	60
2.4 应力状态对材料力学行为的影响 .....	60
2.4.1 应力状态软性系数 $\alpha$ .....	61
2.4.2 联合强度理论 .....	62
2.5 应力集中与缺口效应 .....	66
2.5.1 孔的应力集中 .....	67
2.5.2 缺口效应 .....	68
2.5.3 缺口拉伸实验 .....	70
2.5.4 缺口效应与拉伸试样颈缩部位应力分布 .....	71
2.6 其他静载试验方法 .....	71
2.6.1 压缩试验 .....	71
2.6.2 弯曲试验 .....	71
2.6.3 扭转试验 .....	72
2.6.4 硬度试验 .....	72
<b>第3章 断裂与断裂韧性</b> .....	<b>74</b>
3.1 断裂的分类方法 .....	75
3.1.1 按载荷、环境、温度进行分类 .....	76
3.1.2 根据断裂前塑性变形 .....	76
3.1.3 根据断裂面的取向 .....	76
3.1.4 根据裂纹扩展的途径 .....	77
3.1.5 根据断裂机制 .....	77
3.2 裂纹形核与扩展的物理模型 .....	82
3.2.1 微裂纹形核的位错模型 .....	82
3.2.2 裂纹扩展模型 .....	83
3.3 理论断裂强度 .....	84
3.3.1 理论断裂强度 .....	84
3.3.2 实际金属材料的脆断强度 .....	85



3.4 Griffith 脆断理论 .....	85
3.4.1 Griffith 脆断理论 .....	85
3.4.2 Griffith 裂纹模型及判据 .....	85
3.4.3 对一些断裂现象的解释 .....	86
3.4.4 对 Griffith 脆断理论的评价 .....	87
3.5 Griffith 方程的修正及裂纹扩张力 $G$ .....	88
3.5.1 修改后的 Griffith 方程 .....	88
3.5.2 裂纹扩张力 $G$ 的导出及 $G$ 判据 .....	88
3.5.3 $G$ 判据与 $G_c$ 的测定 .....	89
3.6 应力强度因子 $K$ 及断裂韧性 $K_{Ic}$ .....	89
3.6.1 线弹性断裂力学中规定的三类裂纹 .....	90
3.6.2 应力强度因子 $K$ .....	90
3.6.3 $K$ 判据 (应力强度因子断裂判据), 断裂韧性及其测定 .....	94
3.6.4 $K_I$ 及 $\sigma_1$ , $K_{Ic}$ 及 $\sigma_s$ .....	96
3.6.5 应力强度因子 $K$ 及裂纹扩张力 $G$ .....	96
3.7 I 型裂纹尖端的塑性区及其应力强度因子的修正 .....	97
3.7.1 屈服判据及裂纹前沿应力分布 .....	97
3.7.2 小范围屈服裂纹前沿塑性区 .....	99
3.7.3 应力松弛对塑性区的影响 .....	99
3.7.4 应力强度因子 $K_I$ 的塑性修正—— $K_I$ , $K_{Ic}$ 理论应用范围——小范围屈服 .....	101
3.8 断裂韧性原理在工程上的应用 .....	103
3.9 断裂韧性 $K_{Ic}$ 与材料的韧化 .....	105
3.9.1 断裂韧性与断裂过程 .....	105
3.9.2 材料的韧化 .....	106
<b>第 4 章 材料的脆性断裂和韧-脆转变 .....</b>	<b>114</b>
4.1 脆性断裂与材料的韧-脆转变 .....	114
4.1.1 脆性断裂问题 .....	114
4.1.2 材料韧-脆转变的影响因素 .....	115
4.2 冲击载荷作用下金属变形与断裂的特点 .....	117
4.2.1 冲击载荷的特征 .....	118
4.2.2 冲击载荷下金属材料的变形与断裂 .....	118
4.3 一次冲击试验与系列冲击试验 .....	119
4.3.1 一次冲击试验 .....	120
4.3.2 系列冲击试验 .....	121
4.3.3 冲击试验的工程应用 .....	123
4.4 多次重复冲击试验 .....	125
<b>第 5 章 材料的疲劳行为 .....</b>	<b>127</b>
5.1 金属与高分子材料的机械疲劳规律 .....	128
5.1.1 疲劳行为中作用应力的描述 .....	128
5.1.2 疲劳曲线与疲劳极限 .....	129

