复流形

陈志华 编著

4.56
2

科学出版社
www.sciencep.com

-46

复 流 形

陈志华 编著

科 学 出 版 社
北 京

O174.56
C652

内 容 简 介

本书是一本较完整的复流形的基础教材. 自复流形的定义开始讲述, 内容丰富, 涉及很多近代数学的重要概念以及不同数学分支的相互联系. 本书的前六章主要介绍复流形的基本性质, 后六章介绍复流形的最经典的结果, 其中包括示性类、Hodge 定理、消灭定理与嵌入定理.

本书尽可能用国内学生易于理解的方式来陈述这些内容, 因此本书不仅可以作为数学系高年级本科生与研究生的教材, 并可供对复流形有兴趣的读者自学.

图书在版编目(CIP)数据

复流形/陈志华编著. —北京: 科学出版社, 2010.2

ISBN 978-7-03-026765-8

Ⅰ.复… Ⅱ.陈… Ⅲ.复流形-高等数学-教材 Ⅳ.O174.56

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 021386 号

责任编辑: 范庆奎 王丽平 / 责任校对: 陈玉凤
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 鑫联必升

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 2 月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2010 年 2 月第一次印刷 印张: 10 1/2
印数: 1—2 500 字数: 200 000

定价: 38.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

前　言

撰写本书的目的是为青年学者提供一本中文的复流形基础读物. 复流形, 特别是紧复流形, 是纯粹数学中一门很基础的课程, 近年来, 很多新兴的数学研究分支和问题都是在其基础上展开的, 而国内至今尚没有一本中文书来介绍这门课程, 这实在是一个缺憾, 因为中文书无疑会有效地增加青年学子学习与了解复流形这门学科的机会.

国内也可以见到一些关于复流形的外文书, 但这些书一般不以数学系高年级学生和刚入学的研究生为对象, 因此, 国内的青年学子阅读这些书会遇到较多的数学知识的缺失, 特别是对于自学的人来讲更不易阅读.

作者自 20 世纪 80 年代起先后在中国科学院数学研究所、中国科技大学、南京大学、华东师范大学、上海交通大学、郑州大学、同济大学、复旦大学和首都师范大学等为研究生讲授过这个课程, 因此, 本书实际上就是在上述授课基础上写成的讲义. 根据在多次讲授该课程过程中对研究生情况的了解, 作者在撰写本书时针对国内学生的基础, 尽量做到自封, 以增强易读性. 本书不仅可供对复流形有兴趣的研究生学习, 而且可以作为数学系高年级学生的教材.

本书只是复流形方面的基础教材, 除了前面几章讲解复流形的基本知识外, 其余的部分可以独立成书. 本书只是收集复流形中最基本、最典型的内容, 有关进一步的发展, 有兴趣的读者可以从相关文献中找到. 另外, 本书作为一本研究生教材, 适合一个学期 60~70 学时的课程.

本书附有一个简短的关于矩阵点乘的附录. 就自封性来讲, 本书应该还有一个关于层论的附录, 但考虑到篇幅有限就舍弃了. 读者如需要了解这方面的知识, 中文文献可参阅 1997 年同济大学出版社出版的《层论及其上同调理论》, 这是我应同济大学 90 年校庆撰写的一本小册子. 也可阅读我于 1981 年在科学出版社出版的《紧黎曼曲面引论》一书所写的两个附录, 其中, 附录 2“层论简介” 中有关于层论内容的介绍. 此书曾三次印刷, 最后一次是 1997 年. 外文参考书可见文献 [9]~[11], 它们都有关于层论内容的简单介绍.

本书共分 12 章, 每章有一个相对独立的主题, 前后相承. 本书陈述尽可能地采用适合国内学生易于接受的方法, 希望为年轻读者提供一个较为完满的复流形的基础知识和基本结果, 能为青年学者进一步从事有关复流形研究提供一个登阶石. 如果本书能在这方面有一定作用, 则不虚此书的出版.

本书的取材与处理方法完全取决于作者个人的数学素养, 因此, 本书断难尽善, 而且疏漏与失当之处也同样不可避免, 若读者与有关专家不吝指正, 则不胜感激. 本书是第一本复流形的中文书, 希望能抛砖引玉, 引来在这方面深有造诣者来撰写更完美、更深入的有关复流形的书, 也是作者撰写本书的一个愿望.

本书的写作得到我的学生刘洋与刘汉的大力帮助, 将手稿变为打印稿, 全赖他们两位之功. 本书在校对清样过程中也得到周朝晖副教授的帮助.

科学出版社对本书出版所表现出了极大的热忱作者表示敬意, 同时也要感谢国家自然科学基金会对作者科研教学工作的长期支持.

本书得到同济大学研究生院研究生教材出版基金的资助, 特此铭谢.

陈志华

2009 年 9 月于上海

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目　录

第 1 章　复流形的基本概念

首先来介绍一些对复流形来讲必不可少的多复变函数的最基本的知识.

定义 1.1　设 G 是 $\mathbb{C}^n$ 中一个区域 (连通开集). f 是 G 上的复值函数 $f: G\to\mathbb{C}$. 如果 f 是 $\mathbb{C}^1$ 函数 (f 对于变数 $z^1,\cdots,z^n,\overline{z^1},\cdots,\overline{z^n}$ 来讲, 或是对于实变数 $x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^n$ 来讲, 其中, $z^i=x^i+y^i$), 而且对每个 i 均有

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z^i}}\equiv 0,\quad 1\leqslant i\leqslant n \tag{1.1}$$

在 G 上成立, 其中, $\dfrac{\partial}{\partial\overline{z^i}}=\dfrac{\partial}{\partial x^i}+\sqrt{-1}\dfrac{\partial}{\partial y^i}$ 就称 f 是 G 上的全纯函数.

当 $n=1$ 时, 这就等价于经典的单复变数全纯函数的定义. 因为如果 $f=u(x,y)+\sqrt{-1}v(x,y)$, $z=x+\sqrt{-1}y$, $\dfrac{\partial f}{\partial\overline{z}}=0$ 就等价于下列的 Cauchy-Riemann 方程:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}=0.\end{cases} \tag{1.2}$$

因此, $G\subset\mathbb{C}^n$ 上的一个复值函数 f 是全纯的, 也就是它对 $z^1,\cdots,z^n$ 中每一个变数都满足 Cauchy-Riemann 方程.

