

地球形狀理論講義

B. B. 布洛瓦爾 著

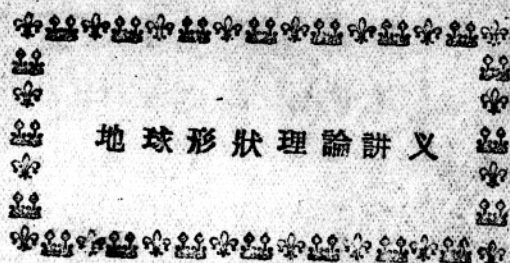
天文重力教研組 譯

武漢測量制圖學院

中國·武漢

1957—1958

B. B. 布洛瓦尔



天文重力教研注释

— 武汉测量制图学院

中华人民共和国武汉市

1957—1958

序 言

本讲义阐述了1957——58 学年在武汉测量制图学院给中国的重力测量工作者讲课的主要内容，全部的注意力都集中在研究地球表面的理论。作者认为这门课程的主要目的是有系统地讲述用莫洛琴斯基理论为根据的现代观点对待整个天文大地和重力测量工作。

在讲义里不完全都是详细地讨论重力测量的计算技术，这个空白之处儘可能地在讲课和答疑时加以弥补。

根据听课者已有的知识，对于位理论、地球形状理论和大地测量中的某些公式没有加以推导，对于这些情况在讲义里也写出了已经翻译成中文的参考书，同时，由于听课者已经熟悉了斯托克司理论，所以对于这个理论也没有加以特别的重视。

第十章，按其题目是直接附于第四章的，但是，由于它是非常专门的问题，所以决定把它放在课程的最后当作附录的形式。

在第十一章内简单地讨论了重力测量中的几个问题，这些问题是根据听课者的要求选择出来的。

讲义由俄文翻译成中文以及译文的校阅是由宁津生、刘祖惠和其他几位同志担任的，为了本讲义出版又承方俊教授同意担任校阅。对这些同志的工作以及为了使得顺利地完成任务，武汉测量制图学院的领导创造了所有的条件，我谨表示谢意！

作 者

1958年6月5日

于中华人民共和国。

武汉市。

目 錄

頁

序言		
緒論		1
第一部份 牛頓位的理論		
第一章 引力位的基本性質		
§1. 引力位的類型		4
§2. 分佈在球面上的均勻單層的位		7
§3. 均勻球的位		9
§4. 均勻平面單層的引力		9
§5. 單層位的法線導數、普列米利公式的說明		11
§6. 單層位的切線導數和任意方向的導數		14
§7. 拉普拉斯由卜阿桑方程式		17
§8. 水準面和位在無窮遠處的特性		19
§9. 引力位性質的結論		20
第二章 位理論的邊界問題		
§10. 奧斯特洛格拉得斯基公式和格林公式		21
§11. 高斯公式、格林基本公式		26
§12. 位理論的外部邊界問題		29
§13. 平面和球的狄義赫利問題		31
§14. 格林等值層		35
§15. 運用球函數解此邊界問題		37
第二部份 地球形狀的研究		
第三章 重力和地球形狀		
§16. 重力和重力位		42
§17. 地球重力場的一般特徵		45
§18. 大地測量和重力		50
§19. 斯托克斯定理和莫洛琴斯基的研究		52
§20. 起始數據和測定地球表面的概念		57
第四章 地球的正常位		

§21.	地球正常位的选择方法	60
§22.	用球面函数的和近似地表示地球外部重力位	60
§23.	克莱若椭球体	65
§24.	克莱若椭球体上的重力, 克莱若定理	68
§25.	地球正常位	70
§26.	在正常场内的重力垂直梯度和力线的曲率	74
§27.	正常场的坐标和大地坐标	76
第五章	测定地球表面点坐标的理论	
§28.	正常高和高程异常	78
§29.	地球表面的第一次近似和虚拟大地水准面	80
§30.	天文纬度, 经度的改正和扰动位	82
§31.	扰动位的性质	84
§32.	边界条件	88
§33.	基本的积分方程及其近似的表达式	90
§34.	皮察奇公式	93
§35.	解的存在条件, 斯托克斯级数	95
§36.	对于外部空间的斯托克斯公式	99
§37.	虚拟大地水准面的近似高 U_R 和总的地球椭球体	101
§38.	垂线分偏差的维序, 曼尼斯公式	107
§39.	最好地测定高度异常和垂线偏差分量	106
§40.	计算地球表面上的扰动位	108
§41.	计算地球表面上的垂线偏差分量, 实用公式	112
§42.	尤尔金娜方法	112
§43.	总的地球椭球体长半径的测定, 结束语	113
第六章	区域性的地球形状研究	
§44.	区域性的和全球性的重力测量	116
§45.	参考椭球体和天文大地垂线分偏差	117
§46.	天文方位角, 水平方向和基线的垂线偏差和高度异常的改正	118

