物理·化学专业用

群论

王天真　付克德　编

陕西师范大学出版社

群　　论

（物理化学专业用）

王天真　付克德　编

陕西师范大学出版社

群　论

王天真　付克德　编

·

陕西师范大学出版社出版

（西安市陕西师大120信箱）

陕西省新华书店经销

西安小寨印刷厂印刷

·

开本787×1092　1/32　印张13.25　插页2　字数279千字

1987年12月第1版　1987年12月第1次印刷

印数：1—1 000册

ISBN7-5613-0041-7/G·67

统一书号：7403·67　定价：2.23元

前 言

本书是编者在给研究生和本科生讲课的讲义基础上，吸收了专家和同学们的意见编写而成的。它可作为物理系、化学系有关专业研究生教材，本科生的选修课教材，也可供有关科研工作者、高校师生参考。

随着科学技术的发展，近年来群论被大量地应用于物理、化学等学科。因此，广大物理和化学工作者，愈来愈感到掌握群论的重要性。本书正是适应这种需要，本着应用群论的目的而编写的。

在编写过程中，我们充分注意到以下几点：

一、可接受性。群论较为抽象，我们力求深入浅出，在引入一些概念时，尽可能地结合物理内容，列举较多实例，进而加以概括升华；对基础部分的定理力求作到详尽推导；对其余部分，则不过分强调数学的严密性，而着重从物理模型去阐明问题。

二、加强基础。考虑到各专业的共同需要，本书加强了基础。如对同态与同构映射，有限群的基础理论，循环群，置换群，李群的生成元，李代数等部分，都作了较详尽的讨论。

三、重视应用。为了学以致用，本书突出了群的表示理论和特征标理论，较为细致地介绍了物理、化学中常用到的置换群、晶体点群和分子点群、$SO(3)$群和$SU(2)$群等典型

群。此外还增加了“有限群在物理学中的应用”和“量子力学中的群论”两章，其中前一章和后一章的部分内容，选自编者近年来发表的一些论文。在这些章节中，对群论应用于物理、化学中的根据、条件和范围，以及如何把物理问题转化为群论问题等方面，做了详细的讨论，通过这些群论应用的范例，使读者学习之后，可以起到举一反三的作用。

四、本书在每章(除第六章)之后，都配备有一定数量的习题，使读者通过解题，巩固基础，掌握运算技巧，从而培养利用群论解决实际问题的能力。

限于编者水平，书中错误在所难免，欢迎批评指正。

编 者

1987年12月于陕西师范大学

目　录

第一章　集合论概述

作为群论学习的基础，本章介绍了集合、映射、同态、同构、分类等几个近世代数中的基本概念。

§1 集合的概念和集合的运算

1.1 集合的基本概念

若干个(有限的或无限的)指定事物的全体，叫做一个集合。或简单的叫做集。

譬如，全体整数组成一个集合，叫做整数集，用 Z 表示；全体实数组成的集合，叫实数集，用R表示；全体复数组成的集合，叫复数集，用C表示。

构成集合A的事物称为A的元(或元素)。

显然，“事物a是A的元素”和“a属于A”是一回事，我们用记号$a\in A$表示a属于A。记号“$\in$”读作：属于。若a不是A的元素或a不属于A时，以记号 $a\overline{\in}A$ 表示，“$\overline{\in}$”读作：不属于。

一个集合所包含的元的个数假如是有穷个，就叫做有穷集，否则叫做无穷集。一个集合所包含的元的个数，叫做这个集合的基数或势。

集合的表示方法有两种：

1. 集合用列举它的所有元素来表示，譬如整数集Z可以写成：

$$Z=\{0, 1, -1, 2, -2, \cdots\}$$

或
$$Z=\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$$

一般，假如集合A含有元a，b，$c\cdots$，就用记号$A=\{a, b, c, \cdots\}$表示。

2．集合用其元和元所满足的条件（或元所具有的性质）来表示。譬如所有大于0且小于或等于2的实数构成的集合S，可用下面记号来表示：

$$S=\{x: 0<x\leqslant 2\}$$

右边括号表示一个集合，这一集合由满足条件"$0<x\leqslant 2$"的一切x所组成的，把条件写在括号内右侧，把元写在括号内左侧，中间用"："把它们分开。

一般，设集合$S=\{x: P(x)\}$，它表示S是由满足条件$P(x)$或具有性质P的那些元素x所组成的集合。

空集　一个元也没有的集合，也认为是集合的一种，叫做空集，记作ϕ。要注意"$\{0\}$不是空集，因为它是由一个元素0所组成的，所以并不空。

1.2 集合的运算

子集与包含集　设有两个集合A和B，如果A中的每一个元素都是集合B中的元素，就说集合B包含集合A。即

若$a\in A$，必有$a\in B$，就说$A\subset B$或$B\supset A$

记号"$B\supset A$"读作"B包含A"，"$A\subset B$"读作"A包含于B"．或者

若$a\in A\Longrightarrow a\in B$（"$\Longrightarrow$"表示"蕴涵"），就说$A\subset B$或$B\supset A$，这时，$A$叫做$B$的子集，$B$又叫做$A$的包含集。