定义 1.2　设 $G\subset\mathbb{C}^n$, $F=(f^1,\cdots,f^m)$: $G\to\mathbb{C}^m$ 是从区域 G 到 $\mathbb{C}^m$ 的映射, 当每个 f^i 都是全纯函数时, 就称 F 是从 G 到 $\mathbb{C}^m$ 的一个全纯映射.

定义 1.3　设 $G_1,G_2\subset\mathbb{C}^n$ 的区域, 而且具有 $F:G_1\to G_2$, $H:G_2\to G_1$ 都是全纯映射, $H\circ F:G_1\to G_1$ 与 $F\circ H:G_2\to G_2$ 都是恒同映射, 则称 $F(H)$ 是从 $G_1(G_2)$ 到 $G_2(G_1)$ 上的全纯同胚, 而且 H, F 互为逆映射.

显然, 全纯同胚一个必要条件是要有维数 n 相等的区域之间.

如果 f 是区域 $G\subset\mathbb{C}^n$ 上的全纯函数, 则从其他定义知道 f 的各阶导数

$$\frac{\partial^{|\alpha|}f}{\partial {z^1}^{\alpha_1}\cdots\partial {z^n}^{\alpha_n}} \tag{1.3}$$

依然是 G 上的全纯函数, 其中, $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 都是非负整数, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$.

当 $F=(f^1,\cdots,f^m):G\to\mathbb{C}^m$ 是一个全纯映射, G 是 $\mathbb{C}^n$ 中的区域, 则映射 F

的 Jacobi 矩阵

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial z^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial z^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f^m}{\partial z^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^m}{\partial z^n} \end{pmatrix}$$

是一个 $m\times n$ 的矩阵, 而且矩阵中的每个变元都是全纯函数. 当 $F: G_1 \to G_2, G_1, G_2 \subset \mathbb{C}^n$ 是全纯同胚时, 它的 Jacobi 矩阵

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial z^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial z^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f^n}{\partial z^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^n}{\partial z^n} \end{pmatrix}$$

是一个 n 阶非异方阵, 即上述矩阵的行列式在 G_1 上处处不为零. 以后就用 Jacobi F 或 $\left(\dfrac{\partial f^i}{\partial z^j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 来表示上述 Jacobi 矩阵, 用 det Jacobi (F) 或 det $\left(\dfrac{\partial f^i}{\partial z^j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 表示对应的 Jacobi 矩阵的行列式.

在正式介绍复流形之前, 首先介绍一下关于微分流形的有关概念, 因为复流形本身亦可看成是微分流形, 而且两者之间还有紧密的关系.

定义 1.4　设 M 是一个 T_2(Hausdoff) 空间, $\{U_i\}_{i\in I}$ 是 M 的一个开覆盖, 其中, I 表示一个指标集. 对 $\forall i \subset I$, 存在拓扑同胚 $\varphi_i: U_i \to \varphi_i(U_i)$, 其中, $\varphi_i(U_i)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集. 如果对 $\forall i,j \in I$ 且 $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, 则有 $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}: \varphi_j(U_i\cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中两个开集之间的一一映射, 当所有 $\varphi_i\circ\varphi_j^{-1}$ 都是 $C^\infty(C^\omega, C^k, C^0)$, 就称 M 是一个光滑 (解析, C^k, 拓扑) 流形, 其中, (φ_i, U_i) 称为是 M 上的一个图, $\forall p \in U_i$, 称 $\varphi_i(p) = (x^1_{(i)}, \cdots, x^n_{(i)})$ 为点 p 的局部坐标, $\varphi_i\circ\varphi_j^{-1}$ 就是不同局部坐标之间的变换, $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i\in I}$ 就称为 M 的微分结构, 上述 n 就称为 M 的维数.

定义 1.5　设 M 是一个微分流形, 并且它具有如下的微分结构 $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i\in I}$, 使得对 $\forall i,j \in I$ 且 $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ 时,

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}: \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

且 det Jacobi $(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}) > 0$, 则称 M 是一个可定向的微分流形.

一个微分流形不一定是可定向的, 不可定向微分流形的最简单的例子是 Möbius 带.

定义 1.6　设 M 是一个 T_2 空间, $\{U_i\}_{i\in I}$ 是其开覆盖, 如对 $\forall i \in I$, 存在 $\varphi_i: U_i \to \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{C}^n$ 是从 U_i 到 $\mathbb{C}^n$ 中的开集 $\varphi_i(U_i)$ 的同胚, 而且对 $i,j \in I$ 且

$U_i \cap U_j \neq \varnothing$ 时,

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

是 $\mathbb{C}^n$ 中开集 $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ 到 $\mathbb{C}^n$ 中开集 $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ 的全纯同胚, 则称 M 是一个 n 维复流形.

若用 $(z_{(i)}^1, \cdots, z_{(i)}^n)$ 与 $(z_{(j)}^1, \cdots, z_{(j)}^n)$ 分别表示 $U_i(U_j)$ 在 $\varphi_i(U_i)(\varphi_j(U_j))$ 上的局部坐标表示, 则在 $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ 上, $z_{(i)}^k (1 \leqslant k \leqslant n)$ 都是 $z_{(j)}^1, \cdots, z_{(j)}^n$ 的全纯函数, 反之亦然.

显然, 一个 n 维复流形可以自然地看成 $2n$ 维实流形, 因为每个 $\varphi_i(U_i)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的开集, 又因为 $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, 因此, $\varphi_i(U_i)$ 就可以看成是 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的开集. 这时取实的局部坐标即为 $(x_{(i)}^1, \cdots, x_{(i)}^n, y_{(i)}^1, \cdots, y_{(i)}^n)$, 其中, $z_{(i)}^k = x_{(i)}^k + \sqrt{-1} y_{(i)}^k$, 而

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

用实局部坐标表示即为

$$\begin{cases} x_{(i)}^k = x_{(i)}^k (x_{(j)}^1, \cdots, x_{(j)}^n, y_{(j)}^1, \cdots, y_{(j)}^n), \\ y_{(i)}^k = y_{(i)}^k (x_{(j)}^1, \cdots, x_{(j)}^n, y_{(j)}^1, \cdots, y_{(j)}^n), \end{cases}$$

其中, $1 \leqslant k \leqslant n$. 因为 $z_{(i)}^k (1 \leqslant k \leqslant n)$ 对每个变数 $z_{(j)}^l (1 \leqslant l \leqslant n)$ 都是全纯的. 因此, 它的实部 $x_{(i)}^k$ 与虚部 $y_{(i)}^k$ 一定是 $z_{(j)}^l$ 的实部 $x_{(j)}^l$ 与虚部 $y_{(j)}^l$ 的光滑函数. 因此, 一个复流形是可以看成一个偶维数的光滑微分流形, 然而反之则不然.

