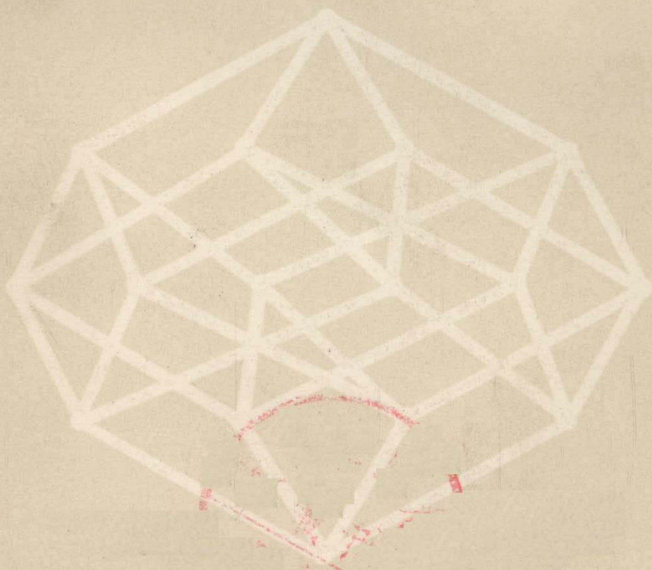
离散数学

DISCRETE MATHEMATICS



曹建猷 编

西南交通大学出版社

离散数学

曹建猷 编

1985

内 容 简 介

这是一本大学本科计算机与信息科学专业的基础数学教材，供一个学期使用。主要涉及有限离散系统。读者只要求具有一般中学的数学基础；课题的处理也是从这个起点着手。所以也便于自学和实际工作者参考。

离 散 数 学

曹建猷 编

*

西南交通大学出版社出版

（四川 峨眉）

四川新华书店发行

西南交通大学出版社印刷厂印刷

*

开本：850×1182 1/32 印张：8.5

1985 年 12 月第二版 1985 年 12 月第一次印刷

字 数：207,000 印 数：3000 册

统一书号：13478·001 定价：2.29 元

前　言

这个本子是根据编者给一年级研究生开设同名课程的讲稿编印出来的，只把部分比较次要的内容去掉，着笔力求简明易懂。作为大学本科初学者的教材，这是必要的。教材供每周3小时，一个学期使用。

第一章介绍逻辑推理的一些基本方法，它不属于离散数学的范畴，但是常常要用到它。

第二章到第四章讲集合、关系和函数。这些，是近世代数的基础。另外，阐述了数学归纳原理；它是证题的一个重要工具。

第五章是图论。还重点介绍了树。

第六章组合论，列举了几种常用的计数方法，特别是递推系统和它们的解。

第七章代数，着重讨论了含幺半群、群、环和布尔代数。也简要地介绍了格。

每章都加入了一些应用方面的内容，目的是为了加深概念。

离散数学这门学科是到七十年代初期才逐步形成的。目前有两种趋向：一种主要只涉及基础；另一种强调代数，甚至定名代数系统。编者的观点接近于后者。因为：一、实际中需要；二、代数的讨论反过来加强了基础。离散数学的内容来自数学的各个分支，编者只是在课题的取舍和处理方法上进行了斟酌，使尽可能适应计算机和信息工作者的需要。参考文献列在书后。

数学名词，以及计算机术语，有的很不划一，有时只好兼收并蓄。有些名词是经与郭可詹教授商酌或自订，如永真、匀射、分片法等。

编　者

1980年12月于峨眉

再 版 序

1980年以来重印过两次。第二次重印时对第三章做了些删节，对第五、六、七章作了几处改写和补充。这些，大都是从应用的角度加以考虑的。这次再版是根据第二次重印的本子，只作了个别文字上的订正。

在本书使用和修订过程中，承杜申华、尹治本同志提了很多宝贵的意见，并此致谢。

编 者

1985年12月

目　　录

第一章　命题逻辑

第二章　集合论

第三章　关　系

第四章 函 数

第五章 图 论

第六章 组合论

第七章 代 数

第一章　命题逻辑

数学研究的对象是数学结构的性质。为了证明这些性质，需要数学推理，确定一个命题是对，还是不对。这一章提供数理逻辑中的一些概念和一些方法，以便于在本课程和后续的一些课程中应用。