集合的相等　如果集合A中的所有元素都属于集合B，

同时B中的所有元素又都属于A，即

$$A \subset B \qquad B \supset A$$

也就是说，A中的元与B中的元完全相同，我们就说A与B相等，记为

$$A = B$$

在集合论中，当证明两个集合A和B相等时，常常先证明$A \subset B$，再证明$A \supset B$。

由"包含"和"相等"的概念，可知以下显而易见的事实：

(i) $\phi \subset A$，即任意集合都包含空集，

(ii) $A \subset B$ & $B \subset C \Longrightarrow A \subset C$，

(iii) $A \subset A$，即任何集合A包含它自身。

假如$A \subset B$，但$A \neq B$，那么A就叫做B的真子集，用记号

$$A \subset B \quad 或 \quad B \supset A$$

表示，这时A的所有元都属于B，但B中至少有一个元y不属于A。真子集与包含集的关系可用(图1-1)表示。例如有理数集Q就是实数集R的一个真子集。

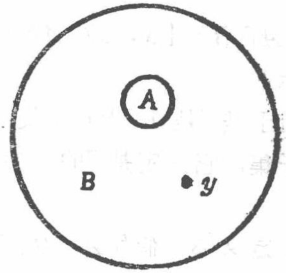


图1-1

上面介绍了包含和相等的概念，现在进一步介绍集合的三种运算法则：

定义 1 假如A、B是两个集合，那么属于A或属于B的所有元素组成的集合S，叫做A与B的和集(或称并集)。用

记号

$$S = A \cup B = \{ x: \ x \in A \text{或} x \in B \}$$

表示。于是S是A、B的包含集，即$A \subset A \cup B$，$B \subset A \cup B$，并且是包含A、B的最小集。

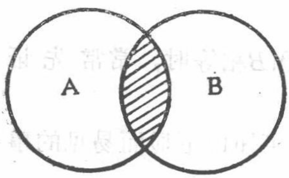


图1—2

$A \cap B$

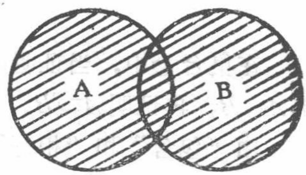


图 1-3

$A \cup B$

定义 2　假如A，B是两个集，那么属于A同时又属于B的所有元素组成的集P，叫做A与B的交集，用记号

$$P = A \cap B = \{ x: \ x \in A \ \& \ x \in B \}$$

表示。

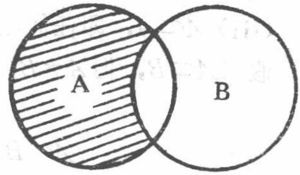


图 1-4

$A - B$

于是P是A，B的子集，并且任何集只要它同时是A，B的子集，它一定是P的子集，因此P是包含在A、B中的最大集。

定义 3　假如A，B是两个集，那么属于A同时又不属于B的所有元形成的集D，叫做A与B的差集，用记号

$$D = A - B = \{ x: \ x \in A \ \& \ x \overline{\in} B \}$$

表示。

关于交集、和集与差集的概念，用文氏图形（图1-2、图

1-3和图1-4）表示时，直观明显。

现在讨论和集($\cup$)与交集($\cap$)的基本性质

假如A、B、C是三个集合，它们的交集与并集有以下关系：

交换律　$A\cap B=B\cap A$　　$A\cup B=B\cup A$

结合律　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

　　　　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

　　　　$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

吸收律　$(A\cup B)\cap A=A$，$(A\cap B)\cup A=A$

下面用集合论的方法证明

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)\ .$$

证明　(i)先证明

$$(A\cup B)\cap C\subset(A\cap C)\cup(B\cup C)$$

设　$x\in(A\cup B)\cap C\Longrightarrow x\in A\cup B\ \&x\in C$

$\Longrightarrow x\in A$或$x\in B\ \&x\in C$

$\Longrightarrow x\in A\&x\in C$或

$x\in B\&x\in C$

$\Longrightarrow x\in A\cap C$或$x\in B\cap C$

$\Longrightarrow x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$$\therefore\ (A\cup B)\cap C\subset(A\cap C)\cup(B\cap C)\tag{1.1}$$

(ii)再证明

$$(A\cap C)\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap C$$

设　$x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)\Longrightarrow x\in(A\cap C)$或