另外, 一个复流形的特征性质就是复流形所决定的偶维数的光滑微分流形一定是可定向的. 这就是要验证当 $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ 时, 下面的 $2n$ 阶方阵 $A_{(i,j)}$ 的行列式是恒正的:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_{(i)}^1}{\partial x_{(j)}^1} & \cdots & \dfrac{\partial x_{(i)}^1}{\partial x_{(j)}^n} & \dfrac{\partial x_{(i)}^1}{\partial y_{(j)}^1} & \cdots & \dfrac{\partial x_{(i)}^1}{\partial y_{(j)}^n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x_{(i)}^n}{\partial x_{(j)}^1} & \cdots & \dfrac{\partial x_{(i)}^n}{\partial x_{(j)}^n} & \dfrac{\partial x_{(i)}^n}{\partial y_{(j)}^1} & \cdots & \dfrac{\partial x_{(i)}^n}{\partial y_{(j)}^n} \\ \dfrac{\partial y_{(i)}^1}{\partial x_{(j)}^1} & \cdots & \dfrac{\partial y_{(i)}^1}{\partial x_{(j)}^n} & \dfrac{\partial y_{(i)}^1}{\partial y_{(j)}^1} & \cdots & \dfrac{\partial y_{(i)}^1}{\partial y_{(j)}^n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_{(i)}^n}{\partial x_{(j)}^1} & \cdots & \dfrac{\partial y_{(i)}^n}{\partial x_{(j)}^n} & \dfrac{\partial y_{(i)}^n}{\partial y_{(j)}^1} & \cdots & \dfrac{\partial y_{(i)}^1}{\partial y_{(j)}^n} \end{pmatrix}$$

在上述矩阵左边与右边分别乘上 $2n$ 阶方阵

$$\begin{pmatrix} I^{(n)} & \sqrt{-1}\,I^{(n)} \\ 0 & I^{(n)} \end{pmatrix} \quad 与 \quad \begin{pmatrix} I^{(n)} & -\sqrt{-1}\,I^{(n)} \\ 0 & I^{(n)} \end{pmatrix},$$

其中, $I^{(n)}$ 是指 n 阶单位方阵, 0 表示 n 阶零方阵, 这两个矩阵的行列式都是 1. 因此, $A_{(i,j)}$ 乘上这两个方阵之后所得方阵的行列式是不变的, 而 $A_{(i,j)}$ 在左右分别乘上这两个方阵之后所得的方阵是

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z^l_{(i)}}{\partial z^k_{(j)}} & 0 \\ * & \overline{\dfrac{\partial z^l_{(i)}}{\partial z^k_{(j)}}} \end{pmatrix},$$

其中, $\left(\dfrac{\partial z^l_{(i)}}{\partial z^k_{(j)}}\right)$ 就是 Jacobi 矩阵 $\dfrac{\partial(z^1_{(i)}\cdots z^n_{(i)})}{\partial(z^1_{(j)}\cdots z^n_{(j)})}$, 因此 $\det A_{(i,j)} = \left|\det\dfrac{\partial(z^1_{(i)}\cdots z^n_{(i)})}{\partial(z^1_{(j)}\cdots z^n_{(j)})}\right|^2$.

由于 $\dfrac{\partial(z^1_{(i)}\cdots z^n_{(i)})}{\partial(z^1_{(j)}\cdots z^n_{(j)})}$ 是非异的, 因此, $\det A_{(i,j)} > 0$ 始终成立. 这就证明任何一个复流形一定是可定向的.

设 M 是一个 n 维复流形, 则表示存在定义 1.6 中的开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$ 及映射 $\{\varphi_i\}_{i\in I}$, (U_i,φ_i) 就称为一个坐标图或是图, 而 $\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$ 就称为 M 上一个复流形结构.

定义 1.7　设 M 是一个复流形, $f: M\to\mathbb{C}$ 是定义在 M 上的一个函数. 如果对 $\forall i\in I$, 对于图 (U_i,φ_i) 有 $f\circ\varphi_i^{-1}:\varphi_i(U_i)\to\mathbb{C}$ 是全纯的, 则称 f 是 M 上的全纯函数.

如果 U 是 M 上的开子集, 则也可以讨论 f 是 U 上的全纯函数的概念, 此时无非是将 U 看成一个复流形, 而 $\{\varphi_i|_{U\cap U_i}, U\cap U_i\}_{i\in I}$ 就是 U 上的一个复流形结构. 已知一个 n 维复流形, 自然是一个 $2n$ 维的实微分流形, 因此, 在 M 上也可以讨论微分函数 $f: M\to\mathbb{R}(\mathbb{C})$, 称为 M 上的 C^k 函数, 即是指 $f\circ\varphi_i^{-1}:\varphi_i^{-1}(U_i)\to\mathbb{R}(\mathbb{C})(\forall i\in I)$ 是一个 C^k 函数.

定义 1.8　设 M, N 分别是 m 维与 n 维的复流形, $\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$ 和 $\{(V_\alpha,\psi_\alpha)\}_{\alpha\in J}$ 分别是它们的复流形结构. $F: M\to N$ 是一个映射, 如果对 $\forall i\in I$ 与 $\forall\alpha\in J$ 有

$$\psi_\alpha\circ F\circ\varphi_i^{-1}:\varphi_i(U_i)\to$$

是从 $\mathbb{C}^n$ 中的开集到 $\mathbb{C}^m$ 的全纯映射时, 就称 F 是 M 到 N 的全纯映射. 或更详细地说, 设 $w^1_{(\alpha)},\cdots,w^n_{(\alpha)}$ 是 V_α 在 ψ_α 下的局部坐标, 则 $w^k_{(\alpha)} = w^k_{(\alpha)}(z^1_{(i)},\cdots,z^m_{(i)})(1\leqslant$

$k \leqslant n$) 都是 $\varphi_i(U_i)$ 上的全纯函数. 显然, 定义 1.8 在 $F(U_i) \cap V_\alpha \neq \varnothing$ 时才有确切的意义.