5.1.3	金属材料疲劳的经验规律	130
5.2	金属材料机械疲劳的机理	132
5.2.1	金属材料疲劳裂纹萌生机理	132
5.2.2	金属材料疲劳裂纹扩展	134
5.2.3	金属疲劳宏观断口形貌	138
5.3	金属的机械疲劳性能与组织结构因素的关系	139
5.3.1	疲劳极限与疲劳裂纹形核寿命的影响因素	140
5.3.2	疲劳裂纹扩展的影响因素	141
5.3.3	疲劳裂纹的扩展速率与寿命评估	143
5.3.4	提高金属高周疲劳性能的特别措施	143
5.3.5	提高低周疲劳寿命的措施	145
5.4	金属机械疲劳性能的其他影响因素	146
5.4.1	循环应力参量影响与疲劳图	146
5.4.2	帕姆格林-米勒(Palmgren-Miner)疲劳损伤累积假说	148
5.4.3	循环应力频率的影响	149
5.4.4	应力状态的影响	150
5.4.5	疲劳特性的统计特征	151
5.4.6	几何因素对金属疲劳性能的影响	151
5.4.7	内禀疲劳与外延疲劳	153
5.5	金属材料的其他疲劳问题	154
5.5.1	接触疲劳	154
5.5.2	金属材料的热疲劳	156
<b>第6章</b>	<b>材料的高温强度与强化</b>	<b>158</b>
6.1	材料在高温环境下力学行为的特点	158
6.2	金属和陶瓷的蠕变现象和规律	159
6.3	蠕变变形和断裂机理	161
6.3.1	热激活与蠕变变形	161
6.3.2	蠕变变形机理	162
6.3.3	蠕变断裂机理	166
6.4	蠕变变形过程中的组织结构变化	168
6.5	工程蠕变数据的表示方法及长期性能的预测	169
6.5.1	蠕变极限	169
6.5.2	持久强度极限	170
6.5.3	长期寿命预测	172
6.6	应力松弛	173
6.7	金属高温力学行为的影响因素与强化	174
6.8	超塑性	176
6.8.1	金属超塑变形行为的特征	176
6.8.2	金属超塑性机理	177
6.8.3	结构陶瓷超塑性	180

<b>第7章 材料在介质与应力共同作用下的行为</b>	181
7.1 应力腐蚀断裂	181
7.1.1 应力腐蚀断裂的特征	181
7.1.2 应力腐蚀断裂的机理	184
7.1.3 应力腐蚀断裂的评定指标	185
7.1.4 应力腐蚀断裂的预防措施	187
7.2 氢脆	188
7.2.1 氢脆的分类	188
7.2.2 可逆氢脆	189
7.3 腐蚀疲劳断裂	193
7.3.1 腐蚀疲劳断裂的特点	193
7.3.2 腐蚀疲劳断口的形貌特征	194
7.3.3 腐蚀疲劳断裂的影响因素	194
7.3.4 腐蚀疲劳断裂的机理	195
7.3.5 腐蚀疲劳裂纹的扩展规律	195
7.3.6 腐蚀疲劳断裂的防护措施	196
<b>第8章 金属材料的屈服强度与强化</b>	197
8.1 概述	197
8.2 晶体材料中位错滑移的阻力	199
8.2.1 晶体中位错的基本性质	199
8.2.2 位错的晶格阻力及与材料塑性的关系	200
8.2.3 位错滑移的其他阻力与强化	202
8.3 点钉扎	203
8.3.1 点钉扎的强化效果	203
8.3.2 非均匀分布钉扎点的强化效果	204
8.4 金属材料中的固溶强化	205
8.4.1 对称畸变的固溶强化	207
8.4.2 非对称畸变的固溶强化及与对称畸变固溶强化效果的比较	208
8.4.3 固溶原子与位错的化学交互作用及其强化	210
8.4.4 固溶原子的弹性模量差与位错的交互作用及其强化	210
8.4.5 金属材料的应变时效现象	211
8.5 第二相强化	212
8.5.1 金属材料中的第二相粒子特性	213
8.5.2 位错切割粒子机制下的强化效果	214
8.5.3 共格粒子的应力场的强化效果	216
8.5.4 奥罗万(Orowan)绕过机制下的强化效果	216
8.5.5 金属材料时效过程分析	217
8.6 加工硬化与晶界强化	218
8.6.1 加工硬化	219
8.6.2 晶界强化	219

