21世纪高等学校研究生教材

数学学科硕士研究生系列教材

复分析

FU FEN XI

北京师范大学数学科学学院 组 编

邓冠铁/编 著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

21世纪高等学校研究生教材

数学学科硕士研究生系列教材

复分析

北京师范大学数学科学学院　组　编

邓冠铁／编　著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP) 数据

复分析／邓冠铁编著.—北京：北京师范大学出版社，2010.3
(21世纪高等学校研究生教材)
ISBN 978-7-303-10755-1

Ⅰ.复… Ⅱ.邓… Ⅲ.复分析－研究生－教材
Ⅳ.O174.5

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第007660号

营销中心电话　010-58802181 58808006
北师大出版社高等教育分社网　http://gaojiao.bnup.com.cn
电子信箱　beishida168@126.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街19号
邮政编码：100875
印　刷：北京京师印务有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：170 mm × 230 mm
印　张：16
字　数：259千字
版　次：2010年3月第1版
印　次：2010年3月第1次印刷
定　价：24.00元

策划编辑：岳昌庆　王松浦　　责任编辑：岳昌庆　柯思宇
美术编辑：高　霞　　装帧设计：高　霞
责任校对：李　菡　　责任印制：李　丽

前 言

研究生教材建设是研究生培养工作的重要环节，是研究生教学改革措施之一，也是衡量学校研究生教学水平和特色的重要依据. 纵观我院的研究生教育，可分为几个阶段：1953~1960 年是我院研究生教育初创时期，招生为代数、分析、几何等方向的 10 个研究生班；1962~1965 年改为招收少量的硕士研究生；1966~1976 年“文化大革命”时期，研究生停止招生. 1978 年，我院恢复招收硕士研究生，研究生所学课程除外语和自然辩证法公共课程外，主要学习几门专业课. 每年导师根据招生情况，分别制订每个研究生的培养计划. 从 1982 年开始, 首次开展制定攻读硕士学位研究生培养方案的工作. 为拓宽研究生的知识面, 对每届研究生开设 5 门专业基础理论课：泛函分析、抽象代数、实分析、复分析、微分流形，每人至少选 3 门；从 1983 年起, 增加代数拓扑，共 6 门基础理论课, 安排有经验的教师讲课且相对固定, 考试要求严格, 使研究生受到正规的训练. 由于不同院校开设的本科生课程有一定的差距, 经过这个阶段的学习后, 基本上达到了一个相同的水平, 为从本科生到研究生基础水平过渡提供了保障. 在 1992 年修订教学计划时, 增加了概率论基础和计算机基础. 这样，基础理论课共开设 8 门. 从 1997 学年开始，规定研究生每人至少选 4 门. 从 2000 年开始，改为开设 12 门基础课，增加现代分析基础、偏微分方程、李群、随机过程. 经过三十多年系统的研究生培养工作，研究生教育正在逐步走向正规. 在此期间，学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了比较丰富的培养经验，将这些经验落实并贯彻到研究生教材编著中去是大有益处的.

随着研究生的扩招，招收研究生的数量越来越大. 再加上培养方案的改革，出版研究生系列教材已经提到议事日程上来. 在 20 世纪 90 年代，北京师范大学出版社已经出版了几部基础课教材:《泛函分析》《实分析》《随机过程通论》等，但未系统策划出版系列教材. 2005 年 5 月，由北京师范大学数学科学学院李仲来教授和北京师范大学出版社理科编辑部王松浦主任进行了沟通和协商，由北京师范大学数学科学学院组编 (李仲来负责)，准备对北京师范大学数学科学学院教师目前使用的北京师范大学出版社出版的几部教材进行修订后再版，进一步计划用几年时间，出版数学一级学科硕士研究生的基础课程系列教材.

我们希望使用这些教材的校内外专家学者和广大读者，提出宝贵的修改意见，使其不断改进和完善.

本套教材可供高等院校数学一级学科硕士研究生和课程与教学论 (数学) 等硕士研究生使用和参考.(李仲来执笔)

北京师范大学数学科学学院
2009-04-20

编著者的话

“复分析”是北京师范大学数学科学学院 2000 年硕士研究生培养方案中列入的学位基础课程之一. 在 2007 年 6 月由北京师范大学研究生院组织的研究生培养方案的修订工作中, 根据一些专家教授的建议, 在原“复分析”课程的内容中补充 20 世纪 70 年代以来在复分析领域中取得的某些重要进展, 列为北京师范大学数学科学学院硕士研究生的学位基础课程.

