数学分析讲义

（第二册）

陈天权 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

数学分析讲义

(第二册)

陈天权　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学分析讲义·第二册/陈天权编著. —北京: 北京大学出版社, 2010. 3

ISBN 978-7-301-15875-3

Ⅰ. 数…　Ⅱ. 陈…　Ⅲ. 数学分析–高等学校–教材　Ⅳ. O.17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 171114 号

书　　名: **数学分析讲义(第二册)**
著名责任者: 陈天权　编著
责 任 编 辑: 刘　勇
标 准 书 号: ISBN 978-7-301-15875-3/O·0797
出 版 发 行: 北京大学出版社
地　　址: 北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址: http://www.pup.cn　电子邮箱: zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话: 邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752021
出版部 62754962
印 刷 者: 北京飞达印刷有限责任公司
经 销 者: 新华书店
890 毫米×1240 毫米　A5　13.75 印张　400 千字
2010 年 3 月第 1 版　2010 年 3 月第 1 次印刷
印　　数: 0001–4000 册
定　　价: 28.00 元

目　录

第 7 章　点集拓扑初步

§7.1　拓 扑 空 间

本讲义的第三章讨论了实数列和复数列 (与实函数和复函数) 的极限概念. 每引进一个极限概念, 都必须重复基本上相似的叙述. 在极限概念的基础上第四章讨论了 (实数域到实数域, 实数域到复数域, 复数域到复数域的) 映射的连续性概念. 每引进一个连续映射的概念, 也必须重复基本上相似的叙述. 有时对于某种特殊情形 (例如, 在闭区间 $[a,b]$ 的端点 a 或 b 处函数的连续性), 还必须另加说明. 在第四章中还讨论了函数列的一致收敛性概念, 它在许多方面和数列收敛概念相似, 但必须重复进行讨论. 在数学的进一步发展中, 我们还会遇到类似的收敛性与连续性的概念, 它们虽然互相有异, 但在许多方面极其相似. 因此, 有必要把所有这样的问题放在一个更大的、更为抽象的框架中统一处理, 以免不必要的重复. 在 §4.5 的第 18 题中, 我们知道, $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射的连续性概念可以通过 $\mathbf{R}$ 上的开集概念来刻画. 这就是我们将在本章引进由开集概念刻画的 "拓扑空间" 这个抽象的数学概念的缘由. 我们只介绍拓扑空间理论中的已成为分析学的重要工具的数学概念和结果. 事实上, 这些概念已成为数学界常用的共同语言, 不了解它们将使我们难于与当今数学界进行真正的交流. 所以, 同学们有必要努力掌握它.

定义 7.1.1　设 X 是个集合. X 上的一个**拓扑** $\mathcal{T}$ 是由 X 的一些子集组成的满足以下条件的子集族:

(i) 设 A 是一个指标集, 则

$$\forall \alpha \in A(U_\alpha \in \mathcal{T}) \Longrightarrow \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha \in \mathcal{T};$$

(ii) 设 $F=\{1,\cdots,n\}$ 是有限个指标组成的指标集, 则

$$\forall j \in F(U_j \in \mathcal{T}) \Longrightarrow \bigcap_{j\in F} U_j \in \mathcal{T};$$

(iii) $\emptyset \in \mathcal{T},\ X \in \mathcal{T}$.

集合 X 和 X 上的一个拓扑 $\mathcal{T} \subset 2^X$ 组成的二元组 $(X,\mathcal{T})$ 称为一个**拓扑空间**, 其中 2^X 表示 X 的子集的全体构成的集合. 当 $\mathcal{T}$ 已从上下文可以无误地确定时, 也简称 X 是个拓扑空间. $\mathcal{T}$ 中的元素称为(关于拓扑 $\mathcal{T}$ 的)**开集**.