§47. 根据三角水准測量計标大地高	119
§48. 根据几何水准測量計标正常高	120
§49. 力高	123
§50. 天文水准	125
§51. 天文重力水准的概念	128
§52. 天文重力水准公式	129
§53. 适合於无穷平面的维宁·曼尼斯公式和 适合於短距离的天文重力水准公式	131
§54. 結束語	133
第七章 区域性重力測量的設計和計标方法	
§55. 重力測量的誤差	135
§56. 重力異常的間接內插和地球的調整	136
§57. 均匀重力測量的誤差对推导垂线分偏差精度的影响	139
§58. 适用于推导垂线偏差分量的重力測量的設計	144
§59. 天文重力水准所必須的重力測量区域的半径	146
§60. 垂线偏差分量及高程異常計标模板	149
§61. 天文重力水准模板	157
第八章 整個地球形状的研究	
§62. 顾及这区域环带的異常, 斯托克司公式的改化	162
§63. 这区域环带的異常对推算 ζ , η 的均方誤差影响	167
§64. 全世界重力測量的分散性和 ζ , η 的計标精度	171
§65. 全世界重力測量的系統誤差	173
§66. 用球函数的和来表示重力	176
§67. 重力正常分佈的公式	179
§68. 根据重力測量資料推算总的地球橢圓体的大小和空向	181
§69. 一併运用重力測量和天文大地資料測定 总的地球橢圓体的概念	183
第九章 位理論在重力探勘上的应用	
§70. 重力探勘的正反演問題 (試驗法)	185

§71.	計标平面的斯托克司常数的直接法	188
§72.	求地球表面的斯托克司常数的直接法	189
§73.	重力场的划分. 平均密度的确定	191
第十章	旋轉水准椭固体的外部重力场	
§74.	曲线坐标	194
§75.	勒浪德尔方程式	197
§76.	形状为扁平旋轉椭固体的水准面的外部重力位	200
§77.	在水准椭固体上的重力	203
§78.	對於旋轉水准椭固体的克莱若公式	205
§79.	旋轉水准椭固体上的位	206
§80.	旋轉水准椭固体的质量及其重力位的斯托克司常数	207
第十一章	重力测量中的几个问题	
§81.	關於摆仪测定重力	210
§82.	绝对重力测量	213
§83.	重力仪的灵敏度和助动	217
§84.	重力仪的灵敏度和彈性系統自由振动的周期	220
結尾語		
	在历史过程中研究地球形状理論的一些主要工作.	223
附錄 I	球函数性質概述	
附錄 II	法截线曲率公式的另一种推导	
附錄 III	定理	
附錄 IV	公式 (5.8) 的推导	
	勘誤表	

重力測量與地球形狀學

B. B. 布洛瓦爾 著

地球形狀理論

緒 論

天体的形成和植物莖梗的生長，雨雪量和血液循環，海洋潮汐和擺的振動，都是非常密切地與地球的引力連系着。這種引力在地球表面上從這一處到另外一處的变化是很慢的。因此在很小的空間內（與地球的大小相比）研究某種現象時在大部份情況下可以認為地球引力的數值和方向是一個常數，這樣，引力的影響就可以用最簡單的方法來計標。但是在這些自然科學的學科中，如天體物理學，天體力學，地球物理學，高等測量學，海洋測量學，由於所研究的對象是廣泛的，並且還要求非常精確的計標，因此就應該注意到地球引力數值和方向的变化。

在地球上的重力測量（主要的是地球的引力）以及它的結果在某一方面利用都是一些獨特的問題，以致在解求這些問題時就產生了在程度上多少有些獨立的學科，稱之為重力測量學。重力數值的測量是以很高的精度進行的（精度為 10^{-7} ）。因此在製造相應的儀器和擬定測量的方法時就需要有專門的技術學科和誤差理論。在理論上研究地球引力的性質以及在這個基礎上解標各種問題時就必須要借助於位的理論。位理論最根本的研究對象就是與物體之間的距離平方成反比的力，這種理論的運用範圍是非常的廣泛，它可以推討所有位向量的性質（例如確定光線曲率的空氣密度的梯度）。

