21世纪高职高专规划教材

机械工业出版社精品教材

高等数学(理工科用)

第2版

方晓华 主编
费定晖 主审

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高等数学（理工科用）

第2版

21世纪高职高专规划教材
机械工业出版社精品教材

高 等 数 学

（理工科用）
第2版

主　编　金华职业技术学院　方晓华
副主编　武汉船舶职业技术学院　朱春浩　彭立新
成都航空职业技术学院　黄兴廉
湖南机电职业技术学院　潘劲松
参　编　成都航空职业技术学院　刘　红
浙江广厦建设职业技术学院　金惠萍　杨立卿
金华职业技术学院　吴凤香　杜凤英　吕焱飞
主　审　华东交通大学　费定晖
副主审　浙江广厦建设职业技术学院　胡晶地

机 械 工 业 出 版 社

本书是根据高等职业技术教育教学要求编写的。全书共11章，内容包括函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程，多元函数微积分，级数，拉普拉斯变换，矩阵及其应用，概率与数理统计。每章配有一定数量的习题。取材注意从实际问题出发，理论联系实际，便于教学。

本书可作为二年制及三年制高等职业技术院校、高等专科学校、职工大学、业余大学、夜大学、函授大学、成人教育学院等大专层次的理工科类高等数学课程的教材，也可作为广大自学者及工程技术人员的自学用书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/方晓华主编. —2版. —北京：机械工业出版社，2004.7

21世纪高职高专规划教材

ISBN 7-111-08125-0

Ⅰ. 高… Ⅱ. 方… Ⅲ. 高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ. 013

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第070393号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）

策划编辑：余茂祚 责任编辑：余茂祚 版式设计：冉晓华

责任校对：魏俊云 封面设计：饶 薇 责任印制：洪汉军

北京京丰印刷厂印刷 · 新华书店北京发行所发行

2004年8月第2版 · 第1次印刷

787mm×1092mm 1/16 · 19.5印张 · 477千字

定价：28.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

本社购书热线电话（010）68993821、88379646

21世纪高职高专规划教材
编 委 会 名 单

第2版前言

教育部关于加强高职高专的教学工作会议中，明确指出高职高专以培养技术应用型专门人才为根本任务。《高等数学》是高等职业技术院校理工类各专业必修的主要基础课。学生学好了高等数学，既为后继各专业课的学习准备了必需的数学知识，更发展了自己的智力，锻炼和提高了分析问题与解决问题的能力，这些均有利于加强技术应用人才的素质。而教育离不开教材，因此，编写一本适合高职高专院校用的《高等数学》教材是十分重要和非常必要的。

本书自2000年8月发行以来，得到了读者的厚爱，全国数十所高等职业技术院校使用该书，供不应求，受益面广。虽然发行时间还不到四年，但已先后印刷了7次，并获得了各方的好评。事实证明，本书具有较强的生命力。根据各兄弟院校的使用情况及历年学生的实际情况，这次我们在修改中除了保持原有的编写指导思想，即强化基本概念的教学，淡化数学技巧的训练，删去不必要的逻辑推导，突出应用能力的培养；在内容的取舍上，更加强调实用和够用，更加注意内容的精练，更加符合高职高专的教学要求，并在具体章节内容的安排上作了以下改动。

1. 删去了一些对于高职高专院校要求较高的内容和难度较大的例题、习题。例如，原书第9章中的9.2“曲线积分”，原书第10章中的n阶行列式计算的例题以及几个证明题等均予以删去。

2. 增添了应用较广而原书缺乏的内容。例如，扩增了第9章“拉普拉斯变换”，第11章中的11.7“参数估计”与11.8“假设检验”两节。又如第3章中的3.4“洛必达法则”，以及第5章中的5.4“广义积分”等内容。

3. 简化并精简了原书第7章“向量代数与空间解析几何”的内容，同时将原书第7章、第8章及第9章共3章合并成新的第7章“多元函数微积分”，将“空间解析几何简介”作为该章的第1节。