同样地, 当 M 是复流形, 而 N 是一个微分流形时, 由于复流形本身就是一个微分流形, 因此, 可以类似定义 M 到 N 或 N 到 M 的可微分映射, 而且每个复流形都可看成光滑微分流形. 因而在复流形之间除了全纯映射外, 亦可以有其他可微分映射.

下面是一些最常见且有用复流形的例子.

例 1　$S^2(1)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面, 对 $\mathbb{R}^3$ 的诱导拓扑来讲, 它是一个 T_2 的紧空间, 现在将其放在复平面上, 使它的南极 S 与 $\mathbb{C}$ 上的原点相重合, N 是它的北极. S 与 N 相连的直线垂直于该平面, 同样将一个 $\mathbb{C}$ 平面放置于北极 N, 而且 N 与 S 相连的直线垂直于该平面, 这两个平面是相互平行的.

现在 $U_N = S^2\backslash\{S\}$, $U_S = S^2\backslash\{N\}$, 则 U_S 与 U_N 都是 S^2 的开集, 而且 $U_N \cup U_S = S^2$, $U_N \cap U_S = S^2\backslash\{S, N\}$. 现在对 $\varphi_S : U_S \to \mathbb{C}$ 是由 N 出发作的测地投影, 即 $\forall p \in U_S$, 由 N 作经过 p 的射线交 S 所在的平面于一点 z, 这个 z 就是 P 点的局部坐标, 显然, $\varphi_S : U_S \to \mathbb{C}$ 是一个拓扑同胚. 另一方面, $\varphi_N : U_N \to \mathbb{C}$ 是由 S 出发作测地投影到上面的平面, 令 $\varphi_N(P) = w$, 下面要验证

$$\varphi_N \circ \varphi_S^{-1} : \varphi_S(U_N \cap U_S) \to \varphi_N(U_N \cap U_S)$$

是全纯的, 实际上就是证明 w 是 z 的全纯函数.

由图 1.1 和图 1.2 可见, 点 N, S, P 决定一个平面, 而 w, z 都在此平面上.

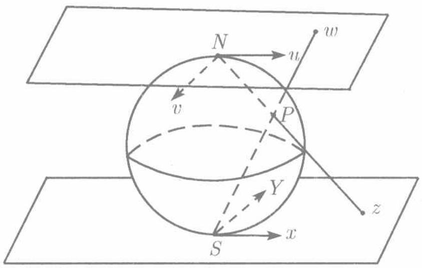

图 1.1

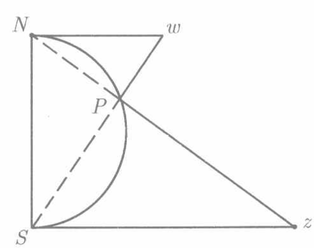

图 1.2

由 $\angle PNS + \angle PSN = \pi/2 = \angle PNS + \angle SzN$, 因此 $\angle SzN = \angle PSN$, 故直角三角形 $\triangle zSN$ 和 $\triangle SwN$ 是相似的, 因此

$$\frac{|Nw|}{|SN|} = \frac{|SN|}{|Sz|},$$

其中, $|Nw|$ 就是 w 的模, 同样 $|Sz|$ 就是 z 的模, 而 $|SN| = 2$. 另外, 由关于这两个

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

平面的定向知道 $\arg z = -\arg w$, 由 $|w| = 4/|z|$ 知

$$w = |w| e^{\sqrt{-1}\arg w} = \frac{4}{|z|} e^{\sqrt{-1}\arg w} = \frac{4}{|z| e^{\sqrt{-1}(-\arg w)}} = \frac{4}{|z| e^{\sqrt{-1}\arg z}} = \frac{4}{z}.$$

因为在 $U_N \cap U_S$ 上的点的局部坐标 $z(w)$ 都不取零值, 因此, 上边等式 $w = 4/z$ 即表示 w 是 z 的全纯函数. 同样地, $w = 4/z$ 也表示 z 是 w 的全纯函数, 因此, 这就证明了 $S^2(1)$ 是一个紧复流形.

例 2 Grassmann 流形 $G(n,p)(p < n \in \mathbb{Z}^+)$, 其中, 将 $\mathbb{C}^n$ 中的经过原点的 p 维子空间看成一个点, 则 $G(n,p)$ 是这样的子空间构成的集合, 是一个 $p(n-p)$ 维的复流形.

一个 p 维平面是由 p 个线性无关向量 $a_1, \cdots, a_p$ 所张成的, 可写成一个 $p \times n$ 的矩阵

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}.$$

如果有另外 p 个线性无关向量 $b_1, \cdots, b_n$ 且若 $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$ 时, 其中, C 是一个 $p \times p$ 非异方阵, 则 $b_1, \cdots, b_p$ 张成的 p 维子空间与 $a_1, \cdots, a_p$ 张成的子空间一样. 因此, 对 $\forall C \in GL(p, \mathbb{C})$, $C \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}$ 表示与 $a_1, \cdots, a_p$ 张成的同样的 p 维子空间. 由于 $\mathrm{Rank} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = p$, 因此, 至少存在一个 $I = (i_1, \cdots, i_p)$, 使得 $\det \begin{pmatrix} a_{1i_1} & \cdots & a_{1i_p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{pi_1} & \cdots & a_{pi_p} \end{pmatrix} \neq 0.$

现在令 U_I 即为上述 a 中适合上述不等式的点的集合, 因此, 所有 $\bigcup\limits_{i_1 < \cdots < i_p} U_I$ 就是它的一个开覆盖. 当 $a \in U_I$ 时, 将 CI 看成是 $(1, \cdots, n)$ 中除掉 $i_1, \cdots, i_p$ 剩下的列指标集合, 则 $a = (Q_I, Q_{CI})P$, 其中, P 是一个 $n \times n$ 置换矩阵, 由

$$Q_I^{-1} a = (I, Q_I^{-1} Q_{CI})P,$$

将 $Q_I^{-1} Q_{CI}$ 看成 $[a] = [Q_I^{-1} a]$ 的局部坐标, 因此, 其正好是 $p(n-p)$ 维的.