我們認為重力測量學在其他學科中所處的地位在很大程度上是有條件限制的，並且這門課程本身的存否也是有其條件的。因為按字義上說“重力測量學”就是“測量重力”；並且測量重力的方法通常是歸屬於重力測量學的范围，為研究某一對象而擬定應用重力測量數據的方法

也是屬於这门課程的範圍之內。例如在地球物理探勘中運用重力數據去尋找矿床，在地球物理中運用重力數據去測定地球的彈性和密度，在測量學中運用重力的數據去測定地球的形狀，在天體力學中則運用重力數據去研究月亮的運動，但是在我们研究的一些現象中，重力數據祇是解決一些較為特殊的問題，例如在天體力學中所解決的問。在其他的一些現象中，重力變化的影響也有其一般性的作用，並且要充分應用重力測量數據就需要有特殊的研究方法，一般是以位理論為基礎的方法。在這些情況中，課程裡所教的最基本的研究方法就經常是不夠的，因此研究問題的範圍要大々地擴大，直到新的學科出現為止，大概是這樣的情況，由高等測量學中分出地球形狀理論，從地質學中分出地球物理的矿床探勘，而從後者中又分出重力探勘。

在高等測量學中所以需要重力測量的實驗資料和位理論，簡言之，則是由於整個的大地測量是以鉛垂線（重力的作用線）作為定向方向線的緣故。測定地球形狀的最基本的重力測量方法，由於實驗資料的不多，因此所能測定的僅僅祇是近似的地球扁率，並且實際上它与三角測量和水准測量的整理計標還是不相連系的。根據所研究區域的大小以及所要求的精度鉛垂線可以認為是平面的法線，球面的法線或者是橢圓體的法線，但是橢圓體鉛垂線正交性的假說成立不久，就不能滿足測量學的要求，因為大地測量結果的精度並不是受到本身的測量精度的限制，而是受到計標方法的假說的限制。現在就產生了一個關於不要任何假定的問題，以及實際測定鉛垂線方向的問題，對於這樣的問題就要廣泛地應用實用天文學的測量數據。但是要在每種測量儀器（包括水准儀和基線測量儀器）的每個測站上都進行經度、緯度和方位角的測量，這個不論從那個角度去看，很顯然的，都是不合理的。即使不認為這種方法是非常繁重，但是由於天文觀測的精度對於上述目的來說也是不夠精確的，這個方法是不能運用的。因此這個問題就祇能近似地解決，因為只有很少的三角點兼有天文點（在克拉索夫斯基方案中是每隔 70 公里一個天文點）。而天文—大地測量方法進行地球形狀研究相平行發展的還有重力測量的方法——地球形狀理論——它与天文—大地測量的方法相較起來是各有其優缺點所在。

現在這兩種方法在蘇聯的實踐中，則是緊密地相互交織和相互補充着，並且這些方法的理論研究是以統一的觀點而共同進行，這個所以成為可能，是由於測量學中有位理論的方法和概念。

對於用來確定地球表面形狀的大地測量，天文測量和重力測量實驗數據的一般原則問題的研究在教學的過程中就因此而分出一個專門的課程——地球形狀理論。實質上，這就是說高等測量學中分出一門地球外部重力場的幾何學。

第一部份 牛顿位的理论

第一章 引力位的基本性质

§1. 引力位的类型。

向量位就是空间坐标的无向量函数，并且函数在已知点上对于变数 x, y, z 所取的偏导数就等于向量在这点已知点上对于相应的坐标轴的投影。

如果向量 $\vec{F}(x, y, z)$ 具有位 $V(x, y, z)$ 时，则

$$\vec{F}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0, z_0} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0, z_0} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{x_0, y_0, z_0} \vec{k} \quad (1.1)$$