2000 年以来, 编著者为北京师范大学数学科学学院的六届硕士研究生讲授了该门课程. 在教学中我们曾选用了美国著名数学家 W. Rudin 的名著《Real and Complex Analysis 》([26]), M. Andersson 著的《Topics in Complex Analysis 》([14)] 和张南岳、陈怀惠著的《复变函数论选讲》([3]) 作为该课程的主要参考书. 本书是在编著者的“复分析”讲义之上, 参考了国内外一些重要专著和文献后修改补充编写而成的. 全书共分六章. 第一章中介绍的知识在复分析中是最基本且十分重要的, 它们的应用也始终贯穿于全书之中. 第二章主要介绍正规族, Riemann 映射定理和保形映射. 第三章介绍解析函数的零点. 第四章介绍了调和函数和次调和函数的基本内容和一些重要性质. 第五章介绍 H^p 空间和全纯 Fourier 变换以及它们之间的联系. 在最后一章我们介绍了有理函数一致逼近的部分内容. 本书在内容选取中注重现代复分析中基本思想、基本理论和基本方法的讲解, 同时也注意介绍某些研究前沿问题和最新研究进展. 凡已具备“实变函数”“复变函数”及“泛函分析”等大学本科课程知识的读者, 学习本课程没有太大的困难.

本课程是北京师范大学研究生院 2005~2006 年建设的硕士研究生双语课程之一. 本书是北京师范大学数学科学学院 2005~2008 年建设的硕士研究生基础课程系列教材之一. 作者非常感谢北京师范大学研究生院和数学科学学院在本课程讲授和本书编写过程中所给予的支持, 感谢北京师范大学数学科学学院的老师和研究生在试用本书原稿过程中, 提出的非常有价值的意见, 特别是高志强老师, 柯思宇博士和李真博士仔细地校对和指正了本书原稿中的一些错误, 编者在此向他们表示最诚挚的谢意. 此外, 编者也十分感谢北京师范大学出版社为本书的编辑出版所做的大量工作. 限于本人学识水平, 本书中还难免存在错误和不妥之处, 恳请专家和读者不吝赐教指正.

编著者　(denggt@bnu.edu.cn)

2009 年 12 月

目 录

第一章　解析函数基本知识

§1.1　预备知识

除了需要用到复变函数论中的基础知识外, 还需要用到微积分, Lebesgue 积分理论以及泛函分析中的一些知识, 这些知识比较基础, 为了方便, 我们把它们叙述出来, 有些还给出证明.

定义 1.1.1 (实可微的定义) 设 f 是从开集 Ω 到 $\mathbb{C}$ 中的函数, $a \in \Omega$, 如果

$$f(a+z) = f(a) + Df|_a(z) + o(|z|) \quad (z \to 0), \tag{1.1.1}$$

其中 $Df|_a(z) = Ax + By, z = x + iy$, A, B 是仅与 a 有关的常数, 则称 f 在 a 处实可微, 其中 A 记为 $\frac{\partial f}{\partial x}|_a$, B 记为 $\frac{\partial f}{\partial y}|_a$. 如果在 a 的一个邻域 $D(a,r)$ 内, $f \in C^1(D(a,r))$, 则 (1.1.1) 成立, 从而 f 在 a 处实可微.

命题 1.1.2 (试验函数的存在性定理) 对任意紧集 $K \subset \Omega$, 存在 $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, 使得 ϕ 在 K 的一个邻域内等于 1, 并且 $0 \leqslant \phi \leqslant 1$.