例 7.1.1　设 X 是个集合, $\mathcal{P}(X)$(也常记做 2^X) 是 X 的全部子集组成的子集族. 显然, $\mathcal{P}(X)$ 满足定义 7.1.1 中的条件 (i),(ii) 和 (iii), 故 $(X,\mathcal{P}(X))$ 是个拓扑空间, 称为 X 上的**离散拓扑空间**, $\mathcal{P}(X)$ 称为 X 上的**离散拓扑**.

例 7.1.2　设 X 是个集合, X 的子集族 $\{X,\emptyset\}$ 显然满足定义 7.1.1 中的条件 (i),(ii) 和 (iii), 故 $(X,\{X,\emptyset\})$ 是个拓扑空间, 称为 X 上的**平凡拓扑空间**, $\{X,\emptyset\}$ 称为 X 上的**平凡拓扑**.

应当指出, 离散拓扑空间和平凡拓扑空间是拓扑空间概念的两个极端: 最强和最弱的拓扑 (强与弱的确切定义将在稍后给出). 除了用它们来说明拓扑空间的概念外, 通常它们没有多大用处, 因为它们实在太简单, 不可能由离散拓扑空间和平凡拓扑空间概念得出任何深刻结果.

例 7.1.3　$\mathbf{R}$ 上的**普通拓扑**是指 $\mathbf{R}$ 的所有可以表示成开区间的并的集合组成的集族. 易见, 这个集族满足定义 7.1.1 中的条件 (i),(ii) 和 (iii). $\mathbf{R}$ 上的 “普通拓扑” 常记做 $\mathcal{U}$.(参看 §2.5 的第 23 及 24 题.)

例 7.1.4　$\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$ 上的**上拓扑**是指 $\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$ 的所有形如 $[-\infty,a)$, $a\in\mathbf{R}$ 的左无穷开区间, 空集 $\emptyset$ 和 $\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$ 组成的集族 $\mathcal{T}_u$. 不难检验, $(\mathbf{R}\cup\{-\infty\},\mathcal{T}_u)$ 满足拓扑应满足的三个条件.

例 7.1.5　$\mathbf{R}\cup\{\infty\}$ 上的**下拓扑**是指 $\mathbf{R}\cup\{\infty\}$ 的所有形如 $(a,\infty]$, $a\in\mathbf{R}$ 的右无穷开区间, 空集 $\emptyset$ 和 $\mathbf{R}\cup\{\infty\}$ 组成的集族 $\mathcal{T}_l$. 同学们不难检验, $(\mathbf{R}\cup\{\infty\},\mathcal{T}_l)$ 满足拓扑应满足的三个条件.

例 7.1.6　$\mathbf{R}^n$ 上的**普通拓扑** $\mathcal{U}$ 是由这样的子集组成的子集族 $\mathcal{U}$:

$$G\in\mathcal{U} \Longleftrightarrow \forall \mathbf{x}\in G\exists\varepsilon>0(\mathbf{B}(\mathbf{x},\varepsilon)\subset G),$$

其中 $\mathbf{B}(\mathbf{x},\varepsilon)=\{\mathbf{y}\in\mathbf{R}^n:|\mathbf{y}-\mathbf{x}|<\varepsilon\}$ 是以 $\mathbf{x}$ 为球心, ε 为半径的开球, $\mathbf{R}^n$ 中向量 $\mathbf{z}=(z_1,\cdots,z_n)$ 的长度是欧氏空间中的长度: $|\mathbf{z}|=\left[\sum\limits_{j=1}^{n}z_j^2\right]^{1/2}$.易见, 这个集族满足定义 7.1.1 中的条件 (i),(ii) 和 (iii). 例 7.1.3 是本例的特例.

