初中基础知识补习丛书

数学题解

北京市海淀区教师进修学校主编

重庆出版社

数学题解（初中基础知识补习丛书）

重 庆 出 版 社 出 版（重庆李子坝正街102号）
四 川 省 新 华 书 店 重 庆 发 行 所 发 行
达 县 新 华 印 刷 厂 印 刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：7.75 字数163千
1983年2月第一版 1983年2月第一次印刷
印数：1—302,3000

书号：7114·58 定价：0.55元

前　　言

为了帮助具有初中文化程度的青年职工、社会知识青年以及初中毕业班学生系统地复习和掌握各学科的知识，以便参加考核转正或投考高中、中专、技校等，我们编辑了这套丛书。它包括：《语文》、《数学》、《物理》、《化学》，连同各自的题解，共八种。

本书是《数学》中所附题目的题解，请读者将本书与该书对照阅读。

北京市海淀区教师进修学校

1982年11月

目　　录

第一编　代　数

第一章　实　数

练 习 题 解 答

1.　(1)有最小的自然数1；没有最小的整数；没有最小的无理数；也没有最小的实数；

(2)有绝对值最小的实数，是0；

(3)零不是自然数，是整数，是有理数，也是实数；

(4)除零以外的整数都有倒数。

2.　(1)零不能作除数，其他数都可以；

(2)在实数范围总可以开奇次方，有理数范围不一定都能开奇次方，在两者各自范围内，不一定能开偶次方；

(3)在正实数范围内总可以开偶次方，在正有理数范围不一定。

3.　(1)对；

(2)对；

(3)不对，应改为"无限不循环小数都是无理数"。

4.　(1)有理数有：-1.6，1.6，0，$\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$ $(-\sqrt{3})^{0}$，

$3.\dot{1}\dot{4}$ 0.02^{11}, $\sqrt{\frac{1024}{81}}$;

(2)无理数有：$\sqrt{1.6}$，$\lg^{3}$，$\operatorname{tg}30°$，π，$0.02^{\frac{1}{2}}$；

(3)都是实数；

(4)$-1.6<0<0.02^{11}<0.02^{\frac{1}{2}}<\lg^{3}<\operatorname{tg}30°<(-\sqrt{3})°<\sqrt{1.6}<1.6<\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}<3.\dot{1}\dot{4}<\pi<\sqrt{\frac{1024}{81}}$.

5.
$$\begin{array}{r|rr} 2 & 42 & 252 \\ \hline 21 & 21 & 126 \\ \hline & 1 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rr} 22 & 5544 & 12936 \\ \hline 14 & 252 & 588 \\ \hline 6 & 18 & 42 \\ \hline & 3 & 7 \end{array}$$

∴ 42和252的最大公约数是42，最小公倍数是252；5544和12936的最大公约数是1848，最小公倍数是38808。

6. $\frac{2}{7}=0.\dot{2}8571\dot{4}$；$\frac{11}{8}=1.375$；$3\frac{5}{16}=3.3125$；$4\frac{4}{11}=4.\dot{3}\dot{6}$；$\frac{125}{202}=0.6\dot{1}88\dot{1}$。

7. (1)$\frac{7}{12}>\frac{35}{66}$；(2)$-3\frac{2}{5}<-\sqrt{11}$；(3)$\sqrt{10}>\pi$；

(4)$\sqrt{(-2)^2}=2$；(5)$\log_2 1>\log_2\frac{1}{4}$；(6)$\sin60°>\log_2\sqrt{2}$。

8. (1)填上0、2、4、6、8；(2)填上2、5或8；

(3)填上0或5；(4)填上0；(5)填上2。

9. (1) 原式$=\left(41\frac{115}{420}-40\frac{343}{420}\right)\times\left[\left(4-\frac{7}{2}\times\frac{33}{35}\right)\times\frac{100}{16}\right]=\frac{192}{420}\times\left[\left(4-\frac{33}{10}\right)\times\frac{100}{16}\right]=\frac{16}{35}\times\frac{7}{10}\times\frac{100}{16}=2$;

(2) 原式$=16\times\frac{9}{64}-\frac{11}{12}-\frac{1}{4}=1\frac{1}{12}$;