第一节　命　题

命题 *proposition* 是一种断语，它要么对，要么不对，而不两可。例如以下断语：

1. $3+3=6$
2. 2 是偶数而 3 不是
3. 6 是素数
4. 月亮不是方的

其中 1、2、4、对，3 不对，它们都是命题。

5. $x=3$
6. $x+y>0$
7. 明天下雨

这些就不是命题。它们可能对，可能不对。

对，也称“真”；不对，也称“谬”。它们叫做命题的“真值”。在初等数学中我们用 x，y，z 等字母表示变数。这里我们用 P，Q，R 等大写字母来表示命题，叫做命题变量。它们的真值要待代入具体命题时才能确定。例如，若 P 代表 $2=2$，那 P 就对。若 Q 代表 $2=1$，那 Q 就不对。但是如果 P 对，那么否定 P 就不对。例如 P 代表 $2=2$，否定 P 即 $2\neq2$，那就不对。

这就使我们有可能从抽象的命题变量 P，Q 等等来进行研究，得出一系列逻辑推理方法来。

P 的否定是一个新的命题，用 $\neg P$ 表示，读成非 P，或 *not* P。$\neg$ 读成“非”。用真值表来定义，示于表 1.1。表中我们用 0 来代表不对（谬，否，不成立），1 代表对（真，是，成立）。第 1 栏列出了 P 的两种可能真值，第 2 栏是 $\neg P$ 的对应的两个真值。命题“6 是素数”其真值是 0，它的否定“6 不是素数”其真值则是 1。“月亮不是方的”其真值是 1，它的否定“月亮是方的”其真值则是 0。所以表 1.1 概括了所有命题和它的否定的关系。

P	$\neg P$
0	1
1	0

表 1.1

更加复杂的命题例如“6 是素数且 $3+3=6$”，可写成一般的形式

$$P \wedge Q$$

$\wedge$ 叫做“与”，也读成 *and*，$P \wedge Q$ 读成 P 与 Q。其真值见于表 1.2。又如命题“6 是素数或者 $3+3=6$”可写成一般形式

$$P \vee Q$$

$\vee$ 叫做“或”，也读成 *or*。$P \vee Q$ 读成 P 或 Q。其真值见于表 1.3。两种命题的真值分别由它们的真值表定义。

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

表 1.2

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

表 1.3

由表中可以看到，与式 $P\wedge Q$ 要求 P 和 Q 两者都对，$P\wedge Q$ 才对。或式 $P\vee Q$ 要求 P 和 Q 两者都不对，$P\vee Q$ 才不对。0 小于 1。从这个观点看，与式 $P\wedge Q$ 是取 P 和 Q 两者的真值的小者，或式 $P\vee Q$ 是取两者真值的大者。所以"6 是素数$\wedge 3+3=6$"这个命题并不对，因为命题"6 是素数"不对，其真值为 0，$\wedge$ 式是取其小者。"6 是素数$\vee 3+3=6$"这个命题对，因为命题"$3+3=6$"对，其真值是 1，$\vee$ 式是取其大者。

关于$\vee$式，还可以举些例子。比如说电灯不亮了。有人说："是灯泡坏了或者保险烧了"。如果发现是灯泡坏了保险没烧，或者灯泡没坏是保险烧了，那他说的都算对。如果是灯泡坏了保险也烧了，那他当然对。只有灯泡没坏，保险也没烧，那才算他说的不对。

这同日常语言某些没有确定标准的情形大不相同。例如问小学生：2 加 2 等于多少？如果回答是"4 或 5"，那就很难算全对，有可能只给 50 分。但在命题语言中只有 100 分和 0 分，要么对要么不对，而不两可。只有这样，才能形成一个系统的、明确的推理方法。

$\neg$，$\wedge$和$\vee$称为逻辑算符，逻辑算子，或逻辑连接符。$\neg$是一元运算，它只涉及一个命题变量。$\wedge$和$\vee$是二元运算，它们涉及两个命题变量。由它们构成的命题，又叫命题式。单个命题变量也是一个命题式。命题式也是命题。$P\wedge Q$ 称为 P 和 Q 的合取式。$P\vee Q$ 称为 P 和 Q 的析取式。推而广之，可有合取式

$$P\wedge Q\wedge R\wedge S\wedge\cdots$$

和析取式

$$P\vee Q\vee R\vee S\vee\cdots$$

合取式只须其中一个命题真值为 0，全式真值即为 0。析取式只须其中一个命题真值为 1，全式真值即为 1。

命题语言还需要一些其他连接符。例如命题“他是刘文，要不就是赵武”。“刘文”，“赵武”，这两个分命题不可能都对。类似语句如“我那书在老王那儿，要不就在老李那儿”，也是这种情形。那本书不可能同时在老王那儿，又在老李那儿。这语句译成英文，可有

Wang has my book or Li has it.

