双博士系列

2005 考研辅导教材

2005年考研辅导教材

2005硕士研究生入学考试

应试教程

数学分册 · 经济类

编　写　双博士考研数学课题组

支　持　双博士在线

www.bbdd.cc

总策划　胡东华

双博士精品系

机械工业出版社

China Machine Press

考研辅导教材(2005 年版)

硕士研究生入学考试应试教程(数学分册)

[经济类]

编　写　双博士考研数学课题组
支　持　双博士在线 www.bbdd.cc
总策划　胡东华

机 械 工 业 出 版 社

声明：本书封面及封底均采用双博士品牌专用图标(见右图)；该图标已由国家商标局注册登记。未经本策划人同意，禁止其他单位或个人使用。

图书在版编目(CIP)数据

2005 硕士研究生入学考试应试教程. 数学分册：经济类/双博士考研数学课题组编写. -3 版. -北京：机械工业出版社，2004.3

考研辅导教材

ISBN 7-111-09977-×

Ⅰ.2...　Ⅱ.双...　Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ.G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 006574 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号　邮编：100037)

责任编辑：刘　永　　责任校对：娄合斌

封面设计：胡东华　　责任印制：何全君

北京市高岭印刷厂印刷　　机械工业出版社出版发行

2004 年 3 月第 3 版　第 1 次印刷

787mm×1092mm　1/16　印张 31.25　字数 638 千字

定价：36元

Preface

前　言

本教程去年版本押中或基本押中 2004 考研数学试题分数达 120 分。相信本书对参加 2005 年考研的考生同样具有重要意义。本书讲解详细透彻如师在侧，完全可以替代考研辅导班十几个小时名师辅导的效果。

本教程今年版本是在去年版的基础上，做了较大幅度的变革和修订，并依据考研大纲做了最新调整，为备战 2005 年考研考生量身打造，可做为考生第一轮复习用书。

本书强大的功能特点：

每章前将 93 年—04 年考题按考点、年份、分值列表，便于学生统览全章，高屋建瓴，有的放矢，把握复习方向；

第二个特点是以例题、自测题为本书主干，去除了基本知识点的重复表达。颠覆对知识点讲解的传统模式，培养考生通过实际题型来掌握发散知识点，及知识点的内在规律和应用技巧。

第三个特点是将例题按知识点分类为小节，使考生能系统掌握考点辐射的各种题型，举一反三并用灵活的经典例题来掌握各个知识点，做到真正意义上的知识点灵活掌握。

第四个特点是精选了考研试题，使考生熟悉考试命题规律，适应考试形势做好充分的准备。

第五个特点是各种符号公式使用最新标准，以适应标准化考试。

本书不仅是硕士研究生入学考试应试者的复习用书，也可作为正在学习微积分、线性代数、概率论与数理统计的学习参考书，也便于自学者学习时参考，本系列的第二轮用书《2005 年硕士研究生入学考试习题集冲刺试卷》（经济数三，数四）在 4 月份出版，本系列第三轮用书《2005 年硕士研究生入学考试最后冲刺》（经济数三，数四）在 9 月份出版。

考生在使用本书过程中遇到问题可登陆双博士在线 www.

bbdd. cc/本站论坛/我爱双博士下面留言提问，有问必答。在准备考研公共课和专业课中遇到的问题可登陆双博士在线 www. bbdd. cc 在线咨询。另外双博士在线在全国举行考研政治英语和西医巡回讲座，相关情况请登陆双博士在线。

双博士在线在考前提供密押试卷（政治、英语、西医），本试卷去年版直接命中 2004 考研真题。获取本试卷的具体方法为：揭开封面上的防伪标识，获得 10 位用户名和 6 位密码方可登陆。

目　录

第一篇　高等数学

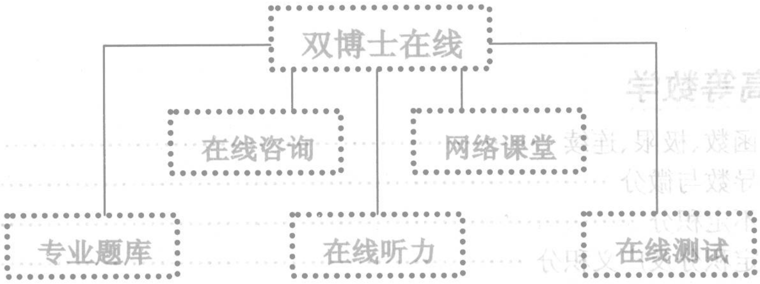
第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

第四篇　附录

注：带 * 篇、章，数四考生不必看.

