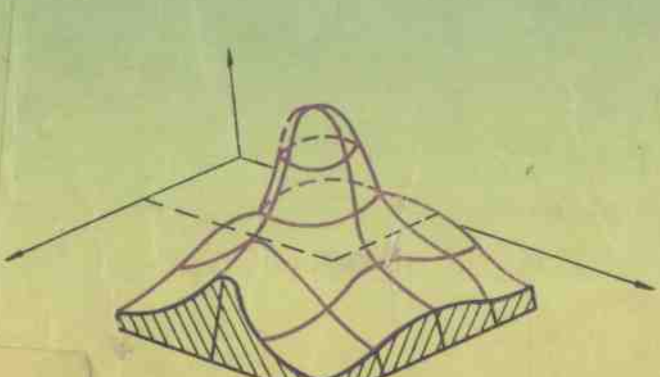
概率论教程

汪志文
刘旭阳　编
高培丰



香港大学出版社

概率论教程

汪志文
刘旭阳　编
高培丰

大学出版社

内 容 提 要

全书共分四章：随机事件及其概率、随机变量和它的分布、数字特征与特征函数、极限定理。本书材料丰富，举例恰当，分析透彻，并配有一定数量的习题。

本书可供师范院校数学专业本科生或函授、夜大、电大学生试用教材，也可供理科其他有关专业及工科某些专业作为教学参考书。

概率论教程

汪志文 刘旭阳 高培幸 编

香港大学出版社

社址：香港九龙湾宏开道业安工厂大厦

香港九龙邮政总局信箱730031号

* * * *

开本 787×1092毫米 1/32印张 字数 300千字

1993年3月第1版 1993年3月第1次印刷

印数 1500册

ISBN962—7069—45—0 定价 7.50元

序　言

概率论与数理统计是研究大量随机现象统计规律性的数学学科，随机现象在客观世界中普遍存在，因此这门学科有很广泛的应用。当今，概率统计的基础理论和方法，已广泛地用于自然科学、社会科学、工程技术、医学、军事和工农业生产中，它已成为数学最活跃的一个分支。

人类的社会实践和近代科学技术的发展，人们逐步认识到自然现象和科学实验的许多结果，并不都是确定的。要精确测量某一物体的长度，尽管控制各种条件使其不变，比如量具不变，测量方法不变，客观环境也不改变，但每次测得的结果，仍不会完全相同。掷一枚均匀硬币，在每次投掷前，无法断定投掷结果是"字面"向上还是"国徽"向上。这类现象在客观世界中彼彼皆是，不胜枚举。然而在进行了大量观察或多次重复试验后，却发现这些在一次试验不能肯定结果的现象具有近乎必然的客观规律，并且应用数学的方法，可以得出各种结果出现的可能性大小。这类问题，就是概率统计这门学科的现实背景，并使它在近几十年来得到了飞速的发展。

今天，概率统计已被列为高等学校理、工、农、医各专业的必修课程，此外如财经、教育、体育等专业以及绝大多数的中等专业学校，都开设了概率统计课程，因而它是开设的系科专业最多的一门数学学科。

本书是概率统计的入门书，由于受到教学时间和篇幅的限制，也考虑到大多数学校只讲概率(统计另作选修)，本书

着重讨论概率论的基础知识。鉴于读者对象将来大都是从事数学教学工作，他们不但要学习一些处理随机现象的概率统计方法，还可能要担任这门学科的教学。基于此，本书企图着力讲清概率论的一些基本概念和与之有关的基础理论问题，同时尽可能地用客观世界中常见的实例来说明它们的应用，加深读者对基本概念和基础理论的理解和掌握。

本书是根据教学大纲和编者1984年编写的讲义基础上，结合近年的教学实践修改加工而成，是编者汪志文(第一章、第四章)、刘旭阳(第三章)和高培丰(第二章)通力合作，汪志文统一定稿的。由于要兼顾数学系全日制本科、函授本科和专科转本科的成人教育实际，取材比较丰富，文字通俗易懂，深入浅出，便于自学。教学时可以根据实际情况，舍去其部分内容，不会影响教材的科学系统性。例如，对标有星号“*”的部分，初学者跳过不学，不影响对概率论基础知识的掌握。

