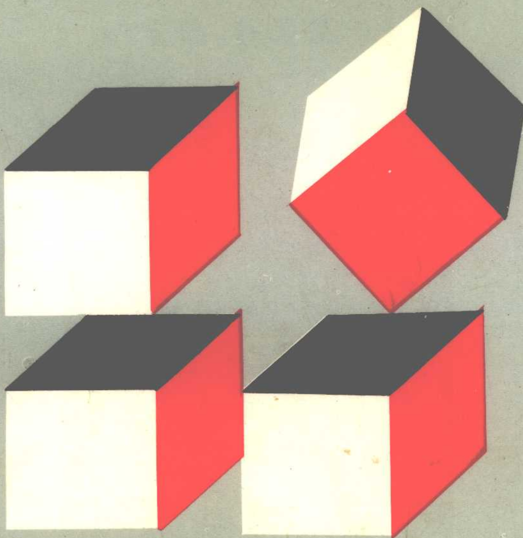
高等学校教材

弹塑性力学简明教程

主编 熊健民 陈升平



武汉工业大学出版社

高等学校教材

弹塑性力学简明教程

主编：熊健民　陈升平

j　　　　版社

图书在版编目(CIP)数据

弹塑性力学简明教程/熊健民 陈升平编.武汉工业大学出版社,1996.6

ISBN 7-5629-1101-0

Ⅰ.简…

Ⅱ.熊…

Ⅲ.弹塑性力学-高等学校-教材

N.0344.1

内 容 简 介

本书简要介绍了弹塑性力学的基本概念和解题方法,内容包括应力和应变分析、应力应变关系、平面问题、空间问题、有限单元法基础,每部分均附有习题及习题答案。本书可作为机械、土木等专业本、专科学生的弹塑性力学简明教材,并可供有关工程技术人员参考。

弹塑性力学简明教程

武汉工业大学出版社出版发行

武汉市皇冠彩印厂印装

开本:787×1092 1/32 印张:5.3125 字数:110千字

1996年6月第1版 1996年6月第1次印刷

印数:1—2000册

定价:7.00元

目　　录

第一章 绪 论

§1-1 弹塑性力学的研究对象

弹塑性力学是固体力学的一个分支学科，是研究可变形固体受到外荷载、温度变化及边界约束变动等作用时，弹塑性变形和应力状态的科学。弹塑性力学这个名词是根据固体材料在受外部作用时所呈现出来的弹性与塑性性质命名的。弹性力学讨论固体材料中的理想弹性体及固体材料弹性变形阶段的力学问题。塑性力学讨论固体材料塑性变形阶段的力学问题。可变形固体的弹性阶段与塑性阶段是整个变形过程中两个不同的阶段，弹塑性力学是研究这两个密切相连阶段的力学问题的科学。

弹塑性力学和材料力学、结构力学有密切关系，但在研究对象和研究方法上是有区别的。材料力学的研究对象基本上是各种杆件，即物体的长度远大于其厚度和宽度的一维空间问题。结构力学则主要研究桁架、刚架等杆件系统。弹塑性力学除了更精确地研究一维空间问题外，更重要的是研究材料力学和结构力学所不能解决的问题。例如板、壳等长度和宽度远大于厚度的二维空间问题，以及一些长、宽、厚都是同阶大小的三维空间问题，如挡土墙、堤坝、地基等实体结构。在研究方法方面，弹塑性力学以其提出问题的普遍性和解答问题的

严密性为特点。例如，在材料力学和结构力学中以平面截面假设为基本前提，简化了计算，得出工程上适用的解答。但这些解答是近似的。在弹塑性力学中则一般不采用平面截面假设。在材料力学和结构力学中求内力时，往往采用截面法，取脱离体列静力平衡条件求内力，它所解决的是危险截面或指定截面的最大应力。弹塑性力学则与此相反，是针对无限小的微分体来列出平衡方程，这样，问题归结为求解一系列偏微分方程组，它所解决的是整个物体内部的应力分布规律——应力场的问题。

§1-2　基本假设

弹塑性力学中将研究对象的物理和几何性质加以抽象，提出了下列假设。

(1)假设物体是连续的。把物体看成是连续介质而内部没有空隙，因此任何一点的应力、应变和位移才可能是坐标的连续函数，这样，我们在进行弹塑性力学分析时，就可应用数学分析这个强有力的工具。