双博士在线（www.bbdd.cc）黄金栏目介绍



双博士在线 （www.bbdd.cc）专业提供考研和四六级考试资源网站，日访问量超过 10000 次。

- **密押试卷：**
  考前在网络课堂中提供政治、英语考前押题密押试卷。去年密押试卷押中内容极多，具体对照见书中夹页。

- **在线咨询：**
  提供考研专业课和公共课个性化、一对一、实质性的专业咨询服务。专业课涵盖各个高校和研究所的所有硕士点专业。
  双博士在线聘用你欲报考学校在校优秀研究生作为您的专业咨询员，为你提供专家级的解答和服务。

- **网络课堂：**
  音频课件，面授感强
  本栏目需凭双博士考研图书封面上的防伪标识提供的 ID(十位数字)和 PW（六位密码）方可以登陆。

- **专业题库：**
  包括全国各高校和科研单位历年考研专业课试题。本栏目需凭双博士考研图书封面上的防伪标识提供的 ID(十位数字)和 PW（六位密码）方可以登陆。

- **在线听力：**
  包括真题及 20 套模拟试题，本栏目是同类网站中音频文件最为密集的栏目，而且全部是敞开式免费收听。练就此栏目的音频文件听力过关不用愁。

- **在线测试：**
  政治、英语、数学、西医、中医和 MBA 各科目，每一科目包括真题和模拟。

第一篇

高等数学

第一章　函数、极限、连续

数学三历年考点分布表

分数 年份 内容	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
函数						3					4
极限	3			9			3		8	4	12
连续			6	6	3	7		3	6	8	4

数学四历年考点分布表

分数 年份 内容	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
函数						3					4
极限	8			6	6	3	13		8	4	12
连续		6	6		3			3	6	8	4

§1.1　函　数

§1.1.1　函数的定义及表示

一、函数的基本概念

(一) 定义

给定两个变量 x 和 y,设变量 x 的变动区域为 D.

如果对于每一个 $x \in D$,按照一定的规则,都有一个确定的 y 与之对应,则称变量 y 为变量 x 的函数,记作

$$y = f(x)$$

其中,x 称为函数的自变量,y 称为因变量,f 表示对应规则,集合 D 称为函数的定义域,而因变量 y 的取值集合 $\{y = f(x) \mid x \in D\}$ 称为函数的值域.

(二) 表示

1. 上面的定义中,变量 y 与 x 之间的对应规则用 f 表示,当然也可以用别的字母表示,如 $F,g,\varphi,\cdots$;有时,甚至就记作 $y=y(x)$.

2. 通常,这种对应规则用解析式(公式)表达,它指示出为得到对应的 y,变量 x 的数值和一些常数所作的运算,如

$$y=\frac{1}{1+x^2},y=\ln[\arctan(\sqrt[3]{1-x^3})]$$

3. 如果我们考察函数 $y=f(x)$ 在某一特定的 $x=x_0\in D$ 的值,我们可以记为 $f(x_0)$ 或者 y_{x_0}. 回忆在积分中,$f(x)\Big|_{x_1}^{x_2}=f(x_2)-f(x_1)$.

4. 习惯上我们用 x 表示自变量,当然也可以用其他字母表示,如 $\varphi(t)=|t|$.

5. 函数的图像

给定函数 $y=f(x)$,对于定义域中的每一个 x,我们可以得到平面直角坐标系中的一个点 (x,y_x),于是可以画出函数的图像.