在编写过程中，我们得到了许多同志的大力支持与帮助，华中师大的陈应保同志阅读了全稿，刘贤龙同志帮助配置了大部分习题，湖北大学概率统计教研室的同志提出了一些修改意见，华中师大的夏明远、谢民育、许光顺同志和华中师大成人教院、湖北省教院的有关领导对本书出版给予的支持与鼓励，谨此一并致谢。

由于水平有限，缺点和错误一定不少，恳切希望读者批评、指正。

编者

1992年12月

目 录

第一章 随机事件及其概率……(1)

§1.1 随机现象是可以认识的……(1)

一、随机现象……(1)

二、随机现象的统计规律性……(2)

§1.2 基本事件空间和随机事件……(3)

一、基本事件空间……(3)

二、事件……(5)

三、事件的关系及运算……(9)

§1.3 随机事件的概率……(15)

一、统计定义……(16)

二、古典定义……(19)

三、几何概型……(38)

§1.4 概率空间……(42)

一、概率的公理定义……(42)

二、概率的性质……(48)

三、几个常见的概率空间……(55)

§1.5 条件概率……(57)

一、条件概率的定义……(57)

二、有关条件概率的三个定理……(62)

三、综合应用例题……(68)

§1.6 统计独立性……(73)

一、两个事件的独立性……(73)

二、n个事件的独立性……(75)

三、独立事件概率的计算……(79)

§1.7 独立试验概型 …… (83)
一、试验独立性的直观描述 …… (83)
二、复合试验E的基本事件空间 …… (84)
三、试验独立性的定义 …… (84)
四、独立试验概型 …… (86)
§1.8 贝努里(Bernoulli)概型 …… (87)
一、贝努里试验 …… (87)
二、n重贝努里试验的概率空间 …… (89)
三、贝努里试验中的一些概率分布 …… (89)
习题 …… (95)
第二章 随机变量和它的分布 …… (105)
§2.1 随机变量 …… (105)
一、随机变量的直观背景 …… (105)
二、反函数与可测函数 …… (108)
三、随机变量的定义 …… (111)
四、分布函数 …… (113)
§2.2 离散型随机变量 …… (116)
一、离散型随机变量及其分布列 …… (117)
二、几种常见的离散型分布 …… (119)
§2.3 连续型随机变量 …… (131)
一、连续型随机变量及其分布密度 …… (131)
二、几种常见的连续型分布 …… (134)
三、正态分布 …… (139)
*§2.4 分布函数的若干补充 …… (144)
一、分布函数的类型问题 …… (144)
二、奇异型分布 …… (144)
三、分布函数的勒贝格分解 …… (145)
四、分布函数的不连续点 …… (147)

五、随机变量的存在定理……………………………（147）
§2.5　随机向量及其分布……………………………（150）
一、二维随机向量及其分布……………………………（151）
二、n维随机向量及其分布……………………………（161）
§2.6　条件分布及随机变量的独立性……………………………（164）
一、条件分布……………………………（164）
二、随机变量的独立性……………………………（170）
§2.7　随机变量的函数及其分布……………………………（175）
一、问题的实际背景和一般提法……………………………（175）
二、单个随机变量的函数的分布……………………………（179）
三、随机向量函数的分布……………………………（183）
四、随机向量的换变及其联合分布……………………………（190）
五、三种重要分布的推导……………………………（200）
习题……………………………（206）
第三章　数字特征与特征函数……………………………（219）
§3.1　数学期望与方差……………………………（219）
一、引进数学期望与方差的直观背景……………………………（219）
二、离散型与连续型分布的数学期望……………………………（220）
三、一般随机变量的数学期望……………………………（226）
四、方差……………………………（231）
五、数学期望与方差的基本性质……………………………（234）
§3.2　随机向量的数字特征……………………………（239）
一、随机向量的数学期望、方差与协方差……………………………（239）
二、相关系数……………………………（248）
三、条件数学期望……………………………（256）
§3.3　其它数字特征……………………………（263）
一、矩……………………………（263）
二、极差……………………………（266）