例 7.1.7 用 $C[0,1]$ 表示定义在闭区间 $[0,1]$ 上的全体实值连续函数构成的集合. $C[0,1]$ 上的**最大绝对值拓扑**(或称**一致收敛拓扑**) $\mathcal{M}$ 定义为

$$\mathcal{M}=\{G\subset C[0,1]:\forall x\in G\exists\varepsilon>0(\mathbf{B}(x,\varepsilon)\subset G)\},$$

其中 $\mathbf{B}(x,\varepsilon)=\{y\in C[0,1]:|y-x|=\max\limits_{t\in[0,1]}|y(t)-x(t)|<\varepsilon\}$**是以 x 为球心, ε 为半径的** $C[0,1]$ **中的开球**, $|z|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|z(t)|$称为函数 $z=z(t)\in C[0,1]$ 在 $(C[0,1],\mathcal{M})$ 中的**长度**(或称**范数**或称**模**). 易见, $(C[0,1],\mathcal{M})$ 满足定义 7.1.1 中的条件 (i),(ii) 和 (iii).

例 7.1.8 我们将用 $C[0,1]$ 表示闭区间 $[0,1]$ 上的全体实值连续函数构成的集合. $C[0,1]$ 上的**绝对值积分拓扑**$\mathcal{I}$ 定义为

$$\mathcal{I}=\{G\subset C[0,1]:\forall x\in G\exists\varepsilon>0(\mathbf{B}(x,\varepsilon)\subset G)\},$$

其中$\mathbf{B}(x,\varepsilon)=\left\{y\in C[0,1]:|y-x|_{\mathcal{I}}=\int_0^1|y(t)-x(t)|dt<\varepsilon\right\}$ **是以 x 为球心, ε 为 (绝对值积分) 半径的开球**, $C[0,1]$ 中的函数 $z=z(t)$ 在 $(C[0,1],\mathcal{I})$ 中的**长度**(或称**范数**或称**模**) 是 $|z|_{\mathcal{I}}=\int_0^1|z(t)|dt$.易见, $(C[0,1],\mathcal{I})$ 满足定义 7.1.1 中的条件 (i),(ii) 和 (iii).

例 7.1.9 我们将用 $\mathcal{R}[0,1]$ 表示闭区间 $[0.1]$ 上的全体实值 Riemann 可积函数构成的集合. 在 $\mathcal{R}[0,1]$ 上引进关系 $\sim$ 如下:

$$f\sim g\Longleftrightarrow\int_0^1|f(t)-g(t)|dt=0.$$

易见, $\sim$ 是 $\mathcal{R}[0,1]$ 上的一个等价关系. 由这个等价关系产生的等价类全体记做 $R[0,1]$. 为简单起见, 我们通常不区分等价类及代表这个等

价类的任何函数, 只是作以下约定: 两个等价的函数将看成是相同的函数. $R[0,1]$ 上的拓扑 $\mathcal{I}_1$ 定义为

$$\mathcal{I}_1=\{G\subset R[0,1]:\forall x\in G\exists\varepsilon>0(\mathbf{B}(x,\varepsilon)\subset G)\},$$

其中 $\mathbf{B}(x,\varepsilon)=\left\{y\in C[0,1]:|y-x|_{\mathcal{I}_1}=\int_0^1|y(t)-x(t)|dt<\varepsilon\right\}$ **是以 x 为球心, ε 为半径的开球**, $R[0,1]$ 中的函数 $z=z(t)$ 在 $(\mathcal{R}[0,1],\mathcal{I}_1)$ 中的长度 (或称范数) 是 $|z|_{\mathcal{I}_1}=\int_0^1|z(t)|dt$.易见, $(\mathcal{R}[0,1],\mathcal{I}_1)$ 满足定义 7.1.1 中的条件 (i),(ii) 和 (iii).

值得指出的是, 例 7.1.7 和例 7.1.8 是在同一个集合 $C[0,1]$ 上赋予了两个不同的拓扑 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{I}$. 因此, 得到了两个不同的拓扑空间: $(C[0,1],\mathcal{M})$ 和 $(C[0,1],\mathcal{I})$. 例 7.1.8 和例 7.1.9 是在不同的集合 $C[0,1]$ 和 $R[0,1]$ 上赋予了两个不同的, 但十分相似的拓扑 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{I}_1$.