(三)要点

1. 函数的定义域

函数的定义域是自变量 x 的变化范围. 在函数的解析式表示下,函数的定义域就是使得解析表达式中各简单函数有意义的 x 的全体. 因此,读者应该记住表 1-1 中所列的各简单函数的定义域

表 1-1 简单函数的定义域

函数	定义域
$f(x)=1/x$	$x\neq 0$
$f(x)=\sqrt[2n]{x}$	$x\geqslant 0$
$f(x)=\log_a x$	$x>0$
$f(x)=\tan x$	$x\neq k\pi+\pi/2,k\in Z$
$f(x)=\cot x$	$x\neq k\pi,k\in Z$
$f(x)=\arcsin x$	$\|x\|\leqslant 1$
$f(x)=\arccos x$	$\|x\|\leqslant 1$

【例 1.1】 求函数 $f(x)$ 的定义域,其中

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}\log_{\sqrt[3]{x^2-5}}[\log_2(25-x^2)]$$

思路 求复杂函数的定义域,只需要解由简单函数的定义域所构成的不等式组.

【解答】 由简单函数的定义域,我们可以得到下面的不等式组

$$\begin{cases}x-1\geqslant 0\\ \sqrt{x-1}\neq 0\\ \sqrt[3]{x^2-5}>0\\ \sqrt[3]{x^2-5}\neq 1\\ 25-x^2>0\\ \log_2(25-x^2)>0\end{cases}$$

解之得 $\sqrt{5}<x<\sqrt{6}$ 或 $\sqrt{6}<x<2\sqrt{6}$,所以 $f(x)$ 的定义域为 $(\sqrt{5},\sqrt{6})\cup(\sqrt{6},2\sqrt{6})$.

【例 1.2】 设 $f(x)=\begin{cases}1,0\leqslant x\leqslant 1\\ -1,1<x\leqslant 2\end{cases}$,求下列函数的定义域:

(1) $f(x+1)$ (2) $f(\arctan x)$

【解答】 (1) 因 $f(x)=\begin{cases}1,0\leqslant x\leqslant 1\\ -1,1<x\leqslant 2\end{cases}$

故 $f(x+1)=\begin{cases}1,0\leqslant x+1\leqslant 1\\ -1,1<x+1\leqslant 2\end{cases}$

从而$f(x+1)=\begin{cases}1, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ -1, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$

即$f(x+1)$的定义域为$[-1,1]$

(2)$f(\arctan x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant \arctan x\leqslant 1\\ -1, & 1<\arctan x\leqslant 2\end{cases}$

$$=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{\pi}{4}\\ -1, & \dfrac{\pi}{4}<x\leqslant \tan 2\end{cases}$$

所以$f(\arctan x)$的定义域是$[0,\tan 2]$

函数相同有两个必要条件
(1) 定义域相同
(2) 对应规则相同

2. 定义域和对应规则

定义域和对应规则是函数的两要素. 两个函数相等,当且仅当它们的定义域和对应规则都相同.

【例 1.3】　下列函数中,与$f(x)=\sqrt{\ln^2 x}$相等的函数是(　　)

(A) $\dfrac{1}{2}\ln x^2$　　(B) $\ln|x|$　　(C) $\dfrac{d}{dx}\left(\int_0^x|\ln t|\,dt\right)$　　(D) $\ln x$

思路　通常我们采用下面两个步骤来判断两个函数$f(x)$和$g(x)$是否相等:

(1) 考察它们的定义域. 若定义域不同,则两个函数不相等.

(2) 对于定义域中的每一个x,考察值$f(x)$和$g(x)$是否相等. 只要定义域中有一个x_0使得$f(x_0)\neq g(x_0)$,则两个函数不相等;如果定义域中每个x对应的函数值都相等,则两个函数相等.

【解答】　$f(x)=\sqrt{\ln^2 x}=|\ln x|=\begin{cases}\ln x, & x\geqslant 1\\ -\ln x, & 0<x<1\end{cases}$

选项(A)与$f(x)$的对应规则不同,而选项(B)与$f(x)$的定义域不同,选项D与$f(x)$定义域相同但对应法则不同,只剩下(C).