(2)假设物体为均匀的各向同性的。即认为物体内各点介质的力学特性相同，且各点的各方向的性质也相同，也就是说，表征这些特性的物理参数在整个物体内是不变的。

(3)假设物体的变形属于小变形。即认为物体在外力作用下所产生的变形，与其本身几何尺寸相比很小，可以不考虑因变形而引起的尺寸变化。这样，就可以用变形以前的几何尺寸来代替变形以后的尺寸。此外，物体的变形和各点的位移公式中二阶微量可以略去不计，从而使得几何变形线性化。

(4)假设物体原来是处于一种无应力的自然状态。即在外力作用以前，物体内各点应力均为零。我们的分析计算是从这种状态出发的。

以上基本假设是本书讨论问题的基础。还有一些针对具体问题所作的假设，将在以后各章分别给出。

§1-3 基本符号的意义及规定

为了建立弹塑性力学的基本方程，本书所用外力、应力、应变、位移等符号的意义及规定如下。

同材料力学一样，弹塑性力学中的外力包括表面力和体积力。表面力以“单位面积之表面力”即“表面力集度”S(N/m^2)表示，在直角坐标系中沿坐标轴的分量表以$\bar{X}$、$\bar{Y}$、$\bar{Z}$。体积力(例如：重力或惯性力)以“单位体积之体积力”即“体积力集度”F(N/m^3)表示，沿坐标轴的分量表以X、Y、Z。

在外力作用下，物体内部各截面将产生应力，应力以“单位截面积之内力”表示，表以p(N/m^2)。垂直于截面的应力分量称为正应力，表以σ；平行于截面的应力分量称为剪应力，表以τ。在应力符号右下角，以角标表示应力之作用面及应力方向。在直角坐标系中若取棱边与坐标轴平行的无限小平行六面体，则其各面上应力之符号如图1-1所示。其中，正应力角标表示所在截面的外法线方向；剪应力有两个角标，第一个角标表示所在截面的外法线方向，第二个角标表示应力方向。

弹塑性力学中应力分量的正负号按如下规则决定：当截面上外法线方向及应力分量方向同其相应的坐标轴正向均相同或均相反时，应力分量为正；当截面外法线方向及应力分量

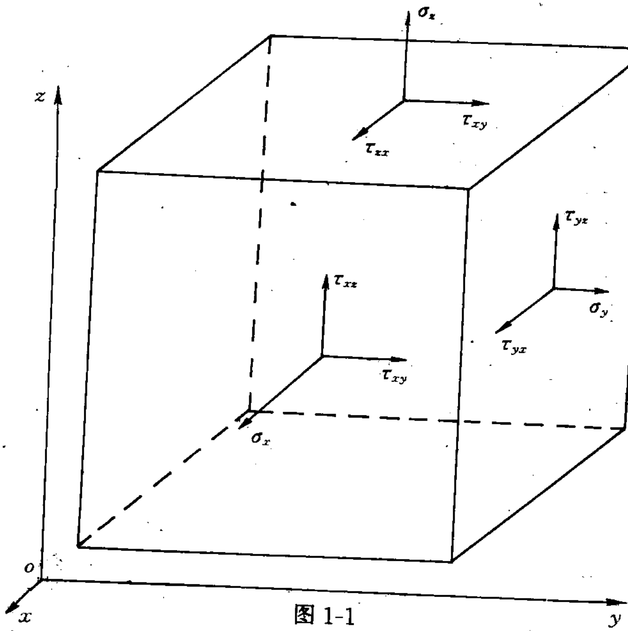


图 1-1

方向同其相应的坐标轴正向一同一反时，应力分量为负。图 1-1 中所示应力方向均为正。

按这种规定所得结果，对正应力的正负号与材料力学所得结果相同，即拉应力为正，压应力为负。对剪应力的正负号则与材料力学应力解析法中有所不同，读者自己可以作出比较，务必区别清楚。

在外力作用下，物体内部发生应力的同时要发生应变。物体的应变可用图 1-1 所示无限小平行六面体各棱边长度及其间夹角的改变量来表示。棱边单位长度的改变量称为正应变，表以 ε_x、ε_y、ε_z，角标表示棱边的原方向。正应变正负号规则是：伸长为正，缩短为负。棱边间夹角的改变量称为剪应变，表以

τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx}。剪应变正负号的规则是：直角变小时为正，变大时为负。上述正应变与剪应变的正负号规定刚好同正应力与剪应力的正负号规定相对应，即正号的正应力（或剪应力）发生正号的正应变（或剪应变），反之亦然。

在外力作用下，产生应力、应变的同时，物体内各点也将发生位置的移动，即“位移”。在直角坐标系中，任一点的位移可用沿 x、y、z 轴的相应分量 u、v、w 表示，位移分量的正负号规则是：与坐标轴正向相同者为正，相反者为负。

一般而论，物体内任意一点的面力分量、体力分量、应力分量、应变分量和位移分量都是随该点位置而变的，因而都是位置坐标的函数。我们下面将讨论已知面力及体力时，如何求解应力、应变及位移。

第二章　应力分析

§2-1　平衡方程

当物体处于平衡状态时，根据连续性假设，物体内从一点到另一点，其应力状态是连续变化的。换言之，这是一个非均匀的应力场。每一个应力分量都是位置的函数。现推导控制其变化的一组平衡微分方程。

如图 2-1 所示，在三维直角坐标系(x,y,z)中，从受力物体中取出边长为 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$ 的无限小微元体，其各面作用的应力均示于图上。应力正负号规定仍同前。图上所示应力方向均为正方向。

设体力分量为 X,Y,Z。现列出此微元体的平衡条件。由 $\Sigma F_x=0$，可得：

$$\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\sigma_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$-\tau_{yx}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\tau_{zx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+X\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

由 $\Sigma F_y=0$ 及 $\Sigma F_z=0$ 可得另外两个方程。化简后即得

应力 ① 应力是内力的分布集度　　应变 ① 变形的分布集度

② 强度指标　　②

③ 是判断弹性和塑性的指标

④ 应力是不可测量

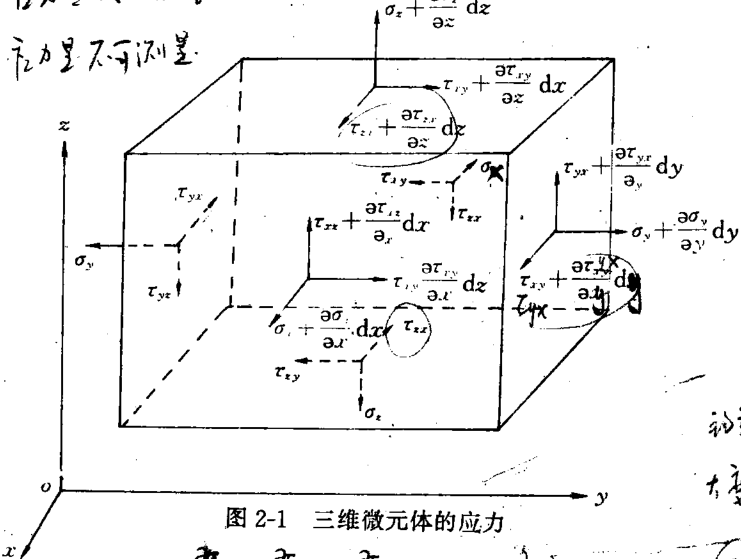
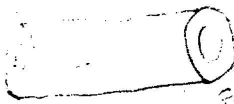


图 2-1　三维微元体的应力



$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+X=0\\
\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+Y=0\\
\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+Z=0
\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{-}1)
$$

弹性变形

大变形小应变

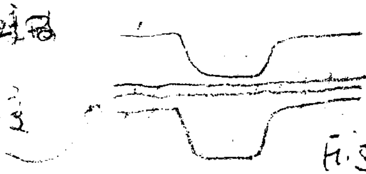
回弹

式(2-1)称为纳维叶方程。另外，对微元体取力矩方程，可得表示剪应力互等定理的三个关系

$$\tau_{xy}=\tau_{yx},\tau_{yz}=\tau_{zy},\tau_{zx}=\tau_{xz}\qquad(2\text{-}2)$$