证明 设 $\varepsilon > 0$, 在 $\mathbb{R}$ 上定义函数 $f_{0,\varepsilon}(t)$ 如下: 当 $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ 时, 令 $f_{0,\varepsilon}(t) = \exp\{-(t+\epsilon)^{-2} - (t-\varepsilon)^{-2}\}$, 而当 $t \notin (-\varepsilon, \varepsilon)$ 时, 令 $f_{0,\varepsilon}(t) = 0$, 则函数 $f_{0,\varepsilon}(t)$ 是一个 $C^\infty(\mathbb{R})$ 函数, 它在 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 内为正, 在其他处为 0. 令 $f_{1,\varepsilon}(t) = \int_0^{2t} f_{0,\varepsilon}(s-\varepsilon)ds$, 则函数 $f_{2,\varepsilon}(t) = \frac{f_{1,\varepsilon}(t)}{f_{1,\varepsilon}(\varepsilon)}$ 是一个 $C^\infty(\mathbb{R})$ 函数, 它在 $(0,\varepsilon)$ 内单调上升为正, 当 $t \leqslant 0$ 时 $f_{2,\varepsilon}(t) = 0$, 当 $t \geqslant \varepsilon$ 时 $f_{2,\varepsilon}(t) = 1$. 如果 $a \in \mathbb{C}$, 函数 $g_{a,\varepsilon}(z) = f_{0,\varepsilon^2}(|z-a|^2)$ 是一个 $C^\infty(\mathbb{C})$ 函数, 它在 $D(a,\varepsilon) = \{z : |z-a| < \varepsilon\}$ 内为正, 在其他处为 0. 如果 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是开的且 $K \subset \Omega$ 是紧的, 取 $0 < \varepsilon < d(K, \Omega^c)$, 其中 $d(K, \Omega^c)$ 表示 K 到 Ω 的余集的距离, 则存在有限个球 $D(a_1, \varepsilon), \cdots, D(a_N, \varepsilon)$ 覆盖 K, 其中 $a_1, \cdots, a_N \in K$, 于是非负无穷可微函数 $f_0(z) = \sum_{k=1}^N g_{a_k,\varepsilon}(z)$ 满足: 当 $z \in K$ 时 $f_0(z) > 0$, 而在 $\bigcup_{k=1}^N \overline{D(a_k, \varepsilon)}$ 之外, $f_0 = 0$. 如果设 $\delta = \frac{1}{2}\min\{f_0(z) : z \in K\}$, 则函数 $\phi(z) = f_{2,\delta}(f_0(z)) \in C_c^\infty(\Omega)$, 且 ϕ 在 K 的一个邻域内等于 1, 并且 $0 \leqslant \phi \leqslant 1$. □

命题 1.1.3 (Fubini(富比尼) 定理) 设 (X, μ) 和 (Y, λ) 是 $\sigma-$ 有限空间, f 是 $X \times Y$ 上的可测函数.

(a) 如果 f 是复值函数, 并且

$$\int_X \varphi^*(x)d\mu(x) < \infty \quad \text{其中} \quad \varphi^*(x) = \int_Y |f(x,y)|d\lambda(y),$$

则 $f \in L^1(\mu \times \lambda)$.

(b) 如果 $f \in L^1(\mu \times \lambda)$, 则对几乎处处的 $x \in X$, $f_x(y) = f(x,y)$ 作为 y 的函数有 $f_x(y) \in L^1(\lambda)$; 对几乎处处的 $y \in Y$, $f^y(x) = f(x,y)$ 作为 x 的函数有 $f^y(x) \in L^1(\mu)$, 并且

$$\int_X d\mu \int_Y f d\lambda = \int_{X\times Y} f d(\mu \times \lambda) = \int_Y d\lambda \int_X f d\mu.$$

命题 1.1.4 (Minkowski(闵可夫斯基) 不等式) 设 (X, μ) 和 (Y, λ) 是 σ- 有限空间, f 是 $X \times Y$ 上的可测函数, $1 \leqslant p < \infty$, 则

$$\left[\int_Y \left|\int_X f(x,y)d\mu(x)\right|^p d\lambda(y)\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \int_X \left[\int_Y |f(x,y)|^p d\lambda(y)\right]^{\frac{1}{p}} d\mu(x).$$

命题 1.1.5 (积分号下求导定理) 设 (X, μ) 是 σ- 有限空间, $I = (a,b)$ 是一个区间, $f(x,t)$ 是 $X \times I$ 上的可测函数且对几乎所有的 $x \in X$, $f_x(t) = f(x,t)$ 作为 t 的函数有 $f_x(t) \in C^1(I)$. 如果 $f, \frac{\partial}{\partial t}f \in L^1(\mu \times \lambda)$, 且存在函数 $\psi(x) \in L^1(\mu)$, 使得 $|\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)| \leqslant \psi(x)$ 对几乎所有的 $x \in X$ 成立, 则函数 $g(t) = \int_X f(x,t)d\mu(x) \in C^1(I)$ 且 $g'(t) = \int_X \frac{\partial}{\partial t}f(x,t)d\mu(x)$.

