一元函数积分学

汪 浩 吴克裘 赵美锡 编

中国人民解放军国防科学技术大学

1979年7月

目　录

第六章　原函数

第七章　定积分

第八章　定积分的应用

冯春海　科大

一九八〇年二月二十六日

第六章 原 函 数

§ 6.1 原函数与不定积分

本章研究微分运算的逆运算。

定义 1 在区间Δ上，函数$F(x)$被称为函数$f(x)$或微分$f(x)dx$的一个原函数，是指：

$$F'(x)=f(x) \qquad (x\in\Delta),$$

或即

$$dF(x)=f(x)dx \qquad (x\in\Delta, x+dx\in\Delta).$$

例 1 在区间$(-\infty,+\infty)$上，$F(x)=\mathrm{tg}^{-1}x$是函数$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$的一个原函数，因为

$$(\mathrm{tg}^{-1}x)'=\frac{1}{1+x^2} \qquad (-\infty<x<+\infty).$$

在同一区间上，微分$3x^2dx$的一个原函数是x^3，因为

$$d(x^3)=3x^2dx \quad (-\infty<x<+\infty, -\infty<x+dx<+\infty).$$

例 2 函数$f(x)=\dfrac{1}{x}(x\neq0)$在区间$(0,+\infty)$上的一个原函数是$\ln x$；在区间$(-\infty,0)$上的一个原函数是$\ln(-x)$。因为

$$(\ln x)'=\frac{1}{x} \qquad (0<x<+\infty);$$

$$[\ln(-x)]'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x} \quad (-\infty<x<0).$$

因此，不论在区间 $(-\infty,0)$ 上或者在区间 $(0,+\infty)$ 上，函数 $f(x)=\frac{1}{x}(x\neq0)$ 的一个原函数总可以用 $\ln|x|$ 来表示。

例 3 符号函数 (可积．但不存在原函数，但在 $(0,+\infty)$ 或 $(-\infty,0]$ 上存在原函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & (x>0),\\ 0 & (x=0),\\ -1 & (x<0).\end{cases}$$

在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上不存在原函数。如果不然，假如存在一个函数 $F(x)$ 适合 $F'(x)=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$，则因 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，故 $x=0$ 也是 $F'(x)$ 的第一类间断点，这与导函数不可能有第一类间断点的事实矛盾（参阅一元函数微分学，第 192 页，第 16 题）。因此 $\operatorname{sgn}x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上不存在原函数。但是，在区间 $(0,+\infty)$ 上 $\operatorname{sgn}x$ 却存在原函数 $F_1(x)=x$；在区间 $(-\infty,0)$ 上 $\operatorname{sgn}x$ 也存在原函数 $F_2(x)=-x$.

由例 3 可以知道，并非一切函数在其有定义的区间上都存在原函数。但是，我们指出：在区间 $\varDelta$ 上的连续函数 $f(x)$ 都存在原函数（严格的证明在第七章中给出）。

以后如无特殊声明，所论区间 $\varDelta$ 均指使 $f(x)$ 存在原函数的区间，并且在计算时往往将 $\varDelta$ 略去不写。

定理 在区间 $\varDelta$ 上，设 $F(x)$ 为函数 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(x)+C$ 亦为 $f(x)$ 的原函数，其中 C 为任意常数；又设 $\Phi(x)$ 为函数 $f(x)$ 在区间 $\varDelta$ 上的任意一个原函数，则 $\Phi(x)$ 必可表示成：$\Phi(x)=F(x)+C_1$，其中 C_1 为某一常数。

证 设 $F(x)$ 为函数 $f(x)$ 在区间 $\varDelta$ 上的一个原函数，C 为任意常数，易知

$$[F(x)+C]'=F'(x)=f(x)\qquad(x\in\varDelta),$$

故 $F(x)+C$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $\varDelta$ 上的原函数。

其次，设$F(x)$与$\Phi(x)$都是函数$f(x)$在区间$\varDelta$上的原函数，易知

$$[\Phi(x)-F(x)]'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0 \quad (x\in\varDelta),$$

因此，函数$\Phi(x)-F(x)$在区间$\varDelta$上恒为常数，记此常数为C_1，于是就有$\Phi(x)=F(x)+C_1 \quad (x\in\varDelta)$.