$x\in(B\cap C)$

现在有(且仅有)两种可能：

一种：$x\in(A\cap C)\Longrightarrow x\in A\&x\in C$

$$\Longrightarrow x\in A\cup B\&x\in C$$

$$\Longrightarrow x\in(A\cup B)\cap C$$

另一种：$x\in B\cap C\Longrightarrow x\in B\&x\in C$

$$\Longrightarrow x\in A\cup B\&x\in C$$

$$\Longrightarrow x\in(A\cup B)\cap C$$

于是，不论在那种情况下，都有$x\in(A\cup B)\cap C$

$$\therefore\quad (A\cap C)\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap C \tag{1.2}$$

由(1.1)与(1.2)式可知

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$$ 证毕

对于差集，还可得出：

$$N\cap(M-N)=\phi$$

$$M=(M\cap N)\cup(M-N).$$

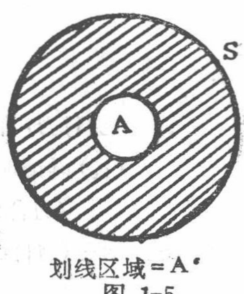
1.3 补集、和交关系

现讨论补集．设S是一个集合，A是S的一个子集，即$A\subset S$．作

$$A^c=\{x:\ x\in S\quad x\overline{\in}A\}$$

我们称A^c是A在S中的补集（或余集）．直观地说，余集A^c就是S中除掉A以外余下来的集(图1-5)．因此，可记为

$$A^c=S-A$$



划线区域$=A^c$

图 1-5

关于补集运算"C"有下列所谓德摩根(De Morgan)公式

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c,\ (A\cap B)^c=A^c\cup B^c$$

$$A^{cc}=A \quad A\cup A^c=S \quad A\cap A^c=\phi$$

头两个公式，又叫做和交关系，是集合论中的重要公式。这些公式用图形都不难加以验证。这里仅用集合论的方法对第一个公式加以证明。

求证$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$，即和集的补集等于各个补集的交。

证明 先证 $(A\cup B)^c\subset A^c\cap B^c$

设 $x\in(A\cup B)^c \Longrightarrow x\in S,\ x\overline{\in}A\cup B$

$\Longrightarrow x\in S,\ x\overline{\in}A \& x\overline{\in}B$

$\Longrightarrow x\in A^c \& x\in B^c$

$\Longrightarrow x\in A^c\cap B^c$

$\therefore\ (A\cup B)^c\subset A^c\cap B^c$ (1.3)

再证 $A^c\cap B^c\subset(A\cup B)^c$

设 $x\in A^c\cap B^c \Longrightarrow x\in A^c \ \& x\in B^c$

$\Longrightarrow x\in S \quad x\overline{\in}A \& x\overline{\in}B$

$\Longrightarrow x\in S \quad x\overline{\in}A\cup B$

$\Longrightarrow x\in(A\cup B)^c$

$\therefore\ A^c\cap B^c\subset(A\cup B)^c$ (1.4)

由(1.3)和(1.4)式，可知：

$$(A\cup B)^C=A^c\cap B^c$$ 证毕

1.2 集合的直积

定义 A，B两个集结的直积为

$$A\otimes B=\{(a,\ b):\ a\in A,\ b\in B\}$$

式中$(a,\ b)$表示元素a，b的有序对。即在集A中取一个元素a，又在集B中取一个元素b，把它们搭配成对$(a,\ b)$。注意，搭配中，a在前，b在后，次序不能调换。所有这种有序

对(a, b)的全体构成一个集合，这个集合就是直积集合$A\otimes B$。也可简记为$A\times B$。

例1 设$A=\{0, 1\}$、 $B=\{a, b, c\}$，那么

$$A\otimes B=\{(0,a),(0,b),(0,c),(1,a),(1,b),(1,c)\}$$

$$B\otimes A=\{(a,0),(b,0),(c,0),(a,1),(b,1),(c,1)\}$$

例2 设R是实数集，那么

$$R^3=R\otimes R\otimes R=\{(x,y,z): -\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty, -\infty<z<+\infty\}$$

就是通常的三维欧氏空间

$$R^n=\underbrace{R\otimes R\otimes\cdots\otimes R}_{n\text{个}}$$

$$=\{(x_1,x_2,\cdots x_n): -\infty<x_1<+\infty,\cdots -\infty<x_n<+\infty$$

就是通常的n维欧氏空间。

§2 映 射

映射这个概念的重要用途之一，是解决两个集合的比较问题。

设A和B是两个集合。对A内每一个元素$a\in A$，如果根据某一对应关系或法则f，可以使它与B中唯一个元素b对应，那么这个对应或法则f，叫做从A到B的映射。记为

$$f: A\to B\text{或}b=f(a)\quad(\text{图}1\text{-}6)\text{。}$$

b称为元a的象，a叫做b的象源。集合A称为映射f的定义域，由所有的象$f(a)$组成的集合称为f的值域，记为