命题 1.1.6 (求和下求导定理) 设 $I = (a,b)$ 是一个区间, $f_n(t) \in C^1(I)$. 如果存在 $t_0 \in I$, 使得 $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t_0)| < \infty$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \sup\{|f_n'(t)| : t \in I\} < \infty$, 则函数 $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ 在 I 中任意一个紧集上一致收敛, 且 $g \in C^1(I)$ 和 $g'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(t)$.

定理 1.1.7 (Lebesgue微分定理) 设 $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, 则有如下结论:

(a) 对几乎所有的 $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r} \int_{|t|<r} [f(x-t) - f(x)]dt = 0. \tag{1.1.2}$$

使上述极限成立的点 x 的全体称为 f 积分的可微点集.

(b) 对几乎所有的 $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r} \int_{|t|<r} |f(x-t) - f(x)|dt = 0. \tag{1.1.3}$$

使上述极限成立的点 x 称为 f 的Lebesgue点，其全体称为 f 的Lebesgue点集.
(c) 如果 $f \in L^p(\mathbb{R})$ $(1 \leqslant p < \infty)$，那么对几乎所有的 $x \in \mathbb{R}$，

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{|t| \leqslant \varepsilon} |f(x-t) - f(x)|^p dt = 0. \tag{1.1.4}$$

使 (1.1.4) 成立的点称为 f 的 p 次 Lebesgue 点. f 的一次 Lebesgue 点简称为 f 的 Lebesgue 点. $\mathbb{R}$ 中 f 的 Lebesgue 点的全体称为 f 的 Lebesgue 点集. Lebesgue 点的概念是刻画局部性质的，可以只对局部可积 (或者局部 p 次可积) 的函数来定义. 如果 $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})\,(1 < p < \infty)$，那么 f 的 p 次 Lebesgue 点必然是 f 的 Lebesgue 点. Lebesgue 微分定理是分析中非常基本且重要的定理.

定义 1.1.8 (曲线定义) 如果 X 是一个拓扑空间，在 X 中的一条曲线是指一个从紧区间 $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ 到 X 的连续映射，其中 $\alpha < \beta$. 称 $[\alpha, \beta]$ 为 γ 的参数区间且 γ 的像 $\gamma([\alpha, \beta])$ 记为 γ^*. 如果曲线 γ 满足 $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ 当且仅当 $t_1 = t_2$ 或 $t_1, t_2 \in \{\alpha, \beta\}$，则称 γ 为简单曲线或 Jordan曲线. 如果 γ 的起点 $\gamma(\alpha)$ 与终点 $\gamma(\beta)$ 相同，则称 γ 为闭曲线. 简单闭曲线 γ 也称为 Jordan闭曲线. 平面中一条路经是指一条逐段 C^1 曲线. 如果 X 是一个拓扑向量空间，那么 X 中的一条折线是指有限条首尾相连的线段组成的曲线.

命题 1.1.9 (Jordan 闭曲线定理) 平面中的一条Jordan 闭曲线 γ 把平面分成两个区域，一个是有界的，称为 γ 的内部，另一个是无界的，称为 γ 的外部，γ^* 是这两个区域的公共边界.

Jordan 闭曲线定理的如下特殊情形是容易证明的 (一般情形证明见 [16] 和 [24]).

命题 1.1.10 (Jordan 闭折线定理) 平面中一条 Jordan闭折线 γ 把平面分成两个区域，一个是有界的，称为 γ 的内部，另一个是无界的，称为 γ 的外部，γ^* 是这两个区域的公共边界.

证明 可以用归纳法证明 Jordan 闭折线定理. 因为对三角形的边界所围 Jordan 闭折线，Jordan 闭折线定理显然成立. n $(n \geqslant 4)$ 条首尾相连的线段组成的 Jordan 闭折线，可以添加一条新线段使得 n $(n \geqslant 4)$ 条首尾相连的线段组成的 Jordan 闭折线变成条数分别小于或等于 $n-1$ 的首尾相连的线段组成的两条 Jordan 闭折线，他们有一条公共的线段，这样用归纳法可以证明 Jordan 闭折线定理. □

定义 1.1.11 (单连通区域的定义) 设 Ω 为扩充复平面上的一个区域，如果

对 Ω 中的任意 Jordan闭折线 γ ($\gamma^* \subset \Omega$), γ 的内部全在 Ω 中或 γ 的外部全在 Ω 中, 则称 Ω 为单连通区域.