定义 2 在区间$\varDelta$上，函数$f(x)$或微分$f(x)dx$的原函数的全体（如果存在的话），称为函数$f(x)$或微分$f(x)dx$的不定积分，记作

$$\int f(x)dx \quad (x\in\varDelta).$$

这里x称为积分变量，$f(x)$称为被积函数，$f(x)dx$称为被积表达式[1]。

由上述定理可知，如果在区间$\varDelta$上函数$f(x)$的一个原函数为$F(x)$，那末函数$f(x)$的不定积分可以表示成：

$$\int f(x)dx=F(x)+C \qquad (x\in\varDelta),$$

其中C为任意常数[2]。

求函数$f(x)$或微分$f(x)dx$在区间$\varDelta$上的不定积分的方法，称为不定积分法，简称积分法。积分法与微分法具有下述相逆关系：

（i） 如果函数$f(x)$在区间$\varDelta$上存在原函数$F(x)$，则有

$$\left\{\int f(a)dx\right\}'=\left\{F(x)+C\right\}'=F'(x)=f(x) \quad (x\in\varDelta);$$

---

[1] 函数$f(x)$的不定积分$\int f(x)dx(x\in\varDelta)$是由函数$f(x)$在区间$\varDelta$上的原函数所构成的函数集合，啥作：积分$f(x)dx$.

[2] 以后如无特殊声明，C为任意常数这个附加语均省略不写，我们约定C就是指任意常数。

$$d\left\{\int f(x)dx\right\}=d\left\{F(x)+C\right\}=dF(x)$$
$$=f(x)dx\quad(x\in\varDelta, x+dx\in\varDelta).$$

(ii) 如果函数$F(x)$在区间$\varDelta$上可微分，则有

$$\int F'(x)dx=F(x)+C\quad(x\in\varDelta);$$

$$\int dF(x)=F(x)+C\quad(x\in\varDelta);$$

因此可知，不定积分法是微分法的逆运算。

我们将基本初等函数的微分公式逆转过来使用，就可以得到一系列基本的不定积分公式，简称积分基本公式：

$$\int 0dx=C\quad(-\infty<x<+\infty).\tag{1}$$

$$\int 1dx=\int dx=x+C\quad(-\infty<x<+\infty).\tag{2}$$

$$\int x^{a}dx=\frac{1}{a+1}x^{a+1}+C\quad(x>0,\text{常数 }a\neq-1).^{❶}\tag{3}$$

$$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C\quad(-\infty<x<0\text{或}0<x<+\infty).\tag{4}$$

$$\int e^{x}dx=e^{x}+C\quad(-\infty<x<+\infty).\tag{5}$$

$$\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+C\quad(-\infty<x<+\infty,\text{常数}a>0,\ a\neq1).$$

$$\int\sin xdx=-\cos x+C\quad(-\infty<x<+\infty).\tag{6}$$

$$\int\cos xdx=\sin x+C\quad(-\infty<x<+\infty).$$

---

❶ 公式(3)中所论区间可能是$(-\infty,+\infty)$，也可能是$(-\infty,0)$或$(0,+\infty)$，视实数$a\neq-1$的情况而定。

$$\int \sec^2 x dx = \mathrm{tg} x + C\left(k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \frac{\pi}{2}, k\text{为整数}\right). \tag{7}$$

$$\int \csc^2 x dx = -\mathrm{ctg} x + C \quad (k\pi < x < (k+1)\pi,\ k\ \text{为整数}).$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C = -\cos^{-1} x + C \quad (-1 < x < 1). \tag{8}$$

$= -\mathrm{arcctg}\, x + C'$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{tg}^{-1} x + C \quad (-\infty < x < +\infty). \tag{9}$$

$$\int \mathrm{sh}\, x dx = \mathrm{ch}\, x + C \quad (-\infty < x < +\infty). \tag{10}$$

$$\int \mathrm{ch}\, x dx = \mathrm{sh}\, x + C \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{sh}^{-1} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C \quad (-\infty < x < +\infty). \tag{11}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \mathrm{ch}^{-1} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C \quad (1 < x < +\infty). \tag{12}$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = th^{-1} x + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C \quad (-1 < x < 1).\text{❶} \tag{13}$$

对于微分法来说，按照导数的定义，我们不难直接地求得基本初等函数的导函数；并且在建立一系列微分法则以后，我们很容易就能求得一切初等函数的导函数。

---

❶ 在区间$(-\infty,\ -1)$上，公式(12)要稍作修正；在区间$(-\infty,\ -1)$或者区间$(1,\ +\infty)$上，公式(13)同样要稍作修正。请读者留意§6.3 例4 及§6.2 例8。

对于积分法来说，情况就沒有这么顺利，按照原函数及不定积分的定义，我们甚至不能直接获知某些基本初等函数的不定积分，例如

$$\int \operatorname{tg} x dx, \qquad \int \ln x dx, \qquad \int \sin^{-1} x dx$$