定义 7.1.2　设 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 是集合 X 上的两个拓扑. 若 $\mathcal{T}_1\subset\mathcal{T}_2$, 则称**拓扑$\mathcal{T}_1$比拓扑$\mathcal{T}_2$弱**, 或称**拓扑$\mathcal{T}_2$比拓扑$\mathcal{T}_1$强**.

易见, X 上的平凡拓扑是 X 上的拓扑中最弱的拓扑, 即它比 X 上的任何拓扑都要弱. X 上的离散拓扑是 X 上的拓扑中最强的拓扑, 即它比 X 上的任何拓扑都要强. $\mathbf{R}$ 上的上拓扑和下拓扑均弱于 $\mathbf{R}$ 上的普通拓扑. 例 7.1.7 和例 7.1.8 是在同一个集合 $C[0,1]$ 上赋予了两个不同的拓扑 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{I}$, 同学可以自行证明: $\mathcal{M}$ 比 $\mathcal{I}$ 强.

定义 7.1.3　设 X 是拓扑空间, $x\in X, N\subset X$. N 称为 x 的一个**邻域**, 若有开集 G 使得 $x\in G\subset N$. 这时, 我们称 x 为 N 的一个**内点**.

含有点 x 的开集 G 必是 x 的邻域, 它称为 x 的一个**开邻域**. 显然, 点 x 的任何邻域都包含点 x 的一个开邻域.

命题 7.1.1　X 的子集 G 是开集, 当且仅当 G 的任何点都是 G 的内点.

证　若 G 是开集, 则

$$\forall x\in G(x\in G\subset G).$$

故 G 是 G 的任何点的邻域, 换言之, G 的任何点都是 G 的内点.

反之, 若 G 的任何点都是 G 的内点, 则

$$\forall x \in G \exists U_x \in \mathcal{T}(x \in U_x \subset G),$$

其中 $\mathcal{T}$ 表示 X 上的拓扑. 这时, $G \supset \bigcup\limits_{x\in G} U_x$. 又对于任何 $x \in G$, $x \in U_x$, 故 $G \subset \bigcup\limits_{x\in G} U_x$. 因此

$$G = \bigcup_{x\in G} U_x \in \mathcal{T},$$

即 G 是开集. □

定义 7.1.4 设 X 是拓扑空间, $F \subset X$. F 称为**闭集**, 假若 $F^C = X \setminus F$ 是开集.

由 de Morgan 对偶原理, X 的全体闭集构成的集族 $\mathcal{F}$ 应具有以下性质:

(a) 设 A 是个指标集, 则 $\forall \alpha \in A(F_\alpha \in \mathcal{F}) \Longrightarrow \bigcap\limits_{\alpha\in A} F_\alpha \in \mathcal{F}$;

(b) 设 B 是个由有限个指标组成的指标集, 则

$$\forall \alpha \in B(F_\alpha \in \mathcal{F}) \Longrightarrow \bigcup_{\alpha\in B} F_\alpha \in \mathcal{F};$$

(c) $X \in \mathcal{F}$, $\emptyset \in \mathcal{F}$.

定义 7.1.5 设 X 是拓扑空间, $E \subset X$. E 的**闭包**, 记做 $\overline{E}$, 定义为所有包含 E 的闭集之交.

由闭集的性质 (a), E 的闭包 $\overline{E}$ 也是闭集. 事实上, 定义 7.1.5 是在说, E 的闭包 $\overline{E}$ 是包含 E 的最小闭集, 即任何包含 E 的闭集必包含 E 的闭包 $\overline{E}$. 由此, E 是闭集, 当且仅当 $E = \overline{E}$. $\overline{E}$ 的另一个刻画是

命题 7.1.2 设 X 是拓扑空间, $E \subset X$, 则对于任何 $x \in X$, 有

$$\begin{aligned} x \in \overline{E} &\Longleftrightarrow \forall x\text{的开邻域}U(U \cap E \neq \emptyset) \\ &\Longleftrightarrow \forall x\text{的邻域}V(V \cap E \neq \emptyset). \end{aligned} \tag{7.1.1}$$

证 为了证明 (7.1.1) 中的第一个双箭头, 只需证明双箭头两端的命题的否定命题等价, 即:

$$\forall x\in X(x\notin \overline{E}\iff \exists x\text{的开邻域}U(U\cap E=\emptyset)).$$

若 $x\notin\overline{E}$, 则 $x\in(\overline{E})^C$. $(\overline{E})^C$ 是 x 的一个开邻域, 且 $E\cap(\overline{E})^C=\emptyset$."$\Longrightarrow$" 证得.