<b>第 9 章 纤维增强复合材料及其力学行为</b> .....	222
9.1 纤维强化机理 .....	224
9.2 纤维材料的特性 .....	227
9.3 基体材料的特性 .....	228
9.4 界面特性及作用 .....	229
9.5 实际的复合材料体系 .....	230
9.5.1 金属基复合材料 .....	231
9.5.2 聚合物基复合材料 .....	231
9.5.3 陶瓷基复合材料 .....	232
9.5.4 碳-碳复合材料 .....	233
9.6 定向纤维复合材料力学行为预测 .....	233
9.6.1 纤维直径、体积分数以及复合材料密度的估算 .....	233
9.6.2 弹性模量和强度的估算 .....	233
9.6.3 复合材料的断裂模式及断裂的能量吸收机制 .....	237
9.6.4 复合材料的疲劳特性 .....	240
<b>参考文献</b> .....	243

# 第1章

## 材料的弹性与滞弹性

### 1.1 受力与变形的表述方法

材料的力学行为描述的是材料受力作用下的变形与断裂问题。因此，对于材料受力和变形的描述是基础。其中，考虑到多向应力状态下的变形问题，特别是如果比较深入细致地处理晶体材料的各向异性问题的需要，采用了应力、应变的张量表达形式，同时介绍了应力、应变的坐标转换方法。

#### 1.1.1 受力状态的表述

材料构件的宏观受力情况往往首先表现为外部载荷  $P$ 。借助于力学知识，就可以得到材料构件各点的应力矢量  $F$ ，再按照应力的张量表达方式，由应力矢量得到材料内各点的应力张量。至此，得到了材料构件受力状态的完整表达。

所谓的应力矢量  $F$ ，是将一个截面上的总体载荷  $P$  除以承载面积而得到的单位面积上承受的载荷。这样，消除了承载面面积的影响，提高了可比性。

讨论材料力学性能，需要比较载荷或者应力作用下的变形情况。从变形效果看，必须区分正应力与切应力，因此，需要将承载面上的应力矢量  $F$  分解。习惯上分解到三个互相垂直的方向上，其中一个为正应力，另两个为切应力分量。其中的两个切应力分量按照矢量加合法则合成为承载面上的最大切应力。

宏观载荷保持不变的情况下，一个点上不同方向的承载面上的受力情况不同。作为受力状态的表达方法，应力张量表达方式能够方便地给出任何承载面上的应力值。

应力张量是在建立一个直角坐标系后，取立方体（各面的法向与各坐标轴平行，并以该法向的坐标轴来标示该面），按下面定义得到各面上的应力分量

$$\sigma_{ij} = \frac{dP_{ij}}{dA_i} \quad (1-1)$$

式中，脚标  $i$  和  $j$  对应于三个坐标轴，可以分别独立地取 1、2 和 3。三个  $P_{ij}$  为第  $x_i$  面上的载荷  $P$  在第  $x_j$  轴方向上的分量， $A_i$  为  $x_i$  面的面积。将上述各应力分量集中在一起，并且记做  $3 \times 3$  阶矩阵的形式，就构成了一点受力状态的应力张量  $\sigma$ <sup>①</sup>，即

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (1-2)$$

式中， $i = j$  的  $\sigma_{ij}$  为正应力，其余  $\sigma_{ij}$  为切应力，如图 1-1 所示。物体受力平衡

① 应力张量和应变张量是 2 阶张量。标量是 0 阶张量，矢量是 1 阶张量。

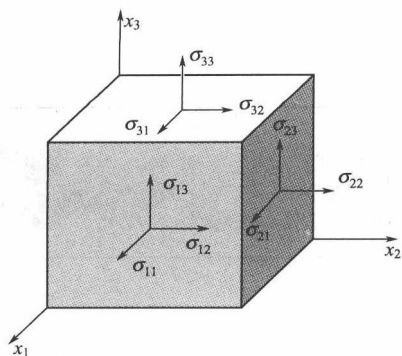


图 1-1 受力状态的应力张量表达图

时,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ 。

由应力张量给出的受力状态, 对于一点的受力情况进行了完全的描述。故此, 其中包含着该点上任意法向的承载面上的各应力分量。假设在给定的直角坐标系中, 承载面法向的单位方向矢量为

$$\mathbf{n}^0 = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3) \quad (1-3)$$