(1) $\bigcup\limits_{i_1<\cdots<i_p} U_I = G(p,n)$ 是显然的.

(2) $\varphi_I(U_I) = \mathbb{C}^{p(n-p)}$. 因为对任何 $Z_{p\times(n-p)} \in \mathbb{C}^{p(n-p)}$ 有 $(I,Z)P \in U_I$, $\varphi_I((I,Z)P) = Z$, 因此 $\varphi_I(U_I) = \mathbb{C}^{p(n-p)}$.

(3) 现在来证明当 $[a] \in U_I \cap U_J$ 时, 则其分别有 $\varphi_I([a]) = Z_I$ 与 $\varphi_J([a]) = Z_J$. 下面先来证明 $\varphi_I \circ \varphi_J^{-1}$ 是 $\mathbb{C}^{p(n-p)} \to \mathbb{C}^{p(n-p)}$ 上的全纯映射. 设 $[a] \in U_I \cap U_J$, 则有表达式

$$a = Q_I(I \;\; Q_I^{-1}Q_{CI})P_I = Q_J(I \; Q_J^{-1}Q_{CJ})P_J,$$

因此

$$(I \;\; Z_I) = (I \;\; Q_I^{-1}Q_{CI}) = Q_I^{-1}Q_J(I \;\; Q_J^{-1}Q_{CJ})P_JP_I^{-1} = (Q_J^{-1}Q_I)^{-1}(I \;\; Z_j)P_IP_J^{-1},$$

其中, $Q_J^{-1}Q_I$ 是一个非异矩阵, 它的元素就是由 Z_J 中的元素与 0,1 所组成的, 而 $\det(Q_J^{-1}Q_I)$ 是非异的, 因此, $(Q_J^{-1}Q_I)^{-1}$ 的元素是由 Z_J 中的元素以及 0,1 组成的全纯函数. $P_IP_J^{-1}$ 依旧是一个置换矩阵, 因此, 这证明 Z_I 是 Z_J 的全纯函数. (原因是 Q_I 中的列无非是属于 Q_J 或 Q_{CJ}, 当这个列属于 Q_J 时, 则 Q_J^{-1} 乘上之后就是除了一个是 1 外其余都是 0, 如果这个列属于 Q_{CJ}, 则 Q_J^{-1} 乘上之后就是 Z_J 中的元素.)

例 3　设 $M=\{F_i(z_1,\cdots,z_n)=0|i=1,\cdots,k<n\}$, 而且 $\mathrm{Rank}\left(\dfrac{\partial F_i}{\partial z_\alpha}\right)_{1\leqslant i\leqslant k,1\leqslant\alpha\leqslant n}$ 在 M 的每一个点都是 k, 因此, 对 $\forall x \in M$ 必有 $\det\left(\dfrac{\partial F_i}{\partial z_{\alpha_i}}\right)_{1\leqslant i\leqslant k} \neq 0$, 则在 x 点, 根据隐函数定理知 $z_{\alpha_i} = f_{\alpha_i}(z_{\beta_1},\cdots,z_{\beta_{n-k}})$, 其中, $(\beta_1,\cdots,\beta_{n-k}) = (1,\cdots,n)\setminus(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$.

令 M 上的开集为 $U_{\alpha_1\cdots\alpha_k} = \left\{z\in M|\det\left(\dfrac{\partial F_i}{\partial z_{\alpha_i}}\right)_{1\leqslant i\leqslant k} \neq 0)\right\}$, $z \in U_{\alpha_1\cdots\alpha_k}$ 就是 M 的一个坐标覆盖, 而 $z\in M$, $z=(z_{\alpha_1},\cdots,z_{\alpha_k},z_{\beta_1},\cdots,z_{\beta_{n-k}})P_{\alpha\beta}$, 它的局部坐标为 $(z_{\beta_1},\cdots,z_{\beta_{n-k}})$, 其中, $P_{\alpha\beta}$ 就是置换矩阵. 如果 $z\in M$ 而且 $z\in U_{\alpha_1\cdots\alpha_k}\cap U_{\gamma_1\cdots\gamma_k}$, 则其关于 $U_{\alpha_1\cdots\alpha_k}$ 的局部坐标为 $z_{\beta_1},\cdots,z_{\beta_{n-k}}$, $U_{r_1\cdots r_k}$ 的局部坐标就是 $z_{\delta_1},\cdots,z_{\delta_{n-k}}$, 其中, $(\delta_1,\cdots,\delta_{n-k}) = (1,\cdots,n)\setminus(\gamma_1,\cdots,\gamma_k)$.

证明　$z_{\beta_1},\cdots,z_{\beta_{n-k}}$ 是 $z_{\delta_1},\cdots,z_{\delta_{n-k}}$ 的全纯函数, 任何 $z_{\beta_1},\cdots,z_{\beta_{n-k}}$ 中的元素 $\beta_i(1\leqslant i\leqslant n-k)\in(\gamma_1,\cdots,\gamma_k)$, 则由隐函数定理知 $z_{\beta_i} = f_{\beta_i}(z_{\delta_1},\cdots,z_{\delta_{n-k}})$. 当 $\beta_i\in(\delta_1,\cdots,\delta_{n-k})$, z_{β_i} 就是 $z_{\delta_1},\cdots,z_{\delta_{n-k}}$ 中的一个, 自然也是全纯的. 这里可选取多圆柱 $P(z,\lambda) = P(z_1,\lambda_1)\times\cdots\times P(z_n,\lambda_n)$, 可以选取 λ 充分小, 使得 $P(z,\lambda)\cap M\subset U_{\alpha_1\cdots\alpha_k}$, 而由隐函数定理知道在 $P(z,\lambda)\cap M$ 上对每个 z_{α_i} 都可以唯一地表示为

$$z_{\alpha_i} = \varphi_{\alpha_i}(z_{\beta_1},\cdots,z_{\beta_{n-k}})$$

的全纯函数, 其中, $z_{\beta_1},\cdots,z_{\beta_{n-k}}\in P(z_1,\lambda_{\beta_1})\times\cdots\times P(z_{n-k},\lambda_{\beta_{n-k}})=\widetilde{P}(z_\beta,\lambda_\beta)$, $\{P(z,\lambda)\cap M\}_{z\in M}$ 就是 M 的局部坐标覆盖, 它对应的局部坐标覆盖的局部坐标如下:

$$\varphi_z:\{P(z,\lambda)\cap M\}\to\widetilde{P}(z_\beta,\lambda_\beta)\subset\mathbb{C}^{n-k},$$
$$z\in M\mapsto(z_{\beta_1},\cdots,z_{\beta_{n-k}}),$$