首先,(C)的定义域为$x>0$,与$f(x)$的定义域相同;其次令

$$g(x)=\frac{d}{dx}\left(\int_0^x|\ln t|\,dt\right)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left[\left(\int_0^1(-\ln t)dt+\int_1^x\ln t\,dt\right]=\ln x, & x\geqslant 1\right.\\ \dfrac{d}{dx}\left(\int_0^x(-\ln t)dt\right)=-\ln x, & 0<x<1\end{cases}$$

即　$f(x)=g(x),\forall x\in(0,\infty)$

所以(C)与$f(x)$相等.

二、特殊函数举例

1. 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

2. 取整函数

$y=[x]=$不超过x的最大整数

3. 狄利克莱 (Dirichlet) 函数

$$y=f(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$$

§1.1.2　函数的基本性质

一、奇　偶　性

(一) 奇函数与偶函数

1. 设函数$f(x)$在集合D上有定义且D关于原点对称,如果

$f(x) = -f(-x)$　(或$f(x) = f(-x)$),$\forall x \in D$,则称函数$f(x)$为奇函数(或偶函数)

注意函数的奇偶性的前提是定义域关于原点对称.

2. 在平面直角坐标系中,奇函数的图像关于坐标原点对称,而偶函数的图像关于y轴对称.

3. 奇函数的代数和仍是奇函数,偶函数的代数和仍为偶函数.

偶函数的乘积仍是偶函数;偶数个奇函数的乘积也是偶函数,但奇数个奇函数的乘积是奇函数,奇函数 × 偶函数 = 奇函数.

(二) 常见奇偶函数举例

1. 奇函数,$\sin x$,$\arcsin x$,$\tan x$,$\arctan x$,x^{2n+1},$\frac{1}{x}$,…

2. 偶函数,$|x|$,x^{2n},$\cos x$,$e^{\pm x^2}$,…

(三) 奇偶性在积分中的应用

设$f(x)$是奇函数,定义域为D并设对称区间$[-a,a] \subset D$,$a>0$,$f(x)$在$[-a,a]$上可积,则

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= \int_{a}^{0} f(-y)\,d(-y) + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= \int_{a}^{0} -f(y)(-1)\,dy + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= -\int_{0}^{a} f(y)\,dy + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= 0\end{aligned}$$

即奇函数在对称区间上积分为0.

现在,设$f(x)$是D上的偶函数,对称区间$[-a,a] \subset D$,$a>0$,且$f(x)$在$[-a,a]$上可积,则

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= \int_{a}^{0} f(-y)\,d(-y) + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= \int_{0}^{a} f(y)\,dy + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\ &= 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx\end{aligned}$$

【例 1.4】　设随机变量X的密度$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$,求$X$的期望和方差.

思路　随机变量的期望$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx$,方差$DX = E(x-EX)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-EX)^2 p(x)\,dx$.

【解答】　$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x \cdot \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}\,dx$

因为x是$(-1,+1)$上的奇函数,而$\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$是$(-1,+1)$上的偶函数,故$x \cdot \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$是$(-1,+1)$上的奇函数,由前面的结论,有

$EX = \int_{-1}^{1} x \dfrac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = 0$,于是,$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^2 \dfrac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$

因为 $x^2 \cdot \dfrac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}}$ 是 $(-1, +1)$ 上的偶函数,故

$$DX = 2\int_0^1 x^2 \cdot \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cdot \frac{1}{\pi \cos t} \mathrm{d}\sin t$$

作积分变换 $x = \sin t$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{\pi} \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) \mathrm{d}t$$

$\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

注　积分中注意利用奇函数在对称区间上积分为零,有时可以大大简化计算.

二、周　期　性

(一) 基本概念

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义,若存在正整数 T,使下式成立.

$f(x+T) = f(x), \forall x \in (-\infty, +\infty)$,　　则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

显然,若 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数,则 kT(k 为正整数)都是函数 $f(x)$ 的周期. 故通常称满足上式的最小正数 T 为函数 $f(x)$ 的周期.

2. 若 T 为 $f(x)$ 的周期,则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\dfrac{T}{|a|}$.

若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别以 T_1、T_2 为周期,则 $f(x) \pm g(x)$ 的周期为 T_1、T_2 的最小公倍数.