的具体表达式。并且我们予先指出，即使在建立一系列常用的积分法则以后，我们仍然不能完全解决寻求初等函数的原函数的问题。

这里基本的原因在于：导数的定义

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad (x\in\varDelta)$$

具有"构造性"，它不仅规定了函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 的意义，同时指出了如何计算导数的方法（化为极限的运算）；相反，不定积分的定义

$$\int f(x)dx=F(x)+C \qquad (x\in\varDelta)$$

却不具有"构造性"，它只规定了函数 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 必须适合关系式 $F'(x)=f(x)$ $(x\in\varDelta)$，而沒有指示出如何由 $f(x)$ 寻求 $F(x)$ 的具体方法。

因此，以积分基本公式 (1)—(13) 作为基础，进一步建立一些常用的积分法则（§§6.2—6.4）来扩大积分基本公式的应用范围，从而获得一系列常用的初等函数的不定积分(§§6.5—6.7)，便组成本章所要研究的全部內容。

§ 6.2 基本的积分法则

法则 1 在区间$\varDelta$上，函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 分别存在原函数，则函数 $f(x)+g(x)$ 在区间$\varDelta$上也存在原函数，且

$$\int [f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx \quad (x\in\varDelta).$$

证 设 $F(x)$，$G(x)$ 分别为 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 $\varDelta$ 上的原函数，则有

$$F'(x)=f(x),\ G'(x)=g(x)\quad(x\in\varDelta),$$

从而

$$[F(x)+G(x)]'=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)\quad(x\in\varDelta).$$

因此 $f(x)+g(x)$ 在区间 $\varDelta$ 上存在一个原函数 $F(x)+G(x)$，并且

$$\int[f(x)+g(x)]dx=F(x)+G(x)+C$$

$$=\int f(x)dx+\int g(x)dx\quad(x\in\varDelta).$$

法则 2 在区间 $\varDelta$ 上，函数 $f(x)$ 存在原函数，则函数 $a\cdot f(x)$（常数 $a\neq0$）在区间 $\varDelta$ 上也存在原函数，且

$$\int a\cdot f(x)dx=a\cdot\int f(x)dx\quad(x\in\varDelta).$$

证 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 $\varDelta$ 上的一个原函数，则有

$$F'(x)=f(x)\quad(x\in\varDelta),$$

从而 $$[a\cdot F(x)]'=a\cdot F'(x)=a\cdot f(x)\quad(x\in\varDelta),$$

因此 $a\cdot f(x)$ 在区间 $\varDelta$ 上存在一个原函数 $a\cdot F(x)$，并且

$$\int a\cdot f(x)dx=a\cdot F(x)+C\quad(x\in\varDelta),$$

又常数 $a\neq0$，故得

$$\int a\cdot f(x)dx=a\left[F(x)+\frac{C}{a}\right]=a\cdot\int f(x)dx\quad(x\in\varDelta).$$

例 1 $$\int(6x^2-3x+5)dx=6\int x^2dx-3\int xdx+5\int dx$$

$$=2x^3-\frac{3}{2}x^2+5x+C.$$

例 2 $\int\frac{(\sqrt[3]{x}-1)^2}{x}dx=\int\frac{x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}+1}{x}dx$

$$=\int\left(x^{-\frac{1}{3}}-2x^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}-6x^{\frac{1}{3}}+\ln|x|+C$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x}+\ln|x|+C.$$

例 3 计算 $\int(2x+1)^{100}dx$

解 由牛顿二项式定理，

$$(2x+1)^{100}=\sum_{k=0}^{100}C_{100}^k(2x)^k=\sum_{k=0}^{100}C_{100}^k2^k\cdot x^k,$$

应用法则 1 与法则 2 即知

$$\int(2x+1)^{100}dx=\sum_{k=0}^{100}C_{100}^k2^k\int x^kdx.$$

$$=\sum_{k=0}^{100}C_{100}^k2^k\cdot\frac{x^{k+1}}{k+1}+C.$$

经过化简（建议读者计算一下）便得

$$\int(2x+1)^{100}dx=\frac{1}{202}(2x+1)^{101}+C.$$

如果例 3 应用下述法则 3 来处理，计算将显得十分简便！

法则 3 设已知

$$\int f(x)dx=F(x)+C\quad(x\in\varDelta),$$

又设函数 $u=\varphi(x)\,(x\in\varDelta^*)$ 是可微分函数，且其值域 $\varDelta_u\subset\varDelta$，则有