这时, $(z_{\beta_1},\cdots,z_{\beta_{n-k}})$ 即是 z 在相应的 $\mathbb{C}^{n-k}$ 上的投影.

如果有一点 $z\in(P(z',\delta')\cap M)\cap(P(z'',\delta'')\cap M)$, 而 $P(z',\delta')\cap M\subset U_{\alpha_1\cdots\alpha_k}$, $P(z'',\delta'')\cap M\subset U_{\gamma_1\cdots\gamma_k}$, 其中, z 有两个局部坐标, 分别为 $z_{\beta_1},\cdots,z_{\beta_{n-k}}$ 和 $z_{\gamma_1},\cdots,z_{\gamma_{n-k}}$. 现在把 $\beta_1,\cdots,\beta_{n-k}$ 分成两类, 一个属于 I_γ, 另一个属于 $I_{C\gamma}$. 当 $\beta_i\in I_{C\gamma}$ 时, 则 z_{β_i} 就是 $z_{\gamma_1},\cdots,z_{\gamma_{n-k}}$ 中之一. 当 $\beta_i\in I_\gamma$ 时, 这时就有关于 $P(z'',\delta'')\cap M$ 上的隐函数是 $z_{\beta_i}=f_{\beta_i}(z_{\gamma_1},\cdots,z_{\gamma_{n-k}})$ 的全纯函数.

例 4　复环面 $X=\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}^{2n}$, 其中, $\mathbb{Z}^{2n}\subset\mathbb{R}^{2n}=\mathbb{C}^n$ 是一个自然的内射. 对于 $\mathbb{C}^n$ 中适当小的开集 U, 则

$$(U+(a_1+\sqrt{-1}b_1,\cdots,a_n+\sqrt{-1}b_n))\cap U=\varnothing$$

对所有 $(a_1,b_1,\cdots,a_n,b_n)\in\mathbb{Z}^{2n}$. 因此, $\pi:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}^{2n}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 到其商空间 $\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}^{2n}$ 的自然投影映射. 显然, 当 U 适当小时, U 与 $\pi(U)$ 是双方一一的. 因此, $X=\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}^{2n}$ 是一个复流形, 而且是一个 n 维紧复流形, 称为 n 维环面.

例 5　Hopf 流形. 将整数环作用在 $\mathbb{C}^n\backslash\{0\}$ 上, 在 $\mathbb{C}^n\backslash\{0\}$ 上建立如下等价关系: 对 $0<\lambda<1$, $(z^1,\cdots,z^n)\sim(\lambda^kz^1,\cdots,\lambda^kz^n)(k\in\mathbb{Z})$. $\mathbb{C}^n\backslash\{0\}$ 对于这个等价关系作的商空间 $X=\mathbb{C}^n\backslash\{0\}/\sim$ 称为 Hopf 流形.

$$p:\mathbb{C}^n\backslash\{0\}\to X$$

是商映射, 对 $\forall x\in X$, 显然 $p^{-1}(x)$ 是由可列个点组成的. 现在取 $z\in\mathbb{C}^n$ 且 $|z|^2=\sum\limits_{i=1}^n|z^i|^2=1$. $r\in(\lambda^2,\lambda]$, 则 rz 就是 X 中的代表元素. 因为 $\forall w\in\mathbb{C}^n\backslash\{0\}$, 则一定存在 $k\in\mathbb{Z}$, 使 $\lambda^kw=rz$, 其中, $z=\dfrac{w}{|w|}$. 如 $|w|=t$, $\lambda^kt=r$ 必有解. 另一方面, 这样的解是唯一的, 因为如果有 $\lambda^kt=r$, $\lambda^{k_1}t=r_1$, 则 $\lambda^{k-k_1}=r/r_1$, 其中, $r,r_1\in(\lambda^2,\lambda]$, 则由 $\lambda=\dfrac{\lambda^2}{\lambda}<\dfrac{\gamma}{\gamma_1}<\dfrac{\lambda}{\lambda^2}=\lambda^{-1}$, 故只有 $k=k_1$ 与 $\gamma=\gamma_1$.

对 $\forall w\in\mathbb{C}^n\backslash\{0\}$, 当 $|w|\neq\lambda^k(k\in\mathbb{Z})$, 则不妨假定 $\lambda^{l+1}<|w|<\lambda^l(l\in\mathbb{Z})$, 则取 $U\in\mathscr{U}_w$, 使得 $U\subset B(\lambda^l)\backslash\overline{B(\lambda^{l+1})}$, 其中, $B(s)$ 表示以 0 为中心 s 为半径的圆, 则对 $\forall m\in\mathbb{Z}$, $m\neq0$, $\lambda^m(U)\cap U=\varnothing$. 这是因为

$$\lambda^k(U) \subset B(\lambda^{l+m}) \backslash \overline{B(\lambda^{l+m+1})}.$$

当 $|w| = \lambda^k$ 时, 则存在 $U \in \mathscr{U}_w$, 使得

$$U \subset B\left(\frac{\lambda^{k-1}+\lambda^k}{2}\right) \Big\backslash B\left(\frac{\lambda^k+\lambda^{k+1}}{2}\right),$$

则对 $\forall m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$,

$$\lambda^m(U) \subset B\left(\frac{\lambda^{m+k-1}+\lambda^{m+k}}{2}\right) \Big\backslash B\left(\frac{\lambda^{m+k}+\lambda^{m+k+1}}{2}\right).$$

因此, $\lambda^m(U) \cap U = \varnothing$.