当然不是任何向量都应该具有位的。但是本课程中将要研究的引力向量 $\vec{F}$ 及重力向量 $\vec{g}$ ，它们却都是具有单值位。

在位理论中一般是研究四种类型的引力位。

a. 点的位。

设有一个质量为 m 的质点 $A(a, b, c)$ 及质量为 m' 的任意一点 $B(x, y, z)$ ，它们之间就产生一个引力 $\vec{F}$ 。根据牛顿定律

$$\vec{F} = -f \frac{mm'}{r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

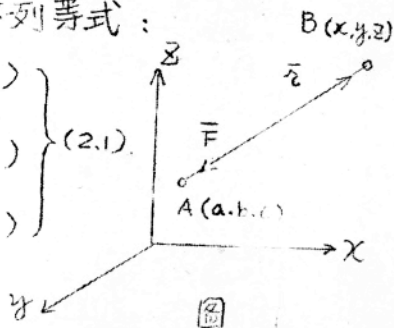
式中： $\vec{r} = (x-a)\vec{i} + (y-b)\vec{j} + (z-c)\vec{k}$;

f 为引力常数， $f = 0.6685 \cdot 10^{-7} \approx \frac{2}{3} \cdot 10^{-7}$

因此 $\vec{F} = f \cdot \frac{mm'}{r^3} [(x-a)\vec{i} + (y-b)\vec{j} + (z-c)\vec{k}]$

数值 $-\frac{x-a}{r}$, $-\frac{y-b}{r}$, $-\frac{z-c}{r}$ 则是向量 $\vec{F}$ 的方向余弦，即 $\cos(\vec{F}, x)$, $\cos(\vec{F}, y)$, $\cos(\vec{F}, z)$ 。由此求得下列等式：

$$\left. \begin{aligned} -\cos(\vec{F}, x) &= \frac{x-a}{r} = \cos(\vec{r}, x) \\ -\cos(\vec{F}, y) &= \frac{y-b}{r} = \cos(\vec{r}, y) \\ -\cos(\vec{F}, z) &= \frac{z-c}{r} = \cos(\vec{r}, z) \end{aligned} \right\} (2.1)$$



如所周知，向量位 $\vec{r}(x, y, z)$ 也就是函數

$$V(x, y, z) = f \frac{m m'}{r}$$

在不減少上式普遍性的情況下，為了便利起見，通常設 $m' = 1$ 克，故向量 $\vec{r}$ 和它的位 V 就僅取於變數 x, y, z 及常參數 m, a, b, c 。

$$V(x, y, z) = f \frac{m}{r} \quad (3.1)$$

d. 物体的位。

如果有一個參變密度為 $\delta(a, b, c)$ 的物体，那麼其單元體積 $da db dc = d\tau$ ，就有 $dm = \delta d\tau$ 的質量。它在點 $B(x, y, z)$ 上所構成的單元位為：

$$dV^r = f \frac{dm}{r}$$

或更詳細地寫為：

$$dV^r = \frac{f \delta(a, b, c) da db dc}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{1/2}}$$

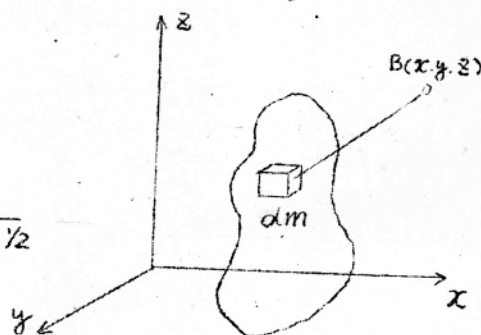


圖 2

如果將上式對物体的體積積分時，我們就得到整個物体所形成的位。

$$V(x, y, z) = f \iiint \frac{\delta(a, b, c) da db dc}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{1/2}}$$

積分極限則依物体的形狀而定。並且根據(1)式的定義，引力向量 $\vec{r}$ 將具有投影 $\frac{\partial V^r}{\partial x}, \frac{\partial V^r}{\partial y}, \frac{\partial V^r}{\partial z}$ 。

由於上式是按 a, b 和 c 而進行積分的，而數值 x, y, z 僅是起着參數的作用，因此我們可以在積分符號內進行微分：

$$\frac{\partial V}{\partial x} = f \iiint \delta \frac{\partial^{1/2}}{\partial x} da db dc \quad (5.1)$$

其次有

$$\frac{\partial^{1/2}}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} \quad (6.1)$$

但是 $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$ (7.1)

微分此式后，得： $r \frac{\partial r}{\partial x} = (x-a)$

顧及到(2.1)式就求出經常碰到的公式：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x-a}{r} = \cos(r, x) \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y-b}{r} = \cos(r, y) \\ \frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{z-c}{r} = \cos(r, z) \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

現在將(5.1)式寫為：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= -f \iiint_{\tau} \frac{\delta \cos(r, x)}{r^2} d\tau \\ \text{或} \quad \frac{\partial V}{\partial x} &= -f \iiint_{\tau} \frac{\delta (x-a)}{r^3} d\tau \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