3. 简单三角函数 $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$ 都是周期函数,其中,$\sin x, \cos x$ 的周期都是 2π,而 $\tan x$ 和 $\cot x$ 的周期都是 π.

利用前面的性质可知 $\sin x + \tan x$ 的周期是 2π,而 $\sin \dfrac{x}{2}$ 的周期是 4π,值得注意的是 $|\sin x|$, $|\cos x|$ 的周期是 π.

(二) 例题解析

【例 1.5】　设对一切实数 x,有 $f(\frac{1}{2} + x) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$,试判断 $f(x)$ 是否为周期函数.

思路　一般函数的周期性及周期只能通过定义来判定或求出.

【解答】　由题设有

$$f(1+x) = f[\frac{1}{2} + (\frac{1}{2} + x)] = \frac{1}{2} + \sqrt{f(\frac{1}{2} + x) - f^2(\frac{1}{2} + x)}$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}) - (\frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)})^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - [f(x) - f^2(x)]}$$

$$= \frac{1}{2} + \sqrt{[\frac{1}{2} - f(x)]^2}$$

注意到　$f(x) = f[\frac{1}{2} + (x - \frac{1}{2})] = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x - \frac{1}{2}) - f^2(x - \frac{1}{2})} \geqslant \frac{1}{2}$,故

$$f(1+x) = \frac{1}{2} + \sqrt{[f(x) - \frac{1}{2}]^2} = \frac{1}{2} + f(x) - \frac{1}{2} = f(x)$$

故$f(x)$是周期函数，且$T=1$是$f(x)$的周期.

【例 1.6】 设周期函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，周期为4，又$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线$y=f(x)$在点$(5,f(5))$处的切线的斜率为（　　）

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) 0　　(C) -1　　(D) -2

思路　曲线在某一点$(x_0,f(x_0))$的切线的斜率为$f'(x_0)$，故我们只需计算$f'(5)$. 进一步，由周期性有$f(x+4)=f(x)$，从而$f'(x+4)=f'(x)$，所以$f'(5)=f'(1)$，而$f'(1)$由已知可以求得.

【解答】 由已知，有 $-1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-x)-f(1)}{-x}=\dfrac{1}{2}f'(1)$

于是$f'(1)=-2$.

又有周期性，有$f(x+4)=f(x)$，两边对x求导得

$$f'(x+4)=f'(x)$$

故　$f'(5)=f'(1)=-2$，所以答案为(D).

三、有　界　性

1. 设函数$y=f(x)$在D上有定义，若存在$M>0$，使得对任意的$x\in D$，都有$|f(x)|\leqslant M$. 则称$f(x)$在D上有界.

如果对任意的$M>0$，都存在$x\in D$，使$|f(x)|>M$，则称$f(x)$在D上无界.

2. 常见的有界函数

(1)　$|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，$x\in(-\infty,+\infty)$

$|\arcsin x|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，$|\arccos x|\leqslant\pi$，$x\in[-1,1]$

$|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$，$|\operatorname{arccot} x|<\pi$，$x\in(-\infty,+\infty)$

$|e^{-x}|\leqslant 1$，$x\in[0,+\infty)$

(2) 闭区间上的连续函数有界.

四、单　调　性

(一) 基本概念

设函数$f(x)$在区间D上有定义，如果对任意$x_1,x_2\in D$，$x_1<x_2$，都有$f(x_1)\leqslant f(x_2)$　(或$f(x_1)\geqslant f(x_2)$)则称$f(x)$在区间D上单调递增(或单调递减).

若上式中的"$\leqslant$"(或"$\geqslant$")换成"$<$"(或"$>$")，则称$f(x)$在区间D上严格单调递增(或严格单调递减).

(二) 函数单调性的讨论

1. 并非所有函数都有单调性，如狄利克莱函数就没有单调性.

2. 函数可能在一个区间内单调，而在另一些区间上不单调，如$\sin x$在$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调，而在$[0,\pi]$上不单调.

3. 反函数与原函数的单调性相同，如$y=\log_a x\ (a>1)$在$(0,\infty)$上严格递增，值域为$(-\infty,+\infty)$；其反函数为$y=a^x\ (a>1)$在$(-\infty,+\infty)$上严格递增.