(3) 原式$=\frac{3}{2}+100-1-\frac{3}{2}=99$;

(4) 原式$=10\times\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}}\times\left(\frac{27}{4}\right)^{\frac{1}{4}}-4.26=15-4.26=10.74$;

(5) 原式$=\dfrac{-\frac{5}{3}\times\left(-\frac{1}{6}\right)}{-\frac{1}{2}+\frac{7}{9}}=1$;

(6)
$$
\begin{array}{rl}
 & 0.\ 1\quad 8\qquad 0\quad 2 \\
 & \sqrt{0.03'\ 25'\ 0\ 0'\ 00} \\
 & \quad\ 1 \\
\hline
28 & \quad 225 \\
8 & \quad 224 \\
\hline
3602 & 1\qquad 0\quad 0\quad 00 \\
2 & \qquad\ \ 7\quad 2\quad 04 \\
\hline
 & \qquad\ \ 2\quad 7\quad 96
\end{array}
$$

原式$\doteq 0.180$。

10．（1）原式$=\begin{cases} 8x+5, & \left(当x\geqslant-\frac{5}{8}时\right); \\ -(8x+5), & \left(当x<-\frac{5}{8}时\right). \end{cases}$

（2）当$x<-1$时，原式$=1-2x$；当$-1\leqslant x<2$时，原式$=3$；当$x\geqslant2$时，原式$=2x-1$；

（3）原式$=1-\sin x$；

（4）原式$=1-\lg0.725$；

（5）当$0°<x\leqslant45°$时，原式$=\cos x-\sin x+\sin x+\cos x=2\cos x$；

当$45°\leqslant x<90°$时，原式$=\sin x-\cos x+\sin x+\cos x=2\sin x$。

11．（1）当$\begin{cases}x-3\geqslant0,\\x-8\geqslant0;\end{cases}$ 或$\begin{cases}x-3\leqslant0,\\x-8\leqslant0.\end{cases}$ 即$x\geqslant8$或$x\leqslant3$时，原式成立；

（2）$(5x+4)(3x-7)\geqslant0$，即$x\leqslant-\frac{4}{5}$或$x\geqslant\frac{7}{3}$时，原式成立；

（3）$\frac{3-x}{2-x}\geqslant0$，即$x<2$或$x\geqslant3$时，原式成立。

12．（1）原式化为：$(x+4)^2+(x-4)^2=0$，

非负数$(x+4)^2$与$(x-4)^2$之和为零，需且只需$x+4=0$且$x-4=0$，这是不可能的．∴原方程无解．

（2）同样道理，原方程无解．

13．59是质数，因为它只能被1和59整除。$159=160-1=(40-1)(40+1)=39\times41$。因此159是合数；

$561^2-1=(561-1)(561+1)$，也是合数；12375能被5整除，是合数；374011能被11整除，是合数。

14. 设$A=a_0\times10^n+a_110^{n-1}+\cdots+a_n$，其中$a_1+a_2+\cdots+a_n$是9的倍数。

则$A=a_0(\overbrace{99\cdots9}^{n个}+1)+a_1(\overbrace{99\cdots9}^{n-1个}+1)+\cdots+a_{n-1}(9+1)+a_n=(a_0\overbrace{99\cdots9}^{n个}+a_1\times\overbrace{99\cdots9}^{n-1个}+\cdots+a_{n-1}\times9)+(a_0+a_1+\cdots+a_n)$由于第一个括号中各项都是9的倍数，且第二个括号中各数字和也恰为9的倍数。∴A能被9整除。

15. 由原不等式得$1\leqslant x+3<4$或$-4<x+3\leqslant-1$，即$-2\leqslant x<1$或$-7<x\leqslant-4$。∴适合原不等式的实数解是$-2\leqslant x<1$或$-7<x\leqslant-4$；整数解是$x=-2,-1,0$或$-6,-5,-4$。

*16，(1)设这两个非互质的正整数为$A=mP$、$B=nP$，其中p是最大公约数。依题意，得：

$$\begin{cases}mp+np=667,\\ \dfrac{mnp}{p}=120.\end{cases}\quad 即\begin{cases}(m+n)p=667,\\ mn=120.\end{cases}$$