上述事实说明对 $\forall z \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ 都存在一个开集 U, 使得 p 在 U 上是同胚, 即 $p: \mathbb{C}^n \backslash \{0\} \to X$ 是局部同胚. 因此, X 上的商拓扑所成的拓扑空间 $\mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ 是局部全胚的, 于是就可以赋予一个复流形结构使其成为复流形.

另一方面, 对 X 赋予商拓扑, 也即 X 的开集 U 即为 $p^{-1}(U)$ 是 $\mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ 中的开集. 这样在 X 每点的局部开集可以引进自然的局部全纯坐标, 因此, Hopf 流形是一个 n 维复流形. 显然, 它微分同胚于 $S^1 \times S^{2n-1}$. 当 $n = 1$ 时, X 同胚于 $S^1 \times S^1$, 就是前面讲的环面.

对一个复流形 M 来讲, 它的复流形结构并不是唯一的. 例如, $\forall U_i$ 且 $U_i = U_{i_1} \cup U_{i_2}$, 其中, U_{i_1} 与 U_{i_2} 是开集, 则 $(U_{i_1}, \varphi_i|_{U_{i_1}})$, $(U_{i_2}, \varphi_i|_{U_{i_2}})$ 也是 M 上一个图, 原来的图上再加上 $(U_{i_1}, \varphi_i|_{U_{i_1}})$, $(U_{i_2}, \varphi_i|_{U_{i_2}})$ 则依然是 M 上的一个复流形结构. 因此, 在今后的讨论中, 为方便起见, 引进完全复流形结构的概念.

设已给了 M 一个复流形结构 $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$, (U, φ) 称为是上述复流形结构相容的图. 如果 U 是 M 中的开集且 $\varphi: U \to \varphi(U)$ 是 U 到 $\mathbb{C}^n$ 中的开集 $\varphi(U)$ 同胚, 而对 $\forall i \in I$ 且当 $U \cap U_i \neq \varnothing$ 时, $\varphi \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U \cap U_i) \to \varphi(U \cap U_i)$ 与 $\varphi \circ \varphi_i^{-1}: \varphi(U \cap U_i) \to \varphi_i(U \cap U_i)$ 都是 $\mathbb{C}^n$ 的开集之间的全纯同胚.

定义 1.9　如果 M 是一个复流形, 它的复流形结构包含了所有可容许图就称为一个完全的复流形结构.

今后本书在讨论复流形时都假定该复流形具有完全复流形结构, 这样讨论时就可以认为在此复流形 M 上有所有可允许的局部坐标. 这样就可以应用所有需要的局部坐标.

如果 M 是一个紧 T_2 拓扑且具有复流形结构就是一个紧复流形, 否则就是非紧复流形. 在讨论非紧复流形时一般都要加上仿紧空间的条件.

$[0,1]$ 是 $\mathbb{R}$ 上的区间, 若 $\gamma: [0,1] \to M$ 是一个可微分映射, 则称之为 M 上一条可微分曲线. 如果 $p \in \gamma([0,1])$, 这条曲线在 p 点的切向量就称为 M 在 p 点切向量.

根据定义, 设 $p\in U_i$, 则存在 $[a,b]\subset[0,1]$, 使得 $p\in\gamma[a,b]\subset U_i$, 而 $\varphi_i\circ\gamma([a,b])$ 是经过 $\varphi_i(p)$ 的可微分曲线, 这条曲线在 $\varphi_i(p)$ 的切向量, 这个切向量就是上述 p 点切向量的局部坐标表示. 因为 $z_i^{(k)}=x_{(i)}^k+\sqrt{-1}y_{(i)}^k(1\leqslant k\leqslant n)$ 是 (φ_i,U_i) 的局部坐标, 因此, 这个切向量有表达式 $a^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}+b^j\dfrac{\partial}{\partial y^j}(a^i,b^j\in\mathbb{R})$. 这里沿用几何中的 Einstein 约定, 即对成对出现的 i,j 都表示从 1 到 n 求和. 反之, 在 $\varphi_i(p)$ 上的 $\varphi_i(p)$ 为起点的任何一个向量都可以看成经过 $\varphi_i(p)$ 的曲线的切向量, 因此, 它也是在 $p\in M$ 的切向量的一个局部表示, 因此, p 点的切向量全体实际上就是整个 $\mathbb{R}^{2n}$, 于是它有一个自然的向量空间结构. 所有在 p 点切向量构成的向量空间用 $T_p(M)\cong\mathbb{R}^{2n}$ 表示.

关于切向量还有一个定义如下: 设 $p\in M$, $C_p^\infty(M)$ 表示在 p 点附近光滑函数的全体所成的集合, 这里说一个函数在 p 点附近光滑是指这个函数在 p 的某个邻域内光滑. 现在 $C_p^\infty(M)$ 中引入如下等价关系: 如 $f,g\in V$, 若存在一个 p 的邻域 U, 使得 $f|_U=g|_U$ 就称 f, g 等价, 记作 $f\sim g$. 很容易验证这是一个等价关系. $C_p^\infty(M)$ 模上这个等价关系所成的集合就称为光滑函数在 p 点的芽, 用 $\varLambda_p^0(M)$ 来表示. $\varLambda_p^0(M)$ 上有一个自然的加法与乘法以及数乘运算, 因为 $\varLambda_p^0(M)$ 是一个等价类的集合, 每个等价类都在 p 的邻域成立, 而无须考虑具体的定义域, 因此, 两个 $\varLambda_p^0(M)$ 元素乘与加之后, 依然是在 p 的一个邻域有意义, 对于数乘也是一样.

定义 1.10　X 称为是 p 点的一个切向量, 如果 X 是一个 $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ 的线性算子,

$$X:\varLambda_p^0(M)\to\mathbb{R}(\mathbb{C})$$

且适合对 $\forall k_1,k_2\in\mathbb{R}(\mathbb{C})$ 与 $\forall f_1,f_2\in\varLambda_p^0(M)$ 有

(1) $X(k_1f_1+k_2f_2)=k_1X(f_1)+k_2X(f_2)$;

(2) $X(f_1f_2)=f_1(p)X(f_2)+f_2(p)X(f_1)$.