式中,  $\alpha_i$  为法向与坐标轴  $x_i$  之间的夹角。那么, 该承载面上的应力矢量为

$$\mathbf{F} = \mathbf{n}^0 \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (1-4)$$

承载面上的正应力为

$$\sigma_n = \mathbf{n}^0 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^{0(T)} \quad (1-5)$$

而假设切应力分量方向上的单位矢量为

$$\mathbf{n}_1^0 = (\cos\beta_1, \cos\beta_2, \cos\beta_3) \quad (1-6)$$

式中,  $\beta_i$  为切向与坐标轴  $x_i$  之间的夹角。那么, 法向  $\mathbf{n}^0$  的承载面上  $\mathbf{n}_1^0$  方向上的切应力为

$$\tau_{n1} = \mathbf{n}^0 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_1^{0(T)} \quad (1-7)$$

上面式 (1-4)、式(1-5)、式(1-7) 均按照矩阵乘法进行运算, 其中单位方向矢量的上角标 (T) 表示转置矩阵。

需要从应力张量中得出该点上的应力主值和最大切应力时, 由应力张量构建如下的行列式, 并且令其等于零, 即

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (1-8)$$

该方程的三个实根  $\lambda$  就是三个主平面上的应力主值  $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$  和  $\sigma_3$ 。按照习惯要从大到小排列, 即  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 。而材料中该点上的最大切应力为

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (1-9)$$

处理实际问题时, 有时需要将一点的应力状态在两个不同的坐标系中同时表达出来。此时, 就产生了应力张量的坐标系转换问题。这种应力张量的坐标转换规则如下。一点的某种应力状态, 在第一个坐标系  $(x_1, x_2, x_3)$  中的应力张量表达式为

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

将其在另一个坐标系  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  中进行表达, 则新的应力张量与原来的  $\boldsymbol{\sigma}$  的关系为

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{pmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{31} & \sigma'_{32} & \sigma'_{33} \end{pmatrix} = \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{L}^{(T)} \quad (1-10)$$

其中,  $\mathbf{L}$  为两个坐标系之间的转换矩阵, 上角标 (T) 表示  $\mathbf{L}$  的转置矩阵。 $\mathbf{L}$  的具体形式为

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \cos\gamma_{11} & \cos\gamma_{12} & \cos\gamma_{13} \\ \cos\gamma_{21} & \cos\gamma_{22} & \cos\gamma_{23} \\ \cos\gamma_{31} & \cos\gamma_{32} & \cos\gamma_{33} \end{pmatrix} \quad (1-11)$$

式中,  $\gamma_{ij}$  为  $x_i$  轴与  $x_j$  轴之间的夹角。

### 1.1.2 变形的表述

当物体受拉伸应力作用时, 在外力方向上伸长, 可以观察到绝对伸长量  $\Delta l$ 。为了比较变形的难易程度, 需要消除受力物体自身原始长度  $l_0$  的影响, 为此, 采用相对变形量, 也就是正应变  $\epsilon$  来描述变形。工程正应变的定义为

$$\epsilon = \Delta l / l_0 \quad (1-12)$$

综合考虑正应力和切应力作用产生的变形效果, 在与描述受力状态的同一个直角坐标系中, 将物体中一点上受力作用前后发生的位移矢量  $\mathbf{u}$  分解到各坐标轴上, 在利用各位移分量在该点处的变化速率采用下面的定义给出应变的各个分量