∵ $(m+n)p=23\times29=1\times667$，且$(m+n)$与p是整数，

∴ $p=1,23,29,667$。

①∵AB不互质，∴$p\neq1$，$p=23$，29或667。

②当$p=23$时，得$\begin{cases}m+n=29,\\ mn=120.\end{cases}$ 解得$=\begin{cases}m=24,\\ n=5;\end{cases}$

或$\begin{cases} m=5, \\ n=24. \end{cases}$

③当 p=29时，得$\begin{cases} m+n=23, \\ m\cdot n=120. \end{cases}$解得$\begin{cases} m=15, \\ n=8; \end{cases}$

或$\begin{cases} m=8, \\ n=15. \end{cases}$

④当p=667时得$\begin{cases} m+n=1, \\ m\cdot n=120. \end{cases}$无正整数解。

∴ 所求的两数为552和115或435和232。

（2） 设这两个数 A=mp；B=np。其中 p 是最大公约数，m·n是互质的。

依题意，得$\begin{cases} mnp^2=300, \\ mnp=60. \end{cases}$ 解得p=5；mn=12。

因此m=3，n=4；或m=1，n=12。于是两个数为A=15；B=20；或A=5，B=60。

*17. ∵x、y 是实数，需$\begin{cases} 2x-1\geqslant 0, \\ 1-2x\geqslant 0. \end{cases}$于是 $x=\frac{1}{2}$；

y=4。

$\therefore \log_8 xy=\log_8 \frac{1}{2}\times 4=\log_8 2=\log_8 8^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$。

*18. $\because (x-y\sqrt{2})^2=x^2+2y^2-2\sqrt{2}xy=9-4\sqrt{2}$，

$\therefore \begin{cases} x^2+2y^2=9, \\ 2xy=4. \end{cases}$ 解得$\begin{cases} x=1, \\ y=2; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1, \\ y=-2; \end{cases}$

$\begin{cases} x=2\sqrt{2}, \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2\sqrt{2}. \\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

又∵x、y是有理数，$\therefore\begin{cases}x=1,\\y=2;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-1,\\y=-2.\end{cases}$

*19．若方程的根为有理数，只需$\Delta=[-4(m-1)]^2-4\times(3m^2-2m+4k)$为完全平方式。

而$\Delta=4[4m^2-8m+4-3m^2+2m-4k]=4(m^2-6m+4-4k)=4[(m-3)^2-5-4k]$。

$\therefore\ -5-4k=0,\ k=-\dfrac{5}{4}$。

*20．（1）依题意，得$\begin{cases}x+y-5=0,\\3x-4y+6=0.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=2,\\y=3;\end{cases}$

（2）得 $\begin{cases}\dfrac{x}{x-2y}-2=0, & ①\\(x+y)(x-y)-15=0. & ②\end{cases}$

由①得$x=4y$，

代入②，得$15y^2=15$，　$y=\pm1$。

$\therefore$ 方程的实数解为$\begin{cases}x=4,\\y=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=-4,\\y=-1.\end{cases}$

*21．设两个既约分数为$\dfrac{a}{b}$、$\dfrac{c}{d}$，$\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=A$（A是整数）。

于是$ad+bc=Abd$，也就是$bc=d(Ab-a)$；其中a、b、c、d、A都是整数。因此bc能被d整除，因c和d互质，可知b能被d整除。同样$ad=b(Ad-c)$，ad能被b整除，因a与b互质，可知d能被b整除。这样，就推出b能被d整除，d又能被b整除，即$b=\pm d$。于是两个分数的分母的绝对值相等。

*22．假设$\sqrt{3}+\sqrt{2}=m$是有理数，则$\sqrt{3}=m$

$-\sqrt{2}$，于是得：$3=m^2-2\sqrt{2}m+2$，$\therefore \sqrt{2}=\dfrac{m^2-1}{2m}$。

此式左边是无理数而右边是有理数，这是不可能的。

$\therefore \sqrt{3}+\sqrt{2}$是无理数。

说明：有关无理数的一些证明题，常采用"反证法"。其步骤为：反设、推演、矛盾、结论。在无理数这一部份，常把求证的无理数反设为有理数$\dfrac{p}{q}$或m(其中p、q为互质的整数，m为有理数)。