$$\int f[\varphi(x)]d\varphi(x)=\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=F[\varphi(x)]+C$$

$$(x\in\varDelta^*),$$

或即 $$\int f(u)\,du=F(u)+C \quad (x\in\varDelta^*).$$

证 条件$\varDelta_u\subset\varDelta$保证了复合函数$f[\varphi(x)]$及$F[\varphi(x)]$有意义。

由假设$F(x)$是$f(x)$在区间$\varDelta$上的一个原函数，故
$$dF(x)=f(x)\,dx \quad (x\in\varDelta, x+dx\in\varDelta).$$
由微分学中一阶微分形式不变性定理可知
$$dF[\varphi(x)]=f[\varphi(x)]\,d\varphi(x)=f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx$$
$$(x\in\varDelta^*,\ x+dx\in\varDelta^*),$$
因此， $$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx=F[\varphi(x)]+C \quad (x\in\varDelta^*).$$

法则3扩大了积分基本公式的使用范围，其主要用法如下：

推论 1 设 $\int f(x)\,dx=F(x)+C \quad (x\in\varDelta)$，则有
$$\int f(ax+b)\,d(ax+b)=F(ax+b)+C \quad (x\in\varDelta^*).$$
其中a,b为二常数且$a\neq0$，$\varDelta^*$与$\varDelta$符合法则3的要求。

例 4 承例3，注意到
$$dx=\frac{1}{2}\,d(2x)=\frac{1}{2}d(2x+1),$$
故有
$$\int(2x+1)^{100}dx=\int\frac{1}{2}\cdot(2x+1)^{100}d(2x+1)$$
$$=\frac{1}{2}\int(2x+1)^{100}d(2x+1),$$
于是， $$\int(2x+1)^{100}dx=\frac{1}{202}(2x+1)^{101}+C.$$

例 5 $\displaystyle\int\frac{dx}{x-a}=\int\frac{d(x-a)}{x-a}=\ln|x-a|+C.$

$$\int\sin mx dx=\frac{1}{m}\int\sin mx d(mx)=-\frac{\cos mx}{m}+C\quad(m\neq0).$$

$$\int e^{-3x}dx=-\frac{1}{3}\int e^{-3x}d(-3x)=-\frac{1}{3}e^{-3x}+C.$$

例 6 计算 $\displaystyle\int\frac{dx}{a^2+x^2}.$

解 如果$a=0$，则

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C.$$

如果$a\neq0$，则

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{a}+C.$$

将法则1，2，3联合起来使用，并且注意运用中学学过的代数、三角恒等式，将被积函数作恒等变换，那末我们就能够获得更多的结果。

例 7 计算 $\displaystyle\int\frac{2x+1}{3x-1}dx.$

解 易知

$$\frac{2x+1}{3x-1}=\frac{2}{3}+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{3x-1},$$

故有

$$\int\frac{2x+1}{3x-1}dx=\frac{2}{3}\int dx+\frac{5}{3}\int\frac{dx}{3x-1}=\frac{2}{3}x+\frac{5}{9}\ln|3x-1|+C.$$

例 8 计算 $\int\frac{dx}{a^2-x^2}\quad(a\neq 0)$.

解 易知

$$\frac{1}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right),$$

手分位

$\int\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$

故有

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2x}\int\frac{dx}{a+x}+\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{a-x}$$

$$=\frac{1}{2a}\int\frac{d(a+x)}{a+x}-\frac{1}{2a}\int\frac{d(a-x)}{a-x}$$

$$=\frac{1}{2a}\ln|a+x|-\frac{1}{2a}\ln|a-x|+C$$

$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C.$$

这里所论区间为$(-\infty,-|a|)$，或$(-|a|,|a|)$，或$(|a|,+\infty)$，特别当 $a=1$，且所论区间为$(-1,1)$，则有

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C=th^{-1}x+C\quad(-1<x<1).$$

例 9 计算 $\int\cos^2 mx\,dx\quad(m\neq 0)$.

解 易知

$$\cos^2 mx=\frac{1}{2}(1+\cos 2mx).$$

故有

$$\int\cos^2 mx\,dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 2mx\,dx$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4m}\sin 2mx+C.$$

例 10 计算 $\int \sin mx\cos nx dx \quad (|m| \neq |n|)$.