關於這些引力 F 的分量 ($F_x = \frac{\partial V}{\partial x}$) 公式也可以直接地求得。
單元體積 $d\tau$ 在點 (x, y, z) 上所形成的單元引力為：

$$dF = -f \frac{dm}{r^2} \frac{r}{r}$$

它在 x 軸上的投影為：

$$dF_x = -f \frac{dm}{r^2} \frac{x-a}{r}$$

或

$$dF_x = -f \frac{\delta (x-a)}{r^3} d\tau = -f \frac{\delta \cos(r, x)}{r^2} d\tau$$

按物體體積積分此式后，就得到(9.1)式。

6. 單層位。

取兩個彼此間非常接近的封閉面 σ 和 σ' ，用 h 表示它們之間按 σ 的法線計量的距離，假設在 σ 和 σ' 之間的空間內，充滿着密度為 δ 的質量。在 σ 上取單位面積 $d\sigma$ 以后，法線 h 和面 σ 的一部份就限定了某些單元體積 $d\tau = h d\sigma$ ，包含在這個體積內的質量為 $dm = \delta h d\sigma$ 。

現區設面 σ 無限地接近於面 σ' ($h \rightarrow 0$)，並且每個單元體積的質量在這種情況下還是當作不變的。於是滿佈在面 σ 和 σ' 之間的所有的質量，都會壓縮在面 σ 上，這就是所要求得的單層。在每個單元層面 $d\sigma$ 上就含有單元質量 $dm = \delta h d\sigma$ ， δh 的乘積就叫做單層的密度並且以 μ 表示之。因此現在就有：

$$dm = \mu d\sigma \quad (10.1)$$

在點 (a, b, c) 上的層的單元質量，就形成了在點 (x, y, z) 上的單位位。

$$dV_{(x, y, z)}^{\sigma} = f \frac{\mu d\sigma}{r}$$

在 (x, y, z) 點上整個的單層位則為：

$$V_{(x, y, z)}^{\sigma} = f \iint_{\sigma} \frac{\mu(a, b, c) d\sigma}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{1/2}} \quad (11.1)$$

單層位的公式很像(4.1)式的體質位，兩者所不同的僅在於：一個是按體積來積分而另一個是按曲面來積分。而此相應，前者的密度是對體積而言。而後者的密度則對曲面而言。這種似乎是不大的變化，但在性質上却引起了很顯著的區別。

除了上述的三種類型以外，還有一種兩層位，但是在我們的這個課程中不去講述它。我們僅指出在某一區域內任何一個連續函數可以用質體位，單層位和雙層位表示之。

§.2 分佈在球面上的均勻單層位

假設分佈在半徑為 R 的球面上的單層，其密度 μ 為不變。根據公式(11.1)就計算得與球中心距離為 ρ 的B點上的位。坐標原點如果設在球的中心O點上，則B點的坐標即為 x, y 和 z 及 $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ 。根據直接計算的結果，(參看米哈依諾夫「重力測量學與地球形狀理論」1939年第42—46頁)就求得點 (x, y, z) 在球內或球外的位 V^{σ} 的各種不同的公式。

如果 $\rho > R$ ，則

$$V_c = 4\pi f \mu \frac{R^2}{\rho} \quad (12.1)$$

全樣如果 $\rho < R$ 則

$$V_i = 4\pi f \mu R \quad (13.1)$$

[見米哈依諾夫著：重力測量及地球形狀理論教程公式(12.1)]

如比較這兩個公式就可以很快地得出下面一個重要結論：引力位不能用一個整個空間的解析函數來表示。

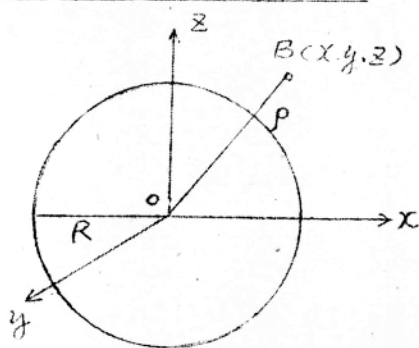


圖 3.