连接词用了一个“*cr*”，但是和上面那或式$\vee$并不相同，因为这里说明只有其中一个分命题对，不可能两个分命题都对。若两个分命题都对，那这句话就说错了。两个分命题我们可用算符$\oplus$连接，和$\vee$相区别，把命题写成$P\oplus Q$。$\oplus$读成“异或”，英文叫做*exclusive cr*。真值示于表 1.4。同表 1.3 比较，差别只在第 4 行，——P 和 Q 两者都对时那命题 $P\oplus Q$ 就不对。

P	Q	$P\oplus Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

表 1.4

真值表每行给出的真值有两种可能值 0 和 1。涉及两个命题变量的二元运算，其真值表共有 4 行，所以总共有 16 种可能的相异真值表，也就是存在 16 种可能的不同的二元运算。但是，拿上述异或运算 $P\oplus Q$ 为例，容易证明它可改写成

$$(P\vee Q)\wedge\neg(P\wedge Q)$$

此式可读成：*P cr Q but not both*。它同原式有相同的真值，无论 P 和 Q 的真值如何。因此$\oplus$运算可用$\neg$，$\wedge$和$\vee$三种运算来表达。事实上，具有其他真值表的二元运算，情况也是这样，也都可用这三种运算代替。所以我们把，$\neg$$\wedge$和$\vee$运算看成

是命题逻辑中的三种基本运算，让它们分别代表 *not*，*and*，和 *or*。

但是，在数理逻辑中还有两种常用语言，为了方便，通常用特殊连接符表示。一种是“蕴涵”，用→表示。$P\to Q$ 读作 P 蕴涵 Q。它和

$$\neg P\vee Q \tag{1}$$

有相同的真值。另一种是“等价”，用↔表示。$P\leftrightarrow Q$ 读作 P 等价于 Q。它和

$$(\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee P) \tag{2}$$

有相同的真值。我们来比较详细地考察 $P\to Q$ 和 $P\leftrightarrow Q$ 这两种逻辑式。

蕴涵 考虑以下命题

“如果他不来那么他准是病了”。

在数理逻辑中，这语句可用蕴涵式表示为

$$P\to Q$$

其中，P 代表命题“他不来”，Q 代表命题“他病了”。所以全式也可读成“如果 P 那么 Q”。P 叫做假设，或前提；Q 叫做结论。真值表示于表 1.5。$P\to Q$ 的真值只第 3 行是 0。

P	Q	$P\to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

表 1.5

上面那命题，若“他不来”真，“他病了”也真，那命题自然对，即真值表的第 4 行，命题 $P\to Q$ 真值为 1。若“他不来”真，但是他没病，那命题就没说对，即真值表的第 3 行，命题 $P\to Q$ 真值为 0。其他两行，即第 1 行和第 2 行

他来了，不是“他不来”，两行前提 P 都不成立，因此命题都算对。所以只有直接的谬误，即真值表的第 3 行，蕴涵式 $P\to Q$ 才不对。

前提不成立，蕴涵式算对，有时会感到有些勉强。这也是一个 50 分和 100 分的问题。事实是，命题是说“如果他不来”如何如何。他来了，并不能说命题错了，因为他有话在先。

等价 考虑以下命题

“他不来就算他缺席”。

“他不来”和“他缺席”是等价的。用逻辑式表示，可写成

$$P\leftrightarrow Q$$

称为等价式。用 P 代表“他不来”，Q 代表“他缺席”。如果他没来，而且算他缺席，这话显然成立。换成真值，这就是 $1\leftrightarrow 1$。“他来了就算他没缺席”。这话也成立。代入上式，记成真值，就是 $0\leftrightarrow 0$。所以等价要求 P 和 Q 有相同的真值。两者真值相同时等价式便成立，真值为 1；否则不成立，真值为 0。真值表示于表 1.6。

P	Q	$P\leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

表 1.6

由以上（1）和（2）式可见，等价式 $P\leftrightarrow Q$ 和 $(P\to Q)\wedge(Q\to P)$ 有相同的真值，后者是两个相反蕴涵式的与。所以等价式的真值表也可由蕴涵式的真值表得出，示于表 1.7。表 1.7 和表 1.6 真值完全相同。所以，若那与式对，那等价式也对。反之，若那等价式对，那与式也一定对，也就是那两个相反的蕴涵式一定都对。

刚才讲的两句话也是两个蕴涵式。可写成

$$((P\to Q)\wedge(Q\to P))\to(P\leftrightarrow Q)$$

$$(P\leftrightarrow Q)\to((P\to Q)\wedge(Q\to P))$$

P	Q	$P\to Q$	$Q\to P$	$(P\to Q)\wedge(Q\to P)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

表 1.7

两个蕴涵式相反，所以可有等价式

$$(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow((P\to Q)\wedge(Q\to P))$$