解 由恒等式

$$2\sin mx\cos nx=\sin(m+n)x+\sin(m-n)x,$$

易知

$$\int \sin mx\cos nx dx=\frac{1}{2}\int \sin(m+n)x dx+\frac{1}{2}\int \sin(m-n)x dx$$

$$=-\frac{1}{2(m+n)}\cos(m+n)x-\frac{1}{2(m-n)}\cos(m-n)x+C$$

推论 2 设 $\int f(x)dx=F(x)+C \quad (x\in\varDelta)$，则在相应的区间$\varDelta^*$上分别成立：

$$\int f(x^2)x dx=\frac{1}{2}\int f(x^2)d(x^2)=\frac{1}{2}F(x^2)+C.$$

$$\int f(x^3)x^2 dx=\frac{1}{3}\int f(x^3)d(x^2)=\frac{1}{3}F(x^3)+C.$$

$$\int f(\sin x)\cos x dx=\int f(\sin x)d\sin x=F(\sin x)+C.$$

$$\int f(\cos x)\sin x dx=-\int f(\cos x)d\cos x=-F(\cos x)+C.$$

$$\int f(\ln x)\frac{1}{x}dx=\int f(\ln x)d\ln x=F(\ln x)+C.$$

$$\int f(e^x)e^x dx=\int f(e^x)de^x=F(e^x)+C.$$

$$\int f(\sin^{-1}x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int f(\sin^{-1}x)d\sin^{-1}x$$

$$=F(\sin^{-1}x)+C.$$

$$\int f(\mathrm{tg}^{-1}x)\frac{dx}{1+x^2}=\int f(\mathrm{tg}^{-1}x)d\,\mathrm{tg}^{-1}x=F(\mathrm{tg}^{-1}x)+C$$

这里Δ与Δ^*分别符合法则 3 的要求。

例 11 $\int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}d(x^2)=\frac{1}{2}e^{x^2}+C.$

例 12 $\int\frac{x^2dx}{1+x^6}=\frac{1}{3}\int\frac{d(x^3)}{1+(x^3)^2}=\frac{1}{3}\mathrm{tg}^{-1}x^3+C.$

例 13 $\int x^2\sqrt{7+x^3}\,dx=\frac{1}{3}\int(7+x^3)^{\frac{1}{2}}d(7+x^3)$

$$=\frac{2}{9}(7+x^3)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{9}(7+x^3)\sqrt{7+x^3}+C.$$

例 14 $\int\frac{\ln x}{x}dx=\int\ln x\,d\ln x=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C.$

例 15 $\int\sin^3x\,dx=-\int\sin^2x\,d\cos x=\int(\cos^2x-1)\,d\cos x$

$$=\frac{1}{3}\cos^3x-\cos x+C.$$

例 16 $\int\mathrm{tg}x\,dx=\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d\cos x}{\cos x}$

$$=-\ln|\cos x|+C.$$

在运用法则 3 推论 2 处理问题时，有时需要灵活地使用代数、三角恒等变换，使被积函数变形。

例 17 计算 $\int\csc x\,dx.$

解 解法之一：

$$\int\csc x\,dx=\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{1}{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}\cdot\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$=\int\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}d\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}=\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

解法之二：

$$\int \csc x dx=\int \frac{\sin x}{\sin^2 x}dx=-\int \frac{d\cos x}{1-\cos^2 x}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|+C.$$

解法之三：

$$\int \csc x d x=\int \frac{\csc x(\csc x+\operatorname{ctg} x)}{\csc x+\operatorname{ctg} x}dx=\int \frac{\csc^2 x+\csc x\operatorname{ctg} x}{\csc x+\operatorname{ctg} x}dx$$

$$=-\int \frac{d(\csc x+\operatorname{ctg} x)}{\csc x+\operatorname{ctg} x}=-\ln|\csc x+\operatorname{ctg} x|+C.$$

上述三种解法，解法一与解法二的想法比较自然，而解法三的想法使人感到不很自然，但仍不失为一种解法。三种解法的结果从表面上看来似乎不一样，实际上它们是等同的（为什么？）。

例 18 计算 $\int \sin^3 x\cos^2 2x dx$

解 解法之一：

$$\sin^3 x\cos^2 2x=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 4x)$$

$$=\frac{1}{8}(3\sin x+3\sin x\cos 4x-\sin 3x-\sin 3x\cos 4x)$$

$$=\frac{1}{8}\left[3\sin x+\frac{3}{2}(\sin 5x-\sin 3x)-\sin 3x-\frac{1}{2}(\sin 7x-\sin x)\right]$$

$$=\frac{7}{16}\sin x-\frac{5}{16}\sin 3x+\frac{3}{16}\sin 5x-\frac{1}{16}\sin 7x,$$