定理 1.1.12 设 Ω 为平面上的一个区域, 如果 $D \subset \Omega$ 是一个非空开集且 D 的闭包 $\overline{D}$ 满足 $\overline{D} \cap \Omega = D$, 则 $D = \Omega$.

证明 设 $a \in D$, D_a 是 D 中含 a 的连通分支, 如果 $D_a \neq \Omega$, 则存在 $b \in \Omega, b \notin D_a$, 在 Ω 中用曲线连接 a 和 b, 可知存在一点 $c \in \Omega \cap \partial D_a \subset \overline{D}$, 但 $\overline{D} \cap \Omega = D$, 所以存在 $r > 0$ 使得 $D(c,r) \subset D$, 这与连通分支的定义矛盾. □

定义 1.1.13 (算子 $\frac{\partial}{\partial z}$ 和 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ 的定义) 复数具有形式 $z = x + iy$, 其中 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, 作映射 $\mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$, $z = x + iy \to (x,y)$, 于是在 $\mathbb{C}$ 与 $\mathbb{R}^2$ 之间建立了一个双射. 由 $z = x + iy$ 的表示方法可知, $dz = dx + idy$, $d\bar{z} = dx - idy$, 那么 $\mathbb{R}^2$ 中的微分形式 $Pdx + Qdy$ 可写成 $fdz + gd\bar{z}$ (令 $f = (P - iQ)/2$, $g = (P + iQ)/2$). 现引入微分算子

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}).$$

则对于 $f, g \in C^1(\Omega), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\frac{\partial}{\partial z}(\alpha f + \beta g) = \alpha\frac{\partial f}{\partial z} + \beta\frac{\partial g}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\alpha f + \beta g) = \alpha\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \beta\frac{\partial g}{\partial \bar{z}};$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(fg) = \frac{\partial f}{\partial z}g + f\frac{\partial g}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(fg) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}g + f\frac{\partial g}{\partial \bar{z}};$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}. \tag{1.1.5}$$

当 $g \in C^1(\Omega)$, $f \in C^1(\overline{g(\Omega)})$ 时, 复合函数 $f \circ g \in C^1(\Omega)$ 且

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \zeta}\frac{\partial g}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}\frac{\partial \bar{g}}{\partial z}, \qquad \frac{\partial(f \circ g)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial \zeta}\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}}.$$

§1.2 解析函数的基本性质

定义 1.2.1 (复可微和解析函数的定义) 设 f 是定义在开集 Ω 上的复变函数, $a \in \Omega$, 如果极限

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(a+z) - f(a)}{z} \tag{1.2.1}$$

存在, 我们称 f 在 $a\in\Omega$ 处复可微, 并记此极限为 $f'(a)$. 如果 f 在 Ω 上的每点复可微, 则称 f 在 Ω 中解析(analytic)(或全纯(holomorphic)). Ω上所有解析函数的全体记作 $H(\Omega)$. 如果 E 是平面上的集合, $H(\overline{E})$ 表示存在包含 E 的闭包的开集 Ω_f , 使得 $f\in H(\Omega_f)$ 的函数 f 全体.

由定义 1.2.1 易知, 如果 $f'(a)$ 存在, 则 $f(z)$ 在 a 处连续, 由此可知解析函数一定是连续函数. 事实上, 由定义 1.2.1, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_1>0$, 当 $|z|<\delta_1$ 时,

$$\left|\frac{f(a+z)-f(a)}{z}-f'(a)\right|<\varepsilon.$$

从而

$$|f(a+z)-f(a)|<|f'(a)||z|+\varepsilon|z|=(|f'(a)|+\varepsilon)|z|.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\ \ \varepsilon/(|f'(a)|+\varepsilon)\}$, 当 $|z|<\delta$ 时, 有 $|f(a+z)-f(a)|<\varepsilon$, 从而 $f(z)$ 在 a 处连续.

命题 1.2.2 如果复变函数 f 在 $a\in\Omega$ 处实可微, 则 f 在 a 处复可微当且仅当 $\frac{\partial f}{\partial\bar z}|_a=0$; 如果 f 在 $a\in\Omega$ 处复可微, 则 $f'(a)$ 存在且 $f'(a)=\frac{\partial f}{\partial z}|_a$.