4. 由非负函数的变上限积分定义的函数单调递增，即设$f(x)\geqslant 0$，$x\in(-\infty,+\infty)$，且$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可积，则$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增.

5. 随机变量的分布函数单调递增.

(三) 函数单调性的判定

定理 1.1　设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义,在 D 内连续,而且 $f(x)$ 在 D 的内部有导数 $f'(x)$,则 $f(x)$ 在 D 内单调递增(递减)的充分而且必要的条件是对于 D 内部的任何 x,有 $f'(x) \geqslant 0(\leqslant 0)$. 若上面的"$\geqslant$"("$\leqslant$")换成"$>$"("$<$"),则 $f(x)$ 在 D 上严格单调递增(递减). 对于满足定理 1.1 条件的函数,我们通常通过其导数来讨论其单调性.

于是 $F(x)$ 满足定理的条件,我们通过其导数 $F'(x)$ 来研究其单调性.

【例 1.7】　设 $f(x) \neq 0$ 是连续函数,又 $F(x) = \int_0^x [x^{2n} - (2n+1)t^{2n}] \cdot f(t)\mathrm{d}t$,其中 $n \geqslant 1$ 为整数,试根据 $f(x)$ 的单调性讨论 $F(x)$ 的单调性.

思路　$F(x)$ 是由变上限积分定义的函数,且 $f(x)$ 连续.

【解答】　由变上限积分求导的公式有

$$\begin{aligned}
F'(x) &= [x^{2n}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - (2n+1)\int_0^x t^{2n}f(t)\mathrm{d}t]' \\
&= x^{2n}f(x) + 2nx^{2n-1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - (2n+1)x^{2n}f(x) \\
&= 2nx^{2n-1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - 2nx^{2n-1}\int_0^x f(x)\mathrm{d}t \\
&= 2nx^{2n-1}\int_0^x [f(t) - f(x)]\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

注意到: $xf(x) = \int_0^x f(x)\mathrm{d}t$

下面我们用两种方法来讨论.

方法一:　(1) 当 $f(x)$ 单调递减时,则当 $x \geqslant 0$ 时,对于 $0 \leqslant t \leqslant x$,有 $f(t) - f(x) \geqslant 0$,于是

$$F'(x) = 2nx^{2n-1}\int_0^x [f(t) - f(x)]\mathrm{d}t \geqslant 0, x \geqslant 0$$

而当 $x < 0$ 时,对于 $x \leqslant t \leqslant 0$,有 $f(x) - f(t) \geqslant 0$,于是

$$\begin{aligned}
F'(x) &= 2nx^{2n-1}\int_0^x [f(t) - f(x)]\mathrm{d}t \\
&= 2nx^{2n-1}\int_x^0 [f(x) - f(t)]\mathrm{d}t, x < 0
\end{aligned}$$

注意到　此时 $x^{2n-1} < 0$,而 $\int_x^0 [f(x) - f(t)]\mathrm{d}t \geqslant 0$,故

$$F'(x) \leqslant 0, x < 0.$$

所以,当 $f(x)$ 单调递减时,$F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,而在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减.

(2) 当 $f(x)$ 单调递增时,可类似讨论得 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减,而在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增.

方法二:　利用积分中值定理,得 $F'(x) = 2nx^{2n}[f(\xi) - f(x)]$,$\xi$ 介于 0 与 x 之间.

(1) 若 $f(x)$ 单调递增,在 $x \in [0, +\infty)$ 时,$0 \leqslant \xi \leqslant x$,$f(\xi) - f(x) \leqslant 0$,从而 $F'(x) \leqslant 0$

在 $x \in (-\infty, 0)$ 时,$x \leqslant \xi \leqslant 0$,$f(\xi) - f(x) \geqslant 0$,从而 $F'(x) \geqslant 0$

所以若 $f(x)$ 单调递增,$F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减,而在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增.

(2) 若 $f(x)$ 单调递减,可类似讨论得 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增,而在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减.

最后,当 $f(x)$ 没有单调性时,$F(x)$ 也没有单调性.