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1-13)$$

式中,  $u_i$  为材料中一点受力作用发生的位移在第  $x_i$  轴方向上的分量。将各分量集合起来, 得到应变张量

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (1-14)$$

式中,  $i=j$  时,  $\epsilon_{ij}$  为正应变, 其余为切应变分量。

正应变为正应力作用下长度的相对伸缩量, 有工程应变  $\epsilon$  与真应变  $e$  之分。其中工程应变为受力作用时的长度变化量与原始长度的比值, 见式(1-12)。真应变则将长度的微小变化量与即时的长度之比定义为正应变的微小增量, 即

$$de = \frac{dl}{l} \quad (1-15a)$$

而将其进行积分处理得到真应变, 显然有

$$e = \ln \frac{l}{l_0} = \ln(1 + \epsilon) \quad (1-15b)$$

这里, 我们看到真应变与工程应变之间存在着简单的换算关系。如果应变很小时, 真应变与工程应变之间的差别很小, 可以认为两者相等。比如, 金属或者陶瓷材料在弹性变形阶段的变形量就没有必要区别真应变和工程应变。但是, 如果讨论金属材料的塑性变形或者变形能力很强的高分子材料, 就必须明确所采用的应变的种类。从两种正应变的定义出发, 读者可以自己验证真应变具有可加和性, 也就是说: 一个物体分多个阶段进行累进式变形, 总的真应变等于各个阶段的真应变之和。但是, 采用工程应变表达时, 这样关系是不成立的。

应变张量中的切应变分量  $\epsilon_{ij}$  ( $i \neq j$ ) 等于对应的工程切应变  $\gamma_{ij}$  的一半, 而后者为原来成直角的两条直线之间夹角的变化量的余切。即

$$\gamma_{xy} = \epsilon_{12} + \epsilon_{21} = 2\epsilon_{12} \quad (1-16)$$

物体的变形可以分解为长度的改变 (导致体积变化) 和纯粹的形状改变 (体积保持恒定)。相应地, 应变张量可分解为应变的水静分量和应变偏量, 即

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon_0 & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \varepsilon_0 & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \varepsilon_0 \end{pmatrix} \quad (1-17)$$

该式右侧的水静分量部分只包含正应变分量，表达的是物体的纯相对伸缩，故此对应于体积变化，没有形状的扭曲。而正应变分量之和为零的应变偏量部分，对应于纯切应变部分，不产生体积变化。比如，塑性变形过程忽略其中的弹性变形部分时，其应变张量就只有这一部分。

变形过程中的体积变化率与应变张量的关系是

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 3\varepsilon_0 \quad (1-18)$$

处理实际问题时，有时同样面临着将描述一点应变状态的应力张量在两个不同的坐标系中进行转换的问题。这种应变张量的坐标转换规则类似于应力张量的坐标转换。如果一点的某种应变状态，在第一个坐标系  $(x_1, x_2, x_3)$  中的应变张量为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

那么，它在新坐标系  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  中对应的应变张量为

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \begin{pmatrix} \varepsilon'_{11} & \varepsilon'_{12} & \varepsilon'_{13} \\ \varepsilon'_{21} & \varepsilon'_{22} & \varepsilon'_{23} \\ \varepsilon'_{31} & \varepsilon'_{32} & \varepsilon'_{33} \end{pmatrix} = \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{L}^{(T)} \quad (1-19)$$

式中， $\mathbf{L}$  为两个坐标系之间的转换矩阵，具体形式见式(1-11)。

## 1.2 材料的弹性概述

在实际使用中，大量的固体材料构件都要承受载荷或者应力的作用，相应都会发生变形。这种变形有两种类型：当应力比较低时，材料只发生弹性变形；如果作用应力超过了材料的屈服强度，材料还会发生塑性变形。作为材料对于应力作用的一种基本响应，其弹性变形及其规律性是材料力学性质的一项基本内容。材料在受力发生弹性变形的过程中所表现出来的弹性性质，在一些场合下，对于材料的应用也具有重要的实际意义。

### 1.2.1 材料的弹性变形与塑性变形

材料承受应力作用时发生几何形状和/或者长度的变化，这就是变形 (deformation)。如果材料在应力作用下发生变形，在应力去除后变形完全消失，即能够完全恢复原来的形状和尺寸，这种变形就是弹性变形 (elastic deformation)。材料具有发生弹性变形的性质，称为材料的弹性 (elasticity)。固体材料在适当的条件下都会表现出弹性，而液体和气体不具备普通意义上的弹性。