证明 根据实可微的定义,

$$\begin{aligned}f(a+z)-f(a)&=Df|_a(z)+o(|z|)\quad(z\to0)\quad(z=x+iy)\\&=z\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_a+\bar z\left.\frac{\partial f}{\partial\bar z}\right|_a+o(|z|),\end{aligned}$$

这是因为

$$\begin{aligned}Df|_a(z)&=x\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_a+y\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_a\\&=\frac{(x+iy)}{2}(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y})+\frac{(x-iy)}{2}(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y})\\&=z\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_a+\bar z\left.\frac{\partial f}{\partial\bar z}\right|_a.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{z\to0}\frac{f(a+z)-f(a)}{z}&=\lim_{z\to0}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_a+\frac{\bar z}{z}\left.\frac{\partial f}{\partial\bar z}\right|_a+\frac{o(|z|)}{z}\right)\\&=\lim_{z\to0}\left(\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_a+\frac{\bar z}{z}\left.\frac{\partial f}{\partial\bar z}\right|_a\right).\end{aligned}$$

因此极限 (1.2.1) 存在当且仅当极限 $\lim_{z\to 0}\frac{\bar z}{z}\frac{\partial f}{\partial \bar z}|_a$ 存在. 而当 $z=x+iy=re^{i\theta}$, 其中 $\theta=\arg z\in[0,2\pi)$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$ 时, $\frac{\bar z}{z}\frac{\partial f}{\partial \bar z}\Big|_a=\frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}}\frac{\partial f}{\partial \bar z}\Big|_a=\frac{\partial f}{\partial \bar z}\Big|_a e^{-2i\theta}$. 可见, 若 $\frac{\partial f}{\partial \bar z}|_a\neq 0$, 则当 z 沿不同的方向趋于零时, $\lim_{z\to 0}\frac{\bar z}{z}\frac{\partial f}{\partial \bar z}|_a$ 不存在, 故

$$\lim_{z\to 0}\frac{\bar z}{z}\frac{\partial f}{\partial \bar z}\Big|_a \text{ 存在的充要条件是 } \frac{\partial f}{\partial \bar z}\Big|_a=0.$$

当极限 (1.2.1) 存在时, $\frac{\partial f}{\partial \bar z}|_a=0$, 显然 $f'(a)=\frac{\partial f}{\partial z}|_a$, 得证. □

由命题 1.2.2 可知, 如果 $f\in C^1(\Omega)$, 并且在 Ω 上 $\frac{\partial f}{\partial \bar z}=0$, 则 $f\in H(\Omega)$. 反过来, 如果 $f\in H(\Omega)$, 则 f 实可微且 $\frac{\partial f}{\partial \bar z}=0$ $(z\in\Omega)$. 我们将 $\frac{\partial f}{\partial \bar z}=0$ 称为 Cauchy-Riemann(柯西—黎曼) 方程.

对 $f\in C^1(\Omega)$, 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, u,v 都是实值函数, 则

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \bar z} &= \frac{1}{2}\left[(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x})+i(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y})\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y})+i(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y})\right],\end{aligned}$$

那么

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}=0 \text{ 的充要条件是 } \begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}.\end{cases}$$

接下来我们研究解析函数在区域上的积分情况. 我们知道, $\mathbb{R}^2$ 内有 Green(格林) 公式

$$\int_{\partial\omega}Pdx+Qdy=\int_\omega(Q_x-P_y)d\lambda,$$

其中 ω 是一个有界区域, 其边界由一条或几条光滑曲线所组成, 并取正方向 (下同), $P,Q\in C^1(\overline{\omega})$, 如果采用复标记, Green 公式可写成

$$\int_{\partial\omega}fdz+gd\bar z=2i\int_\omega(\frac{\partial f}{\partial \bar z}-\frac{\partial g}{\partial z})d\lambda(z),\qquad f,g\in C^1(\overline{\omega}).\tag{1.2.2}$$

事实上, 对 $f,g\in C^1(\overline{\omega})$, 不妨设 f,g 都是实的, 否则可分别考虑其实部和虚部.