反之, 若 $\exists x$的开邻域$U(U\cap E=\emptyset)$, 则 U^C 是闭集, 且 $x\notin U^C$, $E\subset U^C$. 按定义 7.1.5, $\overline{E}\subset U^C$, 故 $x\notin\overline{E}$."$\Longleftarrow$" 也证得.

(7.1.1) 中第二个双箭头向左的一半是显然的, 向右的一半证明如下：若

$$\forall x\text{的开邻域}U(U\cap E\neq\emptyset),$$

而 V 是 x 的邻域, 则有 x 的开邻域 U, 使得 $x\in U\subset V$. 由此

$$V\cap E\supset U\cap E\neq\emptyset. \qquad \square$$

定义 7.1.6 设 X 是拓扑空间, $E\subset X$, 点 $x\in X$ 称为集 E 的一个**极限点**(或称**聚点**), 假若对于 x 的任何邻域 U, 有 $E\cap(U\setminus\{x\})\neq\emptyset$. E 的极限点的全体称为 E 的**导集**, 记做 E'. $x\in E$ 称为 E 的一个**孤立点**, 若 x 非 E 的极限点.

命题 7.1.2 告诉我们:

$$\overline{E}=E'\cup E. \tag{7.1.2}$$

易见, 若 $E=X$, 点 x 是 X 的孤立点, 当且仅当 $\{x\}$ 是 X 的一个开集.

定义 7.1.7 设 X 是拓扑空间, $E\subset X$. E 的**内核**, 记做 E° 或 $\mathrm{int}\,E$, 定义为 E 的全体开子集之并.

不难看出, E° 是 E 的最大开子集, 也是 E 的内点的全体. 另外, 不难看出,

$$E^\circ=\overline{E^C}^C.$$

定义 7.1.8 设 X 是拓扑空间, $E\subset X$, $\overline{E}\setminus E^\circ$ 称为 E 的**拓扑边界**, 简称为**边界**.

易见, $\overline{E}\setminus E^\circ=\overline{E}\cap(E^\circ)^C=\overline{E}\cap\overline{E^C}$. 因此, E 的边界是闭集. 另外, E 是既开又闭的, 当且仅当 E 的边界是空集. 这是因为 $\overline{E}\setminus E^\circ=\emptyset\iff\overline{E}=E^\circ\iff\overline{E}=E=E^\circ\iff E$既开又闭.

定义 7.1.9 设 X 是拓扑空间, $D \subset E \subset X$. D 称为 E**中的稠密集**, 若 $\overline{D} \supset E$. 特别, $D \subset X$ 称为是拓扑空间 X**中的稠密集**, 若 $\overline{D} = X$.

由命题 7.1.2 不难看出, $D \subset X$ 在 X 中**稠密**, 当且仅当对于 X 的任何开集 G, 有 $G \cap D \neq \emptyset$.

例 7.1.10 有理数集 $\mathbf{Q}$ 和无理数集 $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ 在赋予普通拓扑的 $\mathbf{R}$ 中均稠密. 但有理数集 $\mathbf{Q}$ 和无理数集 $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ 在赋予离散拓扑的 $\mathbf{R}$ 中均非稠密.

定义 7.1.10 设 X 是拓扑空间, 若 X 有至多可数个点组成的稠密子集, 则 X 称为**可分的**.

显然, 赋予普通拓扑的 $\mathbf{R}$ 是可分的, 赋予离散拓扑的 $\mathbf{R}$ 是不可分的.