只要承受了作用应力，固体材料无例外地都立即发生弹性变形。因此，对于材料施加应力作用时，总是首先观察到它发生弹性变形。当作用应力较低时，往往能观察到材料只发生弹性变形而不发生塑性变形。将应力作用下材料只发生弹性变形的情况，称为材料处于弹性变形阶段。



一般情况下, 承受应力作用时, 材料还会发生与弹性变形不同的另一类变形, 即所谓的塑性变形 (plastic deformation)。不过, 只有当作用应力达到一定数值时材料才开始发生塑性变形。塑性变形是作用应力去除后残留下来的永久性变形, 又称范性变形。一般情况下, 已经开始塑性变形的材料, 特别是具有良好塑性的金属材料中, 塑性变形量较大, 相对而言弹性变形量要小得多, 故此一般将这一阶段称为塑性变形阶段。需要注意: 在塑性变形阶段, 只要作用应力未去除掉, 材料仍然发生弹性变形。

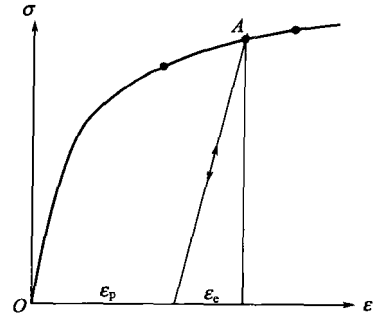


图 1-2 某种金属材料的应力-应变关系曲线

图 1-2 中给出了某种金属材料受力作用时的应力-应变 ( $\sigma$ - $\epsilon$ ) 关系曲线。其中包含着弹性变形和塑性变形两个阶段的应力与应变的关系。在图 1-2 所示的应力-应变曲线中, 在较高应力下, 材料不仅发生弹性变形, 还有塑性变形。此时, 总变形量等于弹性变形量与塑性变形量之和。通过卸载, 可以将塑性变形量与弹性变形量区别开来。在图 1-2 中, 从 A 点开始, 与低应力区纯弹性变形阶段的直线平行并且以双向箭头标识的直线, 就表示了这样的中途卸载-再加载时的应力-应变关系。其中, 处于 A 点状态下, 材料的弹性变形量就是图中以  $\epsilon_e$  表示的部分, 它随着应力的作用产生, 又随着应力的去除而消失; 而在 A 点的应力-应变状态下, 材料的塑性变形量为图中的  $\epsilon_p$ , 它就是材料从 A 点中途卸载后残留下来的永久性变形。

## 1.2.2 材料的弹性类型

首先从应力-应变关系曲线的类型看, 纵观各类材料在弹性变形阶段表现出来的应力-弹性应变关系, 可以将它们的弹性变形行为分成线弹性和非线性弹性两类。这两类弹性行为的应力-应变关系如图 1-3 所示。所谓的线弹性 (linear elasticity), 是指材料发生弹性变形过程中弹性应变与所承受的应力成线性比例关系; 与此相对的是材料的非线性弹性 (non-linear elasticity), 其特点是弹性变形量与作用应力之间呈非线性关系。

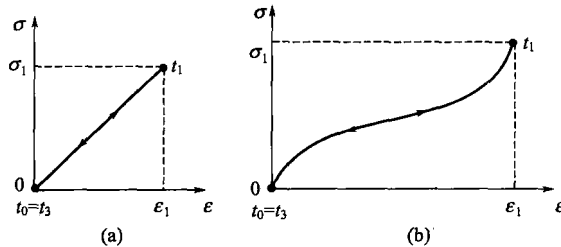


图 1-3 不同类型的弹性变形应力-应变关系曲线  
(a) 线弹性应力-应变曲线; (b) 非线性弹性应力-应变曲线

再从应力作用下发生弹性变形的时间特点看, 不同材料所表现出来的弹性也有所差别。一般情况下, 多数材料承受应力作用时发生弹性变形的过程中, 加载和卸载时发生的弹性变形几乎是在瞬间完成的, 观察不到时间对于应力-应变关系的影响。保持作用应力在某个恒定值下不变, 材料的弹性变形量也是恒定不变的。图 1-4 中示意性地给出了理想弹性情况下应力-时间及相应的应变-时间关系曲线。材料的弹性变形量  $\epsilon_e$  与应力之间为单值函数关系,