新的等价式有一个特点，即式中两端的命题有完全相同的真值，无论 P 和 Q 的真值如何。所以这个等价式的真值总是 *1*，无论 P 和 Q 的真值如何。它和一般的等价式不同，它是一个永真的等价式，又叫恒等式。为了区别，符号↔可改写作⇔或=。一些重要的恒等式示于第 *8* 页表 *1.8*。上述恒等式，即表中的(*19*)。

真值总是 *1* 的命题式，我们叫它同语反复 *tautology*，或永真，它并不限于恒等式。例如

$$P\vee\neg P$$

就是一个永真式，它的真值总是 *1*。真值总是 *0* 的命题式，我们叫它矛盾 *contradiction*，或永谬。例如

$$P\wedge\neg P$$

它的真值总是 *0*。有些蕴涵式也是永真。一些重要的永真蕴涵式列于表 *1.9*。为了区别，对于永真蕴涵式我们改用符号⇒。容易证明，表中所列的蕴涵式其真值总是 *1*，无论所涉及的变量的

真值如何。永真式在数理逻辑中有着特殊的地位，因为它们常用于逻辑推理。它们的特点在于，无论其中的命题变量代入怎样的具体命题，这些永真式的真值总是 *1*，即命题式总是成立。

逻辑恒等式　　　　表 1.3

1	$P=(P\vee P)$	
2	$P=(P\wedge P)$	等幂
3	$(P\vee Q)=(Q\vee P)$	
4	$(P\wedge Q)=(Q\wedge P)$	交换性
5	$((P\vee Q)\vee R)=(P\vee(Q\vee R))$	
6	$((P\wedge Q)\wedge R)=(P\wedge(Q\wedge R))$	结合性
7	$\neg(P\vee Q)=(\neg P\wedge\neg Q)$	
8	$\neg(P\wedge Q)=(\neg P\vee\neg Q)$	*de Morgan* 定律
9	$(P\wedge(Q\vee R))=((P\wedge Q)\vee(P\wedge R))$	
10	$(P\vee(Q\wedge R))=((P\vee Q)\wedge(P\vee R))$	分配性
11	$(P\vee 1)=1$	
12	$(P\wedge 1)=P$	
13	$(P\vee 0)=P$	
14	$(P\wedge 0)=0$	
15	$(P\vee\neg P)=1$	
16	$(P\wedge\neg P)=0$	
17	$\neg(\neg P)=P$	
18	$(P\to Q)=(\neg P\vee Q)$	蕴涵
19	$(P\leftrightarrow Q)=((P\to Q)\wedge(Q\to P))$	等价
20	$((P\wedge Q)\to R)=(P\to(Q\to R))$	转移
21	$((P\to Q)\wedge(P\to\neg Q))=\neg P$	谬论
22	$(P\to Q)=(\neg Q\to\neg P)$	反真

永真蕴涵式 表 1.9

1	$P\Rightarrow(P\vee Q)$	添加
2	$(P\wedge Q)\Rightarrow P$	简约
3	$(P\wedge(P\to Q))\Rightarrow Q$	用肯定肯定
4	$((P\to Q)\wedge\neg Q)\Rightarrow\neg P$	用否定否定
5	$(\neg P\wedge(P\vee Q))\Rightarrow Q$	析取三段论
6	$((P\to Q)\wedge(Q\to R))\Rightarrow(P\to R)$	假言三段论
7	$(P\to Q)\Rightarrow((Q\to R)\to(P\to R))$	
8	$((P\to Q)\wedge(R\to S))\Rightarrow((P\wedge R)\to(Q\wedge S))$	
9	$((P\leftrightarrow Q)\wedge(Q\leftrightarrow R))\Rightarrow(P\leftrightarrow R)$	

一个具体的蕴涵式命题如果正确，那它的真值也是 1 。例如命题

$$(x=3)\to x\text{ 是奇数}$$

它显然正确，即真值是 1。真值是 1 的这类蕴涵式命题有这样的特点：其前提是一个比结论更“强”的断语，——它构成结论的足够条件或充分条件。如果 $x=3$，那么当然 x 是奇数。与此同时，其结论是其前提的必要条件。x 是奇数，才有可能 $x=3$。设 P 和 Q 是两个命题式，且有永真蕴涵式

$$P\Rightarrow Q$$

那么它也具有同样的性质，即：P 是 Q 的足够条件，Q 是 P 的必要条件。P 是比 Q 更强的断语。

如果 $P\to Q$ 代表一个正确的具体命题或永真蕴涵式，同时 $Q\to P$ 也正确，那么 $P\leftrightarrow Q$ 也正确。这时 P 成了 Q 的足够和必要条件，Q 也成了 P 的足够和必要条件，简称充要条件。如果 $P\to Q$ 不正确，或者 $Q\to P$ 不正确，那么 $P\leftrightarrow Q$ 也不正确。这时