§3.4　特征函数……(266)
一、特征函数的定义及例题……(267)
二、特征函数的基本性质……(272)
三、特征函数与分布函数的一一对应……(277)
§3.5　多元特征函数……(283)
一、定义与基本性质……(283)
*二、多元正态分布……(285)
*§3.6　母函数……(293)
一、母函数的定义……(293)
二、母函数的性质……(294)
习题……(297)
第四章　极限定理……(306)
§4.1　引言……(306)
§4.2　各种收敛概念及它们之间的关系……(307)
一、分布函数列的弱收敛……(307)
二、随机变量序列的收敛……(309)
§4.3　分布函数列与特征函数列……(314)
一、海莱(Helly)定理……(314)
二、两个重要的收敛定理……(316)
三、弱收敛的各种等价条件与连续性定理……(318)
§4.4　大数定理……(319)
一、问题的一般提法……(319)
二、大数定律的证明及其应用……(322)
§4.5　中心极限定理……(328)
一、问题的实际背景……(328)
二、德莫佛—拉普拉斯极限定理……(332)
三、德莫佛—拉普拉斯极限定理的若干应用……(336)
四、独立同分布情形的中心极限定理……(345)

*§4.6 中心极限定理(续)……(351)
一、林德贝格条件……(352)
二、林德贝格定理……(355)
习题……(357)
习题答案……(361)
参考书目……(388)
附录一 常用分布表……(389)
附录二 基本的组合分析公式……(395)
附 表
表1 二项分布……(399)
表2 普阿松分布……(405)
表3 正态分布……(409)

第一章　随机事件及其概率

§1.1 随机现象是可以认识的

一、随机现象

在客观世界里有许多现象，我们完全可以根据它们在一定条件下是否会发生(出现)将其分成两大类：必然现象和随机(偶然)现象。当我们多次观察自然和社会现象后，会发现许多现象在一定条件下必然发生，例如“在没有外力作用的条件下作等速直线运动的物体必然继续作等速直线运动”，“向上抛一石子必然下落”，“同性电荷必互相排斥”，“标准大气压下纯水加热到100℃必然沸腾”等等，都是必然现象。而上述现象的反面，比如“向上抛一石子不下落”，“同性电荷互相吸引”，“标准大气压下纯水加热到100℃不沸腾”等等是必然不会发生的。必然和不可能，虽然形式相反，但两者的实质是相同的。必然的反面是不可能，不可能的反面是必然。所有这类现象统称为必然现象。

然而在客观世界里还有许多现象，它们在一定条件下可能发生也可能不发生。例如在相同条件下掷一枚硬币，其结果可能正面(字面)向上，也可能反面(国徽)向上，并且不论怎样控制投掷条件，每次投掷之前都无法肯定投掷的结果是什么。又如对100粒棉籽进行发芽试验，其结果可能是全部发芽，也可能是99粒发芽等等，发芽粒数是事先不能确定的。这种在一定条件下可能发生也可能不发生的现象称为**随**

机现象。随机现象同样是普遍存在于自然界和社会生活中。随机现象的每一种表现或结果叫做**随机事件**，简称事件。例如“掷一枚硬币正面向上”，“100粒棉籽发芽试验有98粒发芽”等等都是随机事件。

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律的数学分支，一方面它有别开生面的研究课题，有自己独特的概念和方法，理论严谨，内容丰富，应用广泛，结果深刻。另一方面，它与其它数学分支又有紧密的联系，且非常贴近生产实际，不论从理论研究或实际应用来考虑，都可算得是最活跃的一个数学分支。

二、随机现象的统计规律性

必然现象有着内在规律，这一点比较容易看到，而随机现象也同样具有一定的规律性，这就是我们即将研究的统计规律性问题。

人们经过长期的实践观察，发现随机现象虽然就每一次试验或观察结果来说，它是不确定的，但在大量重复试验或观察下，它的结果却呈现出某种规律性来。就投掷硬币来说，假定硬币均匀，在每次投掷前，虽不能断定该次结果是正面向上还是反面向上，可是多次复重投掷，就可看出“正面向上”与“反面向上”这两种结果的发生大致各占半数，就棉籽发芽试验来说，如果我们同时从这批棉籽中，随意地取出数个“100粒”进行发芽试验，结果会发现每个“100粒”中发芽的粒数都在某一定数附近摆动，比如说在95粒附近摆动，我们就可以认为这批棉籽的发芽率为95%。“正面向上占半数”，“发芽率为95%”，是我们通过试验而找出的这两种随机现象的规律性。这种规律性是通过大量重复试