令 $P=f+g, Q=i(f-g)$, 代入 Green 公式, 则

$$\begin{aligned}\int_{\partial\omega} fdz+gd\bar{z} &= \int_{\partial\omega} Pdx+Qdy=\int_{\omega}(Q_x-P_y)d\lambda \\ &= \int_{\omega}[i(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial x})-(\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial y})]d\lambda \\ &= 2i\int_{\omega}\left[\frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y})-\frac{1}{2}(\frac{\partial g}{\partial x}-i\frac{\partial g}{\partial y})\right]d\lambda \\ &= 2i\int_{\omega}(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}-\frac{\partial g}{\partial z})d\lambda(z).\end{aligned}$$

特别地, 如果在 (1.2.2) 式中取 $g=0$, 则

$$\int_{\partial\omega} fdz=2i\int_{\omega}\frac{\partial f}{\partial\bar{z}}d\lambda(z). \tag{1.2.3}$$

如果在上式中取 $f=\bar{z}$, 则 ω 的面积是 $\lambda(\omega)=\frac{1}{2i}\int_{\partial\omega}\bar{z}dz$. 利用 (1.2.3) 式可以得到

定理 1.2.3 (Cauchy(柯西) 定理) 如果 $f\in H(\omega)\cap C^1(\overline{\omega})$, 则

$$\int_{\partial\omega} f(z)dz=0. \tag{1.2.4}$$

利用 Cauchy 定理可以证明, 有界闭区域上连续实可微的解析函数在区域内任一点的取值可以由它在边界上的值确定, 这就是 Cauchy 公式. 不过在此, 我们适当放宽条件, 只考虑有界闭区域上的具有连续一阶偏导数的函数 (不一定在此区域上解析), 这样就有更广泛的 Green-Pompeiu(格林—彭培儒) 公式.

定理 1.2.4 (Green-Pompeiu 公式) 如果 $f\in C^1(\overline{\omega})$, $z\in\omega$, 则

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{\pi}\int_{\omega}\frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}}\frac{d\lambda(\zeta)}{\zeta-z}. \tag{1.2.5}$$

特别地, 如果 $f\in H(\omega)\cap C^1(\overline{\omega})$, 则

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{1.2.6}$$

(1.2.6)式就是通常意义下的Cauchy公式.

证明 任取 $z\in\omega$, 取足够小的 $\varepsilon>0$, 使得 $D(z,\varepsilon)=\{\zeta:|\zeta-z|<\varepsilon\}\subset\omega$, 对 ζ 的函数 $f(\zeta)/(\zeta-z)$ 利用 (1.2.3) 式, 可得

$$\int_{\partial(\omega\setminus D(z,\varepsilon))}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=2i\int_{\omega\setminus D(z,\varepsilon)}\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\frac{d\lambda(\zeta)}{\zeta-z}.$$

由于

$$\int_{\partial(\omega\setminus D(z,\varepsilon))}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\int_{\partial\omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\int_{\partial D(z,\varepsilon)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta, \tag{1.2.7}$$

再次利用 (1.2.3) 式, 并注意到 $f(\zeta)=f(z)+O(|\zeta-z|)$, 则

$$\begin{aligned}\int_{\partial D(z,\varepsilon)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta &= \int_{\partial D(z,\varepsilon)}\frac{(\overline{\zeta}-\overline{z})f(\zeta)d\zeta}{(\overline{\zeta}-\overline{z})(\zeta-z)}\\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\partial D(z,\varepsilon)}(\overline{\zeta}-\overline{z})f(\zeta)d\zeta\\ &= \frac{2i}{\varepsilon^2}\int_{D(z,\varepsilon)}\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\left((\overline{\zeta}-\overline{z})f(\zeta)\right)d\lambda(\zeta)\\ &= \frac{2i}{\varepsilon^2}\int_{D(z,\varepsilon)}\left(f(\zeta)+(\overline{\zeta}-\overline{z})\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}}(\zeta)\right)d\lambda(\zeta)\\ &= \frac{2\pi i}{\pi\varepsilon^2}\int_{|\zeta-z|<\varepsilon}(f(z)+O(|\zeta-z|))d\lambda(\zeta)\\ &= 2\pi i f(z)+O(\varepsilon).\end{aligned}$$

由于 $1/(\zeta-z)$ 是局部可积的, 在 (1.2.7) 式中令 $\varepsilon\to0$, 并利用 Lebesgue 控制收敛定理, 可得

$$2i\int_{\omega}\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}\frac{d\lambda(\zeta)}{\zeta-z}=\int_{\partial\omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-2\pi i f(z),$$

稍作整理便得到结论. 如果 f 还在 ω 上解析, 那么在 ω 上 $\partial f/\partial\overline{\zeta}=0$, 显然

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \qquad \square$$

由定理 1.2.4 可以推出

推论 1.2.5 ($\overline{\partial}$ 问题的解) 设 $\phi\in C_c^1(\mathbb{C})$ 且令

$$\psi(z)=-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\phi(\zeta)\frac{d\lambda(\zeta)}{\zeta-z}, \tag{1.2.8}$$

则 $\psi\in C^1(\mathbb{C})$ 且 $\frac{\partial\psi(z)}{\partial\overline{z}}=\phi(z)$.