我們這個結論還是論証得不够的——我們只是研究一個特殊的情況——但是还得說明一下，這個結論無例外地對於所有的引力位都是正確的。引力位的這種性質也就決定了位理論的方法和可能性。

如引進單元層的质量 $M = 4\pi R^2 \mu$

則公式(12.1)和(13.1)的形式相應地為：

$$\left. \begin{aligned} V_c &= f \frac{M}{\rho} \\ V_i &= \frac{fM}{R} \end{aligned} \right\} \quad (14.1)$$

§3. 均匀球的位。

如果以 R 表示球的半径，而以 ρ 表示球的密度，则对于位的计算就需要利用 (4.1) 公式。

详细的叙述可以参考米哈依诺夫的教程 §13 (34-36 页) 但是其中所求得的两均匀球位的表示式则与计算球外或球内的位有关：

$$\text{当 } \rho > R \text{ 时, } V_e = \frac{4}{3} \pi \rho \frac{R^3}{\rho} \quad (15.1)$$

这个公式在米哈依诺夫的教程中可以从第 34 页或第一页的 (13.1) 式求得。

$$\text{当 } \rho < R \text{ 时, } V_i = \frac{2}{3} \pi \rho (3R^2 - \rho^2) \quad (16.1)$$

可以参考米哈依诺夫教程中公式 (13.2)

在比较 (15.1) 式和 (16.1) 式以后，我们仍然可以证明：在整個空间中位就不可能单用一个解析函数来表示。关于其他的结论，则请参考米哈依诺夫教程 §13。

§4. 均匀的平面单层的引力。

在平面 (xy) 上作法一个以坐标原点为中心而半径为 a 的圆 σ ，假设分佈在圆面上的单层密度 μ 是一个常数

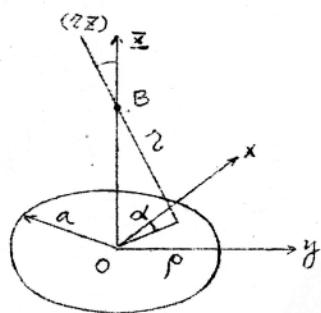


图 4.

这种单层对于 z 轴上 B 点的引力，很明显是与 B 点 ($0, 0, z$) 的坐标 z 有关，并且它的方向是经常地指向单层，如果 B 点趋向于无穷大 ($z \rightarrow \infty$) 引力就趋近于零。但在 z 的正轴上， B 点趋近于单层时 ($z \rightarrow 0$) 则引力的模不但随此而增加，并且它的方向始终是沿 z 轴的方向相反。在圆的中心

($z=0$) 引力就等於零。因为在圆内每一单元部份的引力是与分佈在直径方向上而距圆心相同距离的单元部份的引力互相平衡相等。最后，如果 B 点 (在被吸引点上也同时进行位和引力的计算) 通过原层，而在 z 的负轴上时，则引力的方向就与 z 的正轴方向相合。因此我们根据对称的原理就可以很清楚看到在 B 点 ($0, 0, z$) 的引力模

是等於B點(0,0,z)的引力模。

注意上述的這些原理時，我們就可以計算B點(0,0,±z)在z軸的任意方向時引力的分量 F_x , F_y , F_z 。

我們很快的就有： $F_x = F_y = 0$ 。 (17.1)

根據公式(9.1) F_z 可以按下式求得：

$$F_z = -f\mu \iint_{\sigma} \frac{\cos(\angle z)}{r^2} d\sigma \quad (18.1)$$

在平面(x,y)中引進極坐標 ρ, α 時則(參攷圖4)

$$r^2 = z^2 + \rho^2$$

當z為常數微分此等式則得：

$$-2zdz = \rho d\rho$$

以極坐標表示的圓單元 $d\sigma$ 為(參攷斯米爾諾夫“高等數學”第二卷第176—177頁)(譯本第二卷第二分冊第9頁第10式)

$$d\sigma = \rho d\rho d\alpha \quad \text{或} \quad d\sigma = r dr d\alpha$$

同樣可以從圖內得到

$$\cos(\angle z) = \frac{z}{r}$$

因此

$$F_z = -f\mu \int_{|z|}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}} \int_0^{2\pi} \frac{r dr d\alpha}{r^3}$$

或

$$\left. \begin{aligned} F_z &= -2\pi f\mu \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right] \quad \text{當 } z > 0 \\ F_z &= +2\pi f\mu \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right] \quad \text{當 } z < 0 \end{aligned} \right\} \quad (19.1)$$

這裏的“負號”則表示 $z > 0$ 時力 $\vec{F}$ 在z軸上的投影方向與z的正軸方向相反(即指向單層)。

其餘的某些結論請參攷米哈依諾夫教程70頁(譯本第102—103頁)在坐標原點上角 $(\angle z)$ 是永遠的等於 $\frac{\pi}{2}$ 並且 $\cos(\angle z) = 0$ 。因此