验而得来，故称为**统计规律性**。这说明随机现象是可以认识的。

§1.2 基本事件空间和随机事件

一、基本事件空间①

我们将逐步引进概率论的基本概念，而基本事件空间与事件是最基本的两个概念。

前面提到，我们可以通过随机试验来研究随机现象的统计规律性。所谓试验，在这里是作为一个广泛的术语引入的，它包括各种各样的科学实验，也包括对某一事物的某一特征的观察等等，为了帮助读者确切理解随机试验的含意，我们概括地描述如下。

设E为一试验，且具有以下特征：

①试验可以在相同条件下重复地进行；

②每次试验的可能结果不只一个，并且能事先知道试验的所有可能结果；

③每次试验总是出现这些可能结果中的一个且只出现一个，但在试验之前，却不能确定会出现哪一个结果。

则称E为**随机试验**，简称为试验。

随机试验E中的每一个可能结果称为一个**基本事件**（或样本点），全体基本事件的集合称为基本事件空间，通常用Ω表示，Ω中的点即基本事件常用ω表示。特别当Ω只包含有限

①基本事件空间又叫样本空间，基本事件又叫样本点，今后对这两种说法看作是一样的。

(比如n)个点时，就称Ω为有限基本事件空间，记为$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n\}$。在具体问题中，十分重要的是：认清基本事件空间是由什么构成的。为此，我们来举一些例子。

例1.2.1 设随机试验E为掷一枚普通的硬币而观察所出现的面；ω_1表示出正面，ω_2表示出反面，于是Ω是由两个基本事件构成：$\Omega=\{\omega_1, \omega_2\}$。

例1.2.2 设E为一枚硬币掷两次而观察正反面出现的情况，在这里，掷两次硬币的联合结果才算是一次试验，试验的结果有4个：$(\omega_1, \omega_1), (\omega_1, \omega_2), (\omega_2, \omega_1), (\omega_2, \omega_2)$。其$\omega_i$的意义同上例，比如$(\omega_2, \omega_1)=$(反,正)表示"第一次出现反面，第二次出现正面"，其余类推。这时基本事件空间由四个基本事件构成：

$$\Omega=\{(\omega_1, \omega_1), (\omega_1, \omega_2), (\omega_2, \omega_1), (\omega_2, \omega_2)\}$$

它与例1.2.1不同的是每个基本事件是例1.2.1中两个基本事件的一个适当的有序组合，如记$\omega^1 \triangleq (\omega_1, \omega_1)$，$\omega^2 \triangleq (\omega_1, \omega_2)$，$\omega^3 \triangleq (\omega_2, \omega_1)$，$\omega^4 \triangleq (\omega_2, \omega_2)$，则$\Omega$也可表示为

$$\Omega=\{\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$$

例1.2.3 设E表示记录某电话交换台在上午九时到十时的一小时内接到的呼叫次数，基本事件(记录结果)是非负整数(接到的呼叫数)，显然，我们难于规定一个呼叫数的上界，以ω_i表示接到i次呼叫，则基本事件空间

$$\Omega=\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots\}$$

如果简记ω_i为i，则

$$\Omega=\{0, 1, 2, \cdots\}$$

例1.2.4 向某一目标射出一发炮弹，E表示观察弹着点与目标的偏差，这时基本事件可以是任何一个非负实数(偏

差值)，若以ω_d表示偏差为d，则基本事件空间$\Omega=\{\omega_d: d\geqslant 0\}$，如简记$\omega_d$为d，则$\Omega=\{d: d\geqslant 0\}$

例1.2.5 若E为观察某地区的平均温度，基本事件空间自然可取为$\Omega=(-\infty,\infty)$或$\Omega=[a,b]$。(实际上取$(-\infty,\infty)$时，Ω中有许多点是多余的，因为温度不可能低于-273℃)。