(2) 就相当于微商的 Leibniz 法则, 实际上由 (2) 可以推出 $X(1\cdot1)=X(1)+X(1)$, 因此 $X(1)=0$, 因而由 (1) 知对任何常数 C 都有 $X(C)\equiv0$.

因为 $p\in U_i$, 它的局部坐标 $\{x_{(i)}^k,y_{(i)}^k\}_{1\leqslant k\leqslant n}$ 都是 U_i 上的光滑函数, 在 $\varLambda_p^0(M)$ 等价类仍用 $\{x_{(i)}^k,y_{(i)}^k\}$ 记. 不失一般性, 假定 $x_{(i)}^k(p)=y_{(i)}^k(p)=0(1\leqslant k\leqslant n)$, 设

$$X(x_{(i)}^k)=a^k,\ 1\leqslant k\leqslant n\quad 和\quad X(y_{(i)}^k)=b^k,\ 1\leqslant k\leqslant n,$$

则此 X 就恒等于 $a^k\dfrac{\partial}{\partial x_{(i)}^k}+b^k\dfrac{\partial}{\partial y_{(i)}^k}$. 因为如果 f 是 p 点附近的光滑函数, 则由 Taylor 展开

$$f(x,y)=C+l_kx_{(i)}^k+t_ky_{(i)}^k+O(x_l^2,y_l^2,x_iy_i),$$

$$a^k\frac{\partial f}{\partial x_{(i)}^k}+b^k\frac{\partial f}{\partial x_{(i)}^k}=a^kl_k+b^kt_k,$$

而

$$Xf(x,y) = X(C) + X(l_k x(i)^k) + X(t_k y(i)^k) = l_k a^k + t_k b^k,$$

因此, $X = a^k \dfrac{\partial}{\partial x^k_{(i)}} + b^k \dfrac{\partial}{\partial y^k_{(i)}}$. 上面 $f_{(x,y)}$ 表示式中最后一项中的, $x^2_{(l)}$, $y^2_{(i)}$, $x_{(i)}y_{(i)}$ 表示 $x^{k_1}_{(i)}x^{k_2}_{(i)}$, $y^{k_1}_{(i)}y^{k_2}_{(i)}$, $x^{k_1}_{(i)}y^{k_2}_{(i)}(1 \leqslant k_1, k_2 \leqslant n)$. 而由定义 1.10 中 (2) 知道它在 X 作用下都取值为零.

现 $T_p(M) \cong \mathbb{R}^{2n}$, 这对复流形 M 上的每个点 $p \in M$ 都成立. 令 $T(M) = \bigcup\limits_{p\in M} T_p(M)$, 称之为 M 的切丛, 下面来说明 $T(M)$ 是一个实的 $4n$ 维流形. 设 $(\phi_i, U_i)_{i\in I}$ 是 M 的复流形结构, 则 $\varphi_i(U_i)$ 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 中一个开集. 令 $\pi: T(M) \to M$ 是一个映射, 使得 $\pi(T_p(M)) = p$ 对 $\forall U_i (i \in I)$ 成立, $\pi^{-1}(U_i) = \bigcup\limits_{p\in U_i} T_p(M)$, 而 $\pi^{-1}(U_i) \cong \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^{2n}$, 而 $\varphi_i(U_i)$ 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 的开集, $\varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^{2n}$ 就是 $\mathbb{R}^{4n}$ 中开集, 则 $\forall V \in \pi^{-1}(U_i)$, $\pi(V) = p \in U_i$, V 就具有局部表示

$$V = a^k \frac{\partial}{\partial x^k_{(l)}}(p) + b^k \frac{\partial}{\partial y^k_{(l)}}(p). \tag{1.4}$$

因此, V 取决于其局部表示的系数 $(a^k, b^k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, 另外还取决于 p 点, 也可以说取决于 p 点的实局部坐标 $(x^k_{(i)}(p), y^k_{(i)}(p))$. 因此, V 实际上对应于 $4n$ 个实坐标 $(a^k, b^k, x^k_{(i)}, y^k_{(i)})_{1\leqslant k\leqslant n}$. 上述对应所决定的映射 $\varPhi_i : \pi^{-1}(U_i) \to \varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^{2n}$ 是一个一一对应. 现在对 $T(M)$ 上赋予一个自然的拓扑, 即将 $\{\varphi_i(U_i) \times \mathbb{R}^{2n}\}_{i\in I}$ 中的开集在 $\varPhi_i^{-1}$ 的作用下所成的集合作为基生成 $T(M)$ 的拓扑, $T(M)$ 赋予这个拓扑之后 $\varPhi_i$ 自然是一个拓扑同胚. 如果 $p \in U_i \cap U_j$, 则显然 V 除了关于上述局部坐标表示之外还有作为 $\pi^{-1}(U_j)$ 中点的局部坐标表示, 即

$$V = c^l \frac{\partial}{\partial x^l_{(j)}}(p) + d^l \frac{\partial}{\partial y^l_{(j)}}(p), \tag{1.5}$$

它的局部坐标表示为 $(c^l, d^l, x^l_{(j)}, y^l_{(j)})_{1\leqslant l\leqslant n}$. 显然, $x^l_{(j)}$, $y^l_{(j)}$ 是 $x^k_{(i)}$, $y^k_{(i)}$ 的光滑函数, 因为它们就是 $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ 的实表示式, 而由

$$\begin{aligned}
c^l \frac{\partial}{\partial x^l_{(j)}} + d^l \frac{\partial}{\partial y^l_{(j)}} =& a^k \frac{\partial}{\partial x^k_{(i)}} + b^k \frac{\partial}{\partial y^k_{(i)}} \\
=& a^k \left(\frac{\partial x^l_{(j)}}{\partial x^k_{(i)}} \frac{\partial}{\partial x^l_{(j)}} + \frac{\partial y^l_{(j)}}{\partial x^k_{(j)}} \frac{\partial}{\partial y^l_{(j)}} \right) \\
&+ b^k \left(\frac{\partial x^l_{(j)}}{\partial y^k_{(i)}} \frac{\partial}{\partial x^l_{(j)}} + \frac{\partial y^l_{(j)}}{\partial y^k_{(i)}} \frac{\partial}{\partial y^l_{(j)}} \right),
\end{aligned}$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com