§7.2 连续映射

定义 7.2.1 设 X 和 Y 是两个拓扑空间. 映射 $f: X \to Y$ 称为**在点** $x \in X$ **处连续**, 假若对于点 $f(x)$ 在 Y 中的任何邻域 N, $f^{-1}(N)$ 是点 x 的邻域. X 到 Y 上的映射 f 称为**在集合** $A \subset X$ **上连续**, 若对于任何点 $x \in A$, 它在点 x 处连续. 若 f 在 X 上连续, 便简称 f**连续**.

因为点 x 的任何邻域都包含点 x 的一个开邻域, 映射 f 在点 x 处连续, 当且仅当对于点 $f(x)$ 的任何开邻域 N, $f^{-1}(N)$ 是点 x 的邻域.

由第四章中定义在 $\mathbf{R}$ 的区间上的实值函数的连续性概念的定义可知, 以上定义的连续性概念是第四章中引进的实数轴上定义的实值函数的连续性概念在拓扑空间上的直接推广.

例 7.2.1 设 X 和 Y 是两个拓扑空间, $f: X \to Y$ 是**常映射**, 即

$$\exists c \in Y \forall x \in X (f(x) = c),$$

则 f 连续.

这是因为对于任何点 $x \in X$ 和点 $f(x)$ 的任何邻域 N, $\forall y \in X(f(y) = c \in N)$. 换言之, $f^{-1}(N) = X$, X 当然是 x 的邻域. 故 f 在任何点 $x \in X$ 处连续.

例 7.2.2　设 $(X,\mathcal{T}_1)$ 和 $(X,\mathcal{T}_2)$ 是两个建立在同一个集合 X 上的拓扑空间, $\mathrm{id}_X : X \to X$ 是恒等映射: $\forall x \in X(\mathrm{id}_X(x) = x)$, 则 $\mathcal{T}_1$ 比 $\mathcal{T}_2$ 强, 当且仅当恒等映射 id 看成 $(X,\mathcal{T}_1)$ 到 $(X,\mathcal{T}_2)$ 的映射时是连续的.

命题 7.2.1　设 X 和 Y 是两个拓扑空间, 映射 $f : X \to Y$, 则映射 f 连续的充分必要条件是: 对于任何 Y 中的开集 G, $f^{-1}(G)$ 在 X 中是开集.

证　设映射 $f : X \to Y$ 连续, 而 $G \subset Y$ 是 Y 中的一个开集. 对于任意的 $x \in f^{-1}(G)$, $f(x) \in G$, 开集 G 是 $f(x)$ 的一个邻域. 因 $f : X \to Y$ 连续, $f^{-1}(G)$ 是 x 的邻域. 由于 x 是 $f^{-1}(G)$ 中任意的点和命题 7.1.1, $f^{-1}(G)$ 在 X 中是开集.

反之, 假设对于任何 Y 中的开集 G, $f^{-1}(G)$ 在 X 中必是开集. 对于任何 $x \in X$ 和任何 $f(x)$ 的邻域 N, 有开集 G, 使得 $f(x) \in G \subset N$. 因此, $x \in f^{-1}(G) \subset f^{-1}(N)$. 按假设, $f^{-1}(G)$ 在 X 中是开集, 故 $f^{-1}(N)$ 是 x 的邻域. f 在 x 处连续. 因 x 是 X 中的任意的点, 故 f 在 X 上连续. □

注　命题 7.2.1 是 §4.5 的第 18 题在一般拓扑空间上的推广.

因为 $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$(参看 §1.6 第 8 题 (i)), 我们得到命题 7.2.1 如下的对偶表述:

命题 7.2.2　设 X 和 Y 是两个拓扑空间, 则映射 $f : X \to Y$ 在 X 上连续的充分必要条件是: 对于任何 Y 中的闭集 F, $f^{-1}(F)$ 在 X 中是闭集.