*23. 设三个连续的自然数为n-1、n、n+1(n为不小于2的整数)。

由于$(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=n^3-3n^2+3n-1+n^3+n^3+3n^2+3n+1=3n^3+6n=3(n^3+2n)$，

$\therefore$三个连续的自然数的立方和能被3整除。

*24. 设四个连续奇数为$2n-3, 2n-1, 2n+1, 2n+3$，依照题意得：

$[(2n-3)+(2n-1)+(2n+1)+(2n+3)]^2=3[(2n-3)^2+(2n-1)^2+(2n+1)^2+(2n+3)^2]+84$

即$(8n)^2=3\times 16n^2+3\times 20+84$，就是$16n^2=144$，

$n=3$或-3。于是所求的连续奇数为：3, 5, 7, 9或$-9, -7, -5, -3$。

说明：在有关数的整除性问题中，常把连续整数设为$n-2, n-1, n, n+1, n+2\cdots$，把连续偶数设为$2n-4, 2n-2, 2n, 2n+2, 2n+4, \cdots$连续奇数设为$2n-3, 2n-1, 2n+1, 2n+3, \cdots$，以便于计算。

*25. 将3933分解质因数得：

$$3933=3\times3\times19\times23$$

∵每组人数限定在10人以上，20人以下；且又要分成人数相等的小组，

∴每组只能19人，共分$3\times3\times23=207$(个小组)。

26．先求32，26，48的最小公倍数：

$$\begin{array}{r|lll} 2 & 32 & 26 & 48 \\ \hline 8 & 16 & 13 & 24 \\ \hline & 2 & 13 & 3 \end{array}$$

∴32、26、48的最小公倍数是$2\times8\times2\times13\times3=1248$。

于是用32、26、48去除时都余15的最小数为$1248+15=1263$。

*27．先求2、3、4、5、6的最小公倍数是60，可知篮中鸡蛋数为$60k+1$，($k=1,2,3,4,\cdots$)。又"七个七个数，恰好数完"，可知$60k+1$应是7的倍数。

当$k=1$、2、3、4时，$60k+1$均不能被7整除，

当$k=5$时，$60k+1=301$可整除7，故篮中最少有301个鸡蛋。

*28．设满足条件的四位数是n^2-400，n是自然数，可得，$1000\leqslant n^2-400\leqslant9999$

$1400\leqslant n^2\leqslant10399$

$\therefore 37.42\leqslant n\leqslant101.98$

又因n是自然数，因此适合上面不等式的自然数n有64个$(101-37=64)$，所以有64个四位数，它加上400以后，就成为一个自然数的平方。

自我检查题解答

1．（1）实数．（2）第④种情况．（3）原式

$$=\begin{cases}1\ (x>0);\\ -1(x<0).\end{cases}$$

（4） 由于$\sqrt{\dfrac{2318}{9}}=\dfrac{\sqrt{2\times19\times61}}{3}$，$\lg tg60°=\lg\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}\lg3$，$2\sqrt{2}\sin45°=2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2$，$\lg(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})=\dfrac{1}{2}\lg(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})^2$

$=\dfrac{1}{2}\lg10=\dfrac{1}{2}$，$\sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{2}{3}$，$\sqrt[3]{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt[3]{18}}{2}$，

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4}=\dfrac{81}{16}$，$\log_2 2+\log_{\sqrt{5}}1-\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{27}=1+0-3=-2$，因此

有理数有：$2\sqrt{2}\sin45°$，$\lg\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)$，

$\sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}$，$\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4}$，$\log_2{}^2+\log_{\sqrt{5}}1-\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{27}$；无 理 数有：

$\sqrt{\dfrac{2318}{9}}$，$\lg tg60°$，$\sqrt[3]{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2}$；（5）0；1；负数；数x应满足$-1<x<0$或$x>1$．