§1.1.3　反函数、复合函数

一、分段函数

1. 如果一个函数在其定义域内,对应于不同的区间段有不同的表达式,则该函数称为分段函数.

2. 前面介绍过的符号函数、取整函数、狄利克莱函数都是分段函数. 离散型随机变量的分布函数,一般也是分段函数.

二、反 函 数

(一) 基本概念与性质

1. 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 X,值域为 Y,如果对于 Y 中任一 y 值,由关系式 $y = f(x)$ 可确定惟一的一个 x 值与之对应,则变量 x 也可视为变量 y 的函数,记作 $x = \varphi(y), y \in Y, \varphi(y)$ 称之为函数 $y = f(x)$ 的反函数. 由于习惯上以 x 为自变量,故 $y = f(x)$ 的反函数通常记为 $y = f^{-1}(x)$. 注意反函数的定义域为原函数的值域.

2. 只有一一对应的函数才有反函数,特别需要指出的是,偶函数没有反函数,如 $y = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上没有反函数,但是函数 $y = x^2, x \in [0, +\infty)$ 是一一对应的,故有反函数 $f^{-1}(x) = \sqrt{x}, x \in [0, +\infty)$.

3. $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.

(二) 反函数的求法

通常,我们通过下面的步骤求解反函数:

(1) 从 $y = f(x)$ 中反解出 $x = \varphi(y)$;

(2) 将 $x = \varphi(y)$ 中 x 与 y 对换,即求得原函数的反函数 $y = \varphi(x)$;

(3) 原函数的值域是反函数的定义域.

下面我们求一个分段函数的反函数:

【例 1.8】 设 $y = f(x) = \begin{cases} x, -\infty \leqslant x < 1 \\ x^2, 1 \leqslant x \leqslant 4, \\ 2^x, 4 < x < +\infty \end{cases}$,求 $f^{-1}(x)$.

思路 只需要分段求出各段的反函数及相应的反函数的定义域即可.

【解答】 首先我们求出各段的值域,$y = f(x) = \begin{cases} x, -\infty < x < 1, -\infty < y < 1 \\ x^2, 1 \leqslant x \leqslant 4, 1 \leqslant y \leqslant 16 \\ 2^x, 4 < x < +\infty, 16 < y < +\infty \end{cases}$

其次,我们分段反解出 x

$$x = \begin{cases} y, -\infty < y < 1 \\ \sqrt{y}, 1 \leqslant y \leqslant 16 \\ \log_2 y, 16 < y < +\infty \end{cases}$$

最后,我们得到原函数的反函数 $f^{-1}(x) = \begin{cases} x, -\infty < x < 1 \\ \sqrt{x}, 1 \leqslant x \leqslant 16 \\ \log_2 x, 16 < x < +\infty \end{cases}$

三、复合函数

(一) 基本概念与性质

1. 设函数 $y = f(u)$ 的定义域 U_1 与 $u = \varphi(x)$ 的值域 U_2 交集非空,则称函数 $y = f(\varphi(x))$ 为 x 的复合函数. 此时,x 为自变量,y 为因变量,而 u 称为中间变量.

2. 前面我们已经指出,定义域和对应规则是函数的两要素,对于上面定义的复合函数 $y = f(\varphi(x))$,其对应规则已经明显给出,这里我们有必要讨论一下其定义域.

设 $u = \varphi(x)$ 的定义域为 X,则有复合函数的定义域 D 为 $D = \{x \in X \mid \varphi(x) \in U_1 \cap U_2\}$

如函数 $y = f(u) = \arcsin u$ 的定义域为 $U_1 = \{u \mid |u| \leqslant 1\}$,函数 $u = \ln x$ 的定义域为 $X = \{x \mid x > 0\}$,值域为 $U_2 = (-\infty, +\infty)$,故复合函数 $y = f(\varphi(x)) = \arcsin(\ln x)$ 的定义域 D 为 $D = \{x \in X \mid \ln x \in U_1 \cap U_2\}$
$= \{x > 0 \mid |\ln x| \leqslant 1\}$
$= \{x \mid \frac{1}{e} \leqslant x \leqslant e\}$

3. 设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 U,值域为 Y,且 U 和 Y 之间一一对应,则有反函数 $u = \varphi(y)$.