方程(2-1)共三个方程包含六个独立的应力分量，因此，任何弹性和塑性理论问题都是超静定的。为了求解平衡方程中的应力，还必须利用几何的和物理的补充方程。

大变形



机械加工导轨

压边压向回弹

§2-2 任意斜截面上的应力及应力边界条件

下面证明已知三个正交面上的六个应力分量一定可以求出通过物体内一点任意斜截面上的应力。

设物体在任一点 P 的六个应力分量 σ_x、σ_y、σ_z、τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx} 为已知，求过 P 点的任一斜截面上的应力。为此，在 P 点附近取一平面 ABC，并与过 P 点的平行于坐标面的三个平面形成一个无限小的四面体 $PABC$，如图 2-2 所示。当四面体各边趋于零时，ABC 面上的应力就是过点 P 的任意斜截面上的应力。

令斜面 ABC 的外法线为 $\vec{N}$，方向余弦分别为：$l=\cos(\vec{N},X)$，$m=\cos(\vec{N},Y)$，$n=\cos(\vec{N},Z)$；并令斜面 ABC 的面积为 ΔS，则与坐标面平行的微面 BPC，APB，CPA 的微面积分别为 $l\Delta S$，$n\Delta S$，$m\Delta S$。此外，令四面体的体积为 ΔV，斜面 ABC 上沿坐标轴的应力分量为 X_N、Y_N、Z_N，则根据 $\Sigma F_x=0$，得

$$X_N\Delta S - \sigma_x l\Delta S - \tau_{yx}m\Delta S - \tau_{zx}n\Delta S + X\Delta V = 0$$

方程两边除以 ΔS 并移项后得：

$$X_N + X\frac{\Delta V}{\Delta S} = l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx}$$

当四面体趋于无限小时，ΔV 是比 ΔS 更高一阶的微量，故 $\Delta V/\Delta S\to 0$。根据 $\Sigma F_y=0$ 及 $\Sigma F_z=0$ 又可得另两式。这样，可得斜截面上的应力公式如下

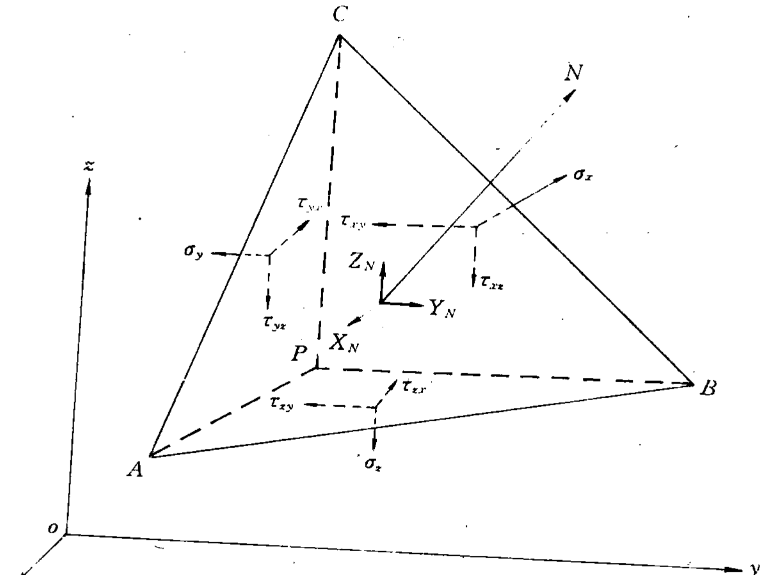


图 2-2　过 P 点任意斜截面上的应力

$$\left.\begin{aligned} X_N &= l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} \\ Y_N &= m\sigma_y + n\tau_{zy} + l\tau_{xy} \\ Z_N &= n\sigma_z + l\tau_{xz} + m\tau_{yz} \end{aligned}\right\} \tag{2-3}$$

若斜截面上正应力表以 σ_N，剪应力表以 τ_N，由式(2-3)得

$$\begin{aligned} \sigma_N &= lX_N + mY_N + nZ_N \\ &= l^2\sigma_x + m^2\sigma_y + n^2\sigma_Z + 2lm\tau_{xy} + 2mm\tau_{yz} + 2nl\tau_{zx} \end{aligned} \tag{2-4}$$

$$\tau_N^2 = X_N^2 + Y_N^2 + Z_N^2 - \sigma_N^2 \tag{2-5}$$

若斜面 ABC 是物体的边界面，则 X_N, Y_N, Z_N 就是边界

面的面力分量 $\overline{X}$、$\overline{Y}$、$\overline{Z}$，于是式(2-3)即成为应力边界条件

$$\left.\begin{aligned} l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} &= \overline{X} \\ m\sigma_y + n\tau_{zy} + l\tau_{xy} &= \overline{Y} \\ n\sigma_z + l\tau_{xz} + m\tau_{yz} &= \overline{Z} \end{aligned}\right\} \tag{2-6}$$