命题 7.2.3　设 X, Y 和 Z 是三个拓扑空间, $f : X \to Y$ 和 $g : Y \to Z$ 是两个连续映射, 则复合映射 $g \circ f : X \to Z$ 是连续映射.

证　设 $G \subset Z$ 是 Z 中的开集, 则

$$(g \circ f)^{-1}(G) = f^{-1}[g^{-1}(G)].$$

因 g 连续, 故 $g^{-1}(G)$ 在 Y 中是开集. 又因 f 连续, $f^{-1}[g^{-1}(G)]$ 在 X 中是开集, 故 $(g \circ f)^{-1}(G) = f^{-1}[g^{-1}(G)]$ 是 X 中的开集. 因 $G \subset Z$ 是 Z 中的任意开集, 故 $g \circ f$ 在 X 上连续. □

定义 7.2.2 设 X 和 Y 是两个拓扑空间. 双射 $f: X \to Y$ 称为 X 和 Y 之间的一个**同胚 (映射)**, 若 f 和 f^{-1} 分别是 $X \to Y$ 和 $Y \to X$ 的连续映射. 两个拓扑空间称为**同胚的**, 若这两个拓扑空间之间存在同胚 (映射).

两个拓扑空间之间的同胚关系是等价关系. 因此, 拓扑空间按同胚关系分成许多等价类. 拓扑学就是研究同胚 (映射) 下不变性质的几何学. 换言之, 拓扑学就是研究刻画按同胚关系分成的同一等价类中的拓扑空间的特征的数学.

例 7.2.3 开区间 $(-\pi, \pi)$ 和 $\mathbf{R}$ 是同胚的. 这是因为映射

$$\tan: (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbf{R}$$

是同胚映射, 换言之, $\tan: (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbf{R}$ 和 $\arctan: \mathbf{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ 皆为连续映射.

例 7.2.4 开区间 $(-\pi, \pi)$ 和任何开区间 $(a, b)(a < b)$ 都同胚. 它们之间的同胚映射可以通过适当的平移和相似变换得到. 因而, 任何开区间 $(a, b)(a < b)$ 和 $\mathbf{R}$ 是同胚的.

例 7.2.5 开区间 $(a, b)(a < b)$ 和任何两个不相交开区间的并 $(c, d) \cup (e, f)(c < d < e < f)$ 不同胚. 这是因为, 若映射 $g: (a, b) \to (c, d) \cup (e, f)$ 是同胚, 则有 $x, y \in (a, b)$, 使得

$$g(x) = \frac{c+d}{2}, \quad g(y) = \frac{e+f}{2}.$$

因为

$$\frac{c+d}{2} < \frac{d+e}{2} < \frac{e+f}{2},$$

由连续函数的介值定理, 应该有 $z \in (a, b)$, 使得

$$g(z) = \frac{d+e}{2} \notin (c, d) \cup (e, f).$$

这与 $g: (a, b) \to (c, d) \cup (e, f)$ 矛盾.

§7.3 度 量 空 间

正像极限概念常通过距离来描述一样, 我们要遇到的拓扑空间中,

大量的是通过空间中两点的距离来刻画它的拓扑的. 这种由距离刻画它的拓扑的拓扑空间便是以下要引进的度量空间:

定义 7.3.1 设 X 是个非空集合. 映射 $\rho: X \times X \to \mathbf{R}$ 称为 X 上的一个**度量**(也称**距离**), 假若它满足以下条件:

(i) $\forall x, y \in X(\rho(x,y) \geqslant 0)$, 且 $\rho(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;

(ii) $\forall x, y \in X(\rho(x,y) = \rho(y,x))$;

(iii) $\forall x, y, z \in X(\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z))$.

这时, (X, ρ) 称为**度量空间**. 当 ρ 已可从上下文确定时, 也称 X 为**度量空间**.

定义 7.3.2 设 (X, ρ) 为度量空间, $a \in X$, $r \in (0, \infty]$, 则集合

$$\mathbf{B}(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) < r\}$$

称为 (**度量空间 (X,ρ) 中的**) **以 a 为球心, r 为半径的开球**.