(二) 复合函数的求法

我们通过例子来介绍复合函数的求法.

【例 1.9】 设$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,令$f_n(x)=\underbrace{f(f\cdots(f(x))\cdots)}_{n重}$,试求$f_n(x)$.

思路　注意$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,而值域为$(-1,1)$,所以函数$f(x)$可以进行自身复合. 对于非分段函数的复合,宜用直接代入法.

【解答】

$$f_1(x)=f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$f_2=f(f(x))=f\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}$$

$$=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{\frac{1+2x^2}{1+x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

进一步,$f_3(x)=f(f_2(x))=f\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\right)$

$$=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\right)^2}}$$

$$=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{\frac{1+3x^2}{1+2x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

于是可以猜想$f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$,这用归纳法容易得到证明,此略.

注　设$f(x)=1+x^2,x\in[0,1)$,则由于$f(x)$的值域为$[1,2)$,与定义域的交集为空,从而$f(x)$不能与其自身复合.

【例 1.10】 设$f(x)=\begin{cases}x,x>0\\1+x,x\leqslant 0\end{cases}$,$g(x)=\begin{cases}-x^2,x>0\\x,x\leqslant 0\end{cases}$,试求$g(f(x))$.

思路　对于分段函数的复合,我们首先需要更加仔细地考察各函数在各段上的定义域和值域,然后再分段复合.

【解答】 考虑到$g(x)$的分段情况,我们需要对$f(x)$的值域区分大于0和小于0两种情况,而

$$f(x)=\begin{cases}x,x>0\\1+x,\quad x\leqslant 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x,x>0,\quad f(x)>0\\1+x,\quad -1<x\leqslant 0,\quad 0<f(x)\leqslant 1\\1+x,x\leqslant -1,\quad f(x)\leqslant 0\end{cases}$$

于是,$g(f(x))=\begin{cases}-[f(x)]^2,\quad f(x)>0\\f(x),\quad f(x)\leqslant 0\end{cases}$

$$=\begin{cases}-x^2,\quad x>0\\-(1+x)^2,\quad -1<x\leqslant 0\\1+x,\quad x\leqslant -1\end{cases}$$

§1.1.4 初等函数

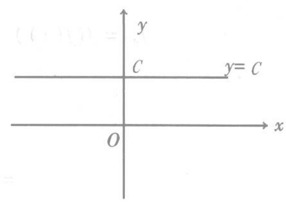
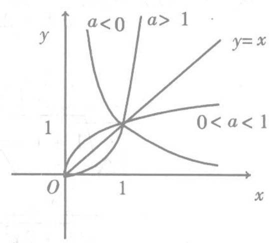
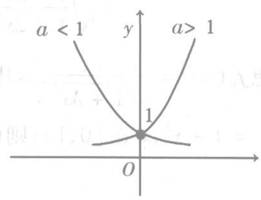
1. 由基本初等函数经过有限次四则运算及复合运算所得到的函数称为初等函数.

2. 基本初等函数指以下六大类函数:

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.

它们的基本性质和图像总结于表 1-2.

表 1-2 基本初等函数

名称	定义式及性质	图例
常数函数	$y(x)=C,(-\infty<x<+\infty)$. 平行于 x 轴,过 $(0,C)$ 点的直线	
幂函数	$y=x^a,(0<x<+\infty,a\neq 0)$ $a>0$ 时,函数 x^a 在 $(0,+\infty)$ 上严格上升 $a<0$ 时,函数 x^a 在 $(0,+\infty)$ 上严格下降 $y=x^a$ 与 $y=x^{\frac{1}{a}}$ 互为反函数	
指数函数	$y=a^x(a>0,a\neq 1)$ $a>1$ 时,函数 $y=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格上升 $a<1$ 时,函数 $y=a^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格下降	
对数函数	$y=\log_a x(a>0,a\neq 1,0<x<+\infty)$ $a>1$ 时,函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格上升 $a<1$ 时,函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格下降 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 互为反函数(若 $a=e$,记 $y=\log_e x$ 为 $y=\ln x$)