§2-3　坐标变换　应力张量

已知在直角坐标系 xyz 中物体内 O 点的九个应力分量，可求出在转动后的新坐标系 $x'y'z'$ 中同一点 O 的新的应力分

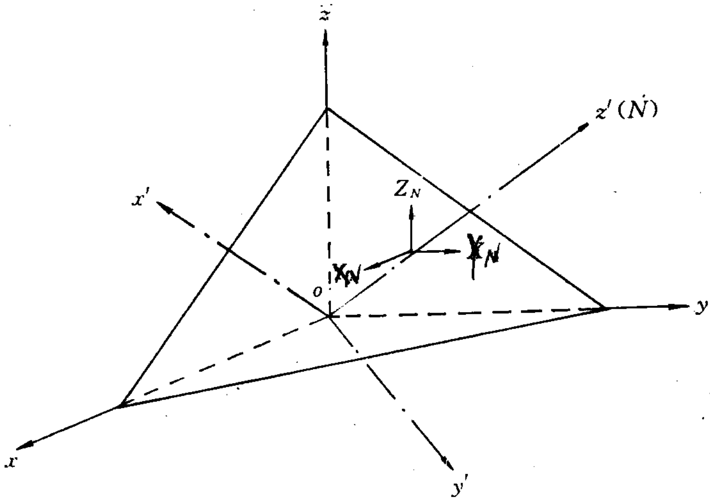


图 2-3

量。新应力分量是用原来的应力分量表示的。图 2-3 表示了过 O 点的新老坐标系，新坐标系各轴相对于老坐标系的方向余

弦如下表。

	x	y	z	
x'	l_1	m_1	n_1	
y'	l_2	m_2	n_2	
N z'	l_3	m_3	n_3	

对老系作一斜平面，其外法线 N 与 z' 轴一致，由式(2-3)得

$$
\begin{aligned}
X_N &= \sigma_x l_3 + \tau_{xy} m_3 + \tau_{xz} n_3 \\
Y_N &= \tau_{yx} l_3 + \sigma_y m_3 + \tau_{yz} n_3 \\
Z_N &= \tau_{zx} l_3 + \tau_{yz} m_3 + \sigma_z n_3
\end{aligned}
\tag{a}
$$

再把 X_N, Y_N, Z_N 分别投影到 z', x', y' 方向，于是有

$$
\begin{aligned}
\sigma_{z'} &= X_N l_3 + Y_N m_3 + Z_N n_3 \\
&= \sigma_x l_3^2 + \sigma_y m_3^2 + \sigma_z n_3^2 + 2\tau_{xy} l_3 m_3 + 2\tau_{yz} m_3 n_3 + 2\tau_{zx} n_3 l_3
\end{aligned}
\tag{b}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_{z'x'} &= X_N l_1 + Y_N m_1 + Z_N n_1 = \tau_{Z'X'} \\
&= \sigma_x l_1 l_3 + \sigma_y m_1 m_3 + \sigma_z n_1 n_3 + \tau_{xy}(l_1 m_1 + l_3 m_1) \\
&\quad + \tau_{yz}(m_1 n_3 + m_3 n_1) + \tau_{zx}(l_1 n_3 + l_3 n_1) \\
\tau_{z'y'} &= X_N l_2 + Y_N m_2 + Z_N n_2 = \tau_{y'z'} \\
&= \sigma_x l_2 l_3 + \sigma_y m_2 m_3 + \sigma_z n_2 n_3 + \tau_{xy}(l_2 m_3 + l_3 m_2) \\
&\quad + \tau_{yz}(m_2 n_3 + m_3 n_2) + \tau_{zx}(l_2 n_3 + l_3 n_2)
\end{aligned}
$$

同理可求出 $\sigma_{y'}$、$\sigma_{x'}$ 和 $\tau_{x'y'} = \tau_{y'x'}$。这样新坐标系的九个应力分量都可求出，它们同样也描述这一点的应力状态。一般说，一点的应力状态要用九个分量表示，当坐标系转动时，这九个量按上面规律变化，这样的量称为张量。应力张量记为 σ_{ij}，有