命题 7.3.1 设 (X, ρ) 为度量空间, $A \in 2^X$, 定义在 A 上取正实数值或 ∞ 的函数之全体记做 $\mathcal{P}_A$. 给定了 $A \in 2^X$ 和 $r \in \mathcal{P}_A$, 令

$$G_{A,r} = \bigcup_{a \in A} \mathbf{B}(a, r(a)),$$

则 X 的子集族

$$\mathcal{T} = \{G_{A,r} : A \in 2^X, r \in \mathcal{P}_A\} \tag{7.3.1}$$

满足拓扑空间的三个条件 (定义 7.1.1 的 (i),(ii),(iii)).

证 设 I 是一个指标集, 对于每个 $\alpha \in I$, 有 $A_\alpha \in 2^X$ 和映射

$$r_\alpha : A_\alpha \to (0, \infty]$$

与之对应. 我们要证明 $\bigcup\limits_{\alpha \in I} G_{A_\alpha, r_\alpha} \in \mathcal{T}$. 换言之, 我们要证明: 有 $A \subset X$ 和映射 $r : A \to (0, \infty]$, 使得

$$G_{A,r} = \bigcup_{\alpha \in I} G_{A_\alpha, r_\alpha}.$$

为此, 设

$$A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha,$$

并定义

$$\forall a \in A\left(r(a) = \sup_{\{\alpha: a \in A_\alpha\}} r_\alpha(a)\right),$$

上面等式右端的 $\sup\limits_{\{\alpha: a \in A_\alpha\}}$ 表示对一切满足条件 $a \in A_\alpha$ 的 α 求上确界. 由 A 的定义, 满足条件 $a \in A_\alpha$ 的 α 至少有一个. 不难看出,

$$G_{A,r} \supset \bigcup_{\alpha \in I} G_{A_\alpha, r_\alpha}.$$

反之, 设 $x \in G_{A,r}$, 则有 $a \in A$, 使得 $x \in \mathbf{B}(a, r(a))$. 由 A 和 r 的定义, 有 $\alpha \in I$, 使得 $a \in A_\alpha$ 且

$$x \in \mathbf{B}(a, r_\alpha(a)) \subset G_{A_\alpha, r_\alpha} \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_{A_\alpha, r_\alpha}.$$

这就证明了$G_{A,r} \subset \bigcup\limits_{\alpha \in I} G_{A_\alpha, r_\alpha}$. 和已经证明了的反方向的包含关系结合起来, 便得: $G_{A,r} = \bigcup\limits_{\alpha \in I} G_{A_\alpha, r_\alpha}$. 定义 7.1.1 的 (i) 成立.

设 $J = \{1, \cdots, n\}$ 是由有限个指标构成的指标集, 对于每个 $j \in J$, 有 $A_j \subset X$ 和映射 $r_j : A_j \to (0, \infty]$. 又设

$$x \in \bigcap_{j \in J} G_{A_j, r_j},$$

则对于任何 $j \in J$, 有 $a_j(x) \in A_j$, 使得

$$\forall j \in J(\rho(a_j(x), x) < r_j(a_j(x))).$$

令

$$r(x) = \min_{j \in J}\left(r_j(a_j(x)) - \rho(a_j(x), x)\right),$$

易见 $r(x) > 0$. 我们将证明:

$$\bigcap_{j \in J} G_{A_j, r_j} = \bigcup_{x \in \bigcap\limits_{j \in J} G_{A_j, r_j}} \mathbf{B}(x, r(x)). \tag{7.3.2}$$

先设 $y \in \bigcup\limits_{x \in \bigcap\limits_{j \in J} G_{A_j, r_j}} \mathbf{B}(x, r(x))$, 必有 $x \in \bigcap\limits_{j \in J} G_{A_j, r_j}$, 使得 $y \in \mathbf{B}(x, r(x))$. 换言之,