2． 设三个连续整数是$3n+1$，$3n+2$，$3n+3$（其中n是整数）．

$\because$ $(3n+1)(3n+2)(3n+3)=3[(3n+1)(3n+2)(n+1)]$必是 3 的倍数。

又三个连续整数中，至少有一个偶数。$\therefore (3n+1)(3n+2)(3n+3)$又是 2 的倍数。

$\therefore$ 三个连续整数的积必是 6 的倍数。

3．（1）(原式)$=-1-\left|-\frac{1}{2}-1\right|+1-3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1-\frac{3}{2}+1+\frac{3}{2}=0$；

（2）原式$=-6\frac{7}{9}-\left[-\frac{3}{2}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{5}+\frac{8}{5}\times\frac{7}{8}\times(+1)\right]=-6\frac{7}{9}-\frac{2}{5}=-7\frac{8}{45}$；

（3）原式

$$=\frac{\left(9\frac{5}{20}-7\frac{8}{20}\right)\times 2\frac{1}{2}-1\frac{1}{2}}{\left(3\frac{30}{240}+4\frac{36}{240}-1\frac{25}{240}-5\frac{96}{240}\right)\div 3\frac{1}{12}}$$

$$=\frac{\frac{37}{20}\times\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}{\frac{185}{240}\times\frac{12}{37}}=\frac{\frac{37}{8}-\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{\frac{25}{8}}{\frac{1}{4}}=\frac{25}{2}=12\frac{1}{2}.$$

4. $5\sqrt{2}-2\sqrt{3}\approx 5\times 1.414-2\times 1.732=7.070-3.464=3.606\approx 3.61$.

又$\pi=3.1415926\cdots$因此π精确到0.0001的不足近似值是3.1415，过剩近似值是3.1416.

说明：近似数的加减运算，应根据结果所要求的精确数位，在计算过程中多保留一位，求出结果后，再根据抹尾凑整（旧名四舍五入）的规则，保留到所需位数。近似数的乘除运算，应根据结果所要求的有效数字的个数，在计算过程中，多保留一个数字，求出结果后，再抹尾凑整到所要求的数位。

5. 由于一个数若能被99整除，就应该能被9和11整除。若一个数能被9整除，则各位数字和应是9的倍数，能被11整除则奇位数字和与偶位数字和之差应是11的整倍数（包括0倍）。

于是$6+2+\alpha+\beta+4+2+7=\alpha+\beta+21$，得$\alpha+\beta=6$或$\alpha+\beta=15$.

又$(6+\alpha+4+7)-(2+\beta+2)=13+(\alpha-\beta)$，得$\alpha-\beta=-2$或$\alpha-\beta=9$.

$\because$ α、β只能取0至9这十个数中的一个，

$\therefore$只有 $\begin{cases}\alpha-\beta=-2,\\ \alpha+\beta=6;\end{cases}$ 得$\begin{cases}\alpha=2,\\ \beta=4;\end{cases}$

或 $\begin{cases}\alpha-\beta=-2,\\ \alpha+\beta=15.\end{cases}$ 无整数解。

$\therefore$ α和β分别取2和4.

6. 由$2x^2-5x+2<0$，得：$\frac{1}{2}<x<2$.

原式 $=|2x-1|+2|x-2|=2x-1+2(2-x)=2x-1+4-2x=3$。

7. ∵这两个数的最大公约数是11，∴可设这两个数为11a和11b，a和b互质的。

依照题意，得：$11ab=440$，$ab=40$。

由于a、b互质，∴$\begin{cases}a=40,\\b=1;\end{cases}$ 或$\begin{cases}a=8,\\b=5.\end{cases}$

这两个数为440和11或88和55。

第二章　代　数　式

一、整式

练 习 题 解 答

1. (1)(2)(4)(5)(6)是整式，其中(2)(6)是单项式。

2. (1)错误，当 $a=0$ 时，不是正数；

(2)正确；

(3)错误，a可以表示正数，也可以表示负数；

(4)正确；

(5)错误，当a为负数时，5a小于a。

3. (1)设其中一个圆的半径为R，则两圆面积之和为 $\pi R^2+\pi(15-R)^2$；