从上面的例中，我们看到为了给出基本事件空间，必须确切理解试验的内容和观察的目的。当然对于一个实际问题，如何用一个恰当的基本事件空间描述，也是值得研究的。在概率论中，一般都认为基本事件空间是给定的，这是必要的抽象，通过这种抽象，使我们能更好地掌握随机现象的本质，从而使得到的概率模型有更广泛的应用。例如只包含两个基本事件ω_1, ω_2的基本事件空间$\Omega=\{\omega_1, \omega_2\}$，是最简单的有限基本事件空间，它既能作为掷硬币观察其出正面或反面的模型，这时ω_1表示"出正面"，ω_2表示"出反面"。也能作为产品检验中出现"合格品"与"不合格品"的模型，只要用ω_1表示"合格品"，ω_2表示"不合格品"即可。同理又可用于气象中的"有雨"与"无雨"以及射击中"命中目标"与"未命中目标"等等。尽管问题的实际内容如此不同，有时却能归结为同一的基本事件空间，用同一的概率模型处理。因此前面五个例子有着广泛的代表性。

二、事　件

直观地解释，事件就是随机现象的表现或结果。有了基本事件空间的概念后，就可以通过基本事件来定义事件。我们还是从考察一个实际例子开始。

例1.2.6 考虑从包含两件次品(记作a_1, a_2)和三件正品(记作b_1, b_2, b_3)的五件产品中，任意取出两件的随机试验。例如取出的两件是a_1和b_3，则(a_1, b_3)就是试验的一个可能结果。若将每一可能结果看作是一个元素或一个点，则基本事件空间Ω由10个点构成：

$$\Omega=\{(a_1,a_2),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_2,b_1),(a_2 b_2),(a_2,b_3),(b_1,b_2),(b_1,b_3),(b_2,b_3)\}$$

每个点当然是我们考虑的事件，称为基本事件，因而它有10个基本事件。但是我们还可以考虑另外一些事件，例如

A_0："没有抽到次品"

A_1："抽到一件次品"

A_2："抽到两件次品"

等事件显然也是应该考虑的。在一次试验中，A_0发生，当且仅当在这次试验中出现点(b_1,b_2)，(b_1,b_3)，(b_2,b_3)中的一个，这样我们可以认为A_0是由三个基本事件(b_1,b_2)，(b_1, b_3)，(b_2,b_3)共同组成的，而将A_0定义为它们组成的集合：

$$A_0=\{(b_1,b_2),(b_1,b_3),(b_2,b_3)\}$$

因此A_0是Ω的一个子集，同理A_1发生当且仅当(a_1,b_1)，(a_1,b_2)，(a_1,b_3)，(a_2,b_1)，(a_2,b_2)，(a_2,b_3)中的一个发生，因此得

$$A_1=\{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_3)\}$$

它也是Ω的一个子集，(由Ω中的六个点构成)。A_2发生当且仅当点(a_1,a_2)发生，故得

$$A_2=\{(a_1, a_2)\}$$

A_2是由一个基本事件(a_1, a_2)构成的单元素集合，它实际是一个基本事件。

一般，我们将事件定义为基本事件空间Ω的某个子集，称事件A发生当且仅当A中的某一个基本事件ω发生。

由此可知，对于一个给定的基本事件空间Ω，事件就是Ω的某个子集。如果把凡是事件的子集归结在一起，则得到一个事件集合类，记作**F**①，称为事件域。**F**中的元素可以分为两类：其中由单个基本事件构成的单元素集合，称为基本事件或简单事件；另一类是由Ω的某些(不只一个)基本事件组成的子集。它们与前面那一类事件不同之处在于这些事件可以分解，所以又称为复杂事件。例1.2.6中的事件A_0与A_1都是复杂事件，而A_2是简单事件。无论是简单事件(基本事件)还是复杂事件，它们在试验中发生与否，都带有随机性，因此都叫随机事件。今后我们所说的事件均指随机事件，习惯上人们常用大写字母A，B，C…表示事件。

我们把基本事件空间Ω也作为一个事件，由于Ω是由全体基本事件所组成，在每次试验中，必然要出现Ω中的某个点ω，$\omega\in\Omega$，Ω必然发生，称Ω为必然事件。相应地，空集$\varnothing$也可看作是Ω的子集，在任一次试验中它都不会发生，因为不可能有$\omega\in\varnothing$，故称$\varnothing$为不可能事件。

必然事件Ω与不可能事件$\varnothing$可以说不是随机事件，但为了研究的方便，把它们作为随机事件的两个极端情形来统一处理，因此今后我们说随机事件，也包括必然事件Ω和不可

---

①每个事件是Ω的子集，由事件(集合)作元素构成的集合称为集合类。关于事件域**F**的正式定义，将在§1.4给出。