证明 设 $\phi\in C_c^1(\mathbb{C})$, 则 ϕ 在 $\mathbb{C}$ 内有紧支集 $\operatorname{supp}(\phi)$, 那么 $\operatorname{supp}(\phi)$ 是 $\mathbb{C}$ 内的有界闭集. $\forall z\in\mathbb{C}$, 取 $R>|z|+\max\{|\zeta|:\zeta\in\operatorname{supp}(\phi)\}$, 则在 $\mathbb{C}\setminus\operatorname{supp}(\phi)$ 上, $\phi=0$, $\frac{\partial\phi}{\partial\overline{\zeta}}=0$, 所以

$$\psi(z)=-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\phi(z+\zeta)\frac{d\lambda(\zeta)}{\zeta}=-\frac{1}{\pi}\int_{D(0,R)}\phi(z+\zeta)\frac{d\lambda(\zeta)}{\zeta}.$$

由于 $\frac{1}{\zeta}$ 在 $D(0,R)$ 上是可积的, 所以 $\psi \in C(\mathbb{C})$. 由积分号下求导定理和 Green-Pompeiu 公式,

$$\frac{\partial \psi(z)}{\partial \overline{z}} = -\frac{1}{\pi}\int_{D(0,R)} \frac{\partial \phi(z+\zeta)}{\partial \overline{z}}\frac{d\lambda(\zeta)}{\zeta} = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \phi}{\partial \overline{\zeta}}\frac{d\lambda(\zeta)}{\zeta - z} = \phi(z),$$

所以 $\psi \in C^1(\mathbb{C})$ 且 $\frac{\partial \psi(z)}{\partial \overline{z}} = \phi(z)$. □

定理 1.2.6 如果 $f \in H(\omega) \cap C^1(\overline{\omega})$, 则对任意正整数 m, f 的 m 阶导数 $f^{(m)} \in H(\omega)$, 并且

$$f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i}\int_{\partial\omega} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{m+1}}, \qquad z \in \omega. \tag{1.2.9}$$

证明 在等式 (1.2.6) 两边对 z 求导, 根据积分号下求导定理, 可以在积分号下求导. □

由此定理可知, 区域 Ω 上连续可微的解析函数 f 一定有任意阶导数, 即 $H(\Omega) \cap C^1(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$, 并且 $f^{(m)} \in H(\Omega)$.

前面提到, 解析函数一定是连续的, 而下面的定理告诉我们, 当一个连续函数满足适当条件, 就一定是解析的.

定理 1.2.7 (Morera(莫勒拉) 定理) 设 f 在 Ω 上连续, 如果对任意三角形 $\triangle \subset \Omega$, $\int_{\partial\triangle} f(z)dz = 0$, 则 $f \in H(\Omega) \cap C^1(\Omega)$.

证明 对任意的 $z_0 \in \Omega$, 对 z_0 作凸区域 Ω_{z_0}, 使得 $z_0 \in \Omega_{z_0} \subset \Omega$, 我们证明 f 在 Ω_{z_0} 上解析. 在 Ω_{z_0} 内固定一点 a, 令

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta)d\zeta,$$

其中 $[a,z]$ 是从 a 到 z 的有向直线段. 取 $|\triangle z|$ 足够小, 使得 $z + \triangle z \in \Omega_{z_0}$, 则以 $a, z, z+\triangle z$ 为顶点的三角形在 Ω_{z_0} 内, 那么 f 在此三角形边界上的积分为零, 即

$$\int_{[a,z]} f(\zeta)d\zeta + \int_{[z,z+\triangle z]} f(\zeta)d\zeta + \int_{[z+\triangle z,a]} f(\zeta)d\zeta = 0,$$

或

$$F(z) + \int_{[z,z+\triangle z]} f(\zeta)d\zeta - F(z+\triangle z) = 0.$$

所以

$$\begin{aligned} F(z+\triangle z) - F(z) &= \int_{[z,z+\triangle z]} f(\zeta)d\zeta \\ &= \int_{[z,z+\triangle z]} (f(\zeta) - f(z))d\zeta + \triangle z f(z). \end{aligned}$$