4. 将原书第4章“定积分与不定积分”改写成“不定积分”与“定积分”各自独立又有联系的两章，并将原书的第5章改成“定积分及其应用”，这样做是为了分散难点，便于学生的学习。

5. 在精简部分内容的同时，对于那些我们认为学生必须掌握的基本理论、基本知识和基本技能，则不惜篇幅，力求解说详细，使学生和读者容易接受。例如，一元函数微积分学及常微分方程部分等各章。这是根据高职高专的培养目标确定的。

我们希望所作的这些改动能使这本教材更好地适合高等职业教育的教学要求。全书经改动后共设11章，书中注有“*”号的内容可供不同专业，不同要求选用。

参加第2版编写的学校及人员有：

第1章　金华职业技术学院的方晓华；第2章，第3章　成都航空职业技术学院的黄兴廉、刘红；第4章，第5章　武汉船舶职业技术学院的朱春浩、彭立新；第6章　湖南机电职业技术学院的潘劲松；第7章　金华职业技术学院的杜凤英；第8章　金华职业技术学院

的吴凤香、吕焱飞；第 9 章　浙江广厦建设职业技术学院的金惠萍、杨立卿；第 10 章，第 11 章及附录　金华职业技术学院的方晓华。

本书（第 2 版）由方晓华主编，朱春浩、黄兴廉、潘劲松、彭立新为副主编，由方晓华统稿。

本书（第 2 版）由全国优秀教师费定晖教授主审，他极其认真、仔细地审阅了全稿，并提出了许多宝贵意见，参加审稿的还有浙江广厦建设职业技术学院的胡晶地，在此表示衷心感谢。

参加本书第 1 版编写的全部作者及主审为本书打下了极其良好的基础，因而使该书有较高的声誉，充分发挥了图书的作用。这次由于各种原因，有些同志没参加本书第 2 版的修订工作，在此表示衷心感谢。

本书（第 2 版）获得金华职业技术学院专著与教材出版基金的资助。同时得到武汉船舶职业技术学院、成都航空职业技术学院、湖南机电职业技术学院、浙江广厦建设职业技术学院各级领导的大力支持，在此表示感谢。

限于编者水平，加之时间仓促，书中一定存在不妥之处，敬请使用本书的同行和广大读者批评指正。

编　者

目　　录

第 1 章　函数、极限与连续

函数是高等数学中最重要的基本概念之一，也是高等数学的主要研究对象。极限是在研究变量在某一过程中的变化趋势时引出的，它也是高等数学的重要基本概念，高等数学中的其它几个重要的概念，如连续、导数、定积分等，都是用极限表述的，并且高等数学中的很多定理也是用极限方法推导出来的。在这一章里我们将在对函数概念进行复习和补充的基础上，介绍数列与函数极限的概念，求极限的方法以及函数的连续性。

1.1　函数

1.1.1　函数的概念

1. *引例*　人们在观察、研究某一现象或某一运动过程时，会遇到许多变量，这些变量并不是独立变化的，它们之间存在着依赖关系。现考察几个具体例子。

例 1　自由落体的运动规律为

$$h=\frac{1}{2}gt^2$$

式中　h ——下降距离；

t ——时间；

g ——重力加速度。

这个公式提出了在物体自由降落的过程中，距离 h 和时间 t 之间的依赖关系。

例 2　用一块边长为 a 的正方形铁皮做成一个高为 x 的无盖小盒（图 1-1）。

这小盒的容积 V 和高 x 之间存在着以下依赖关系

$$V=x(a-2x)^2$$

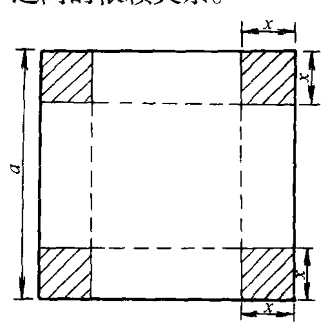


图　1-1

还可以举出其它变量间相互依赖关系的例子。在上面两个依赖关系中，有一个共同的特征，这就是：

1）在这些变量中，有些量叫做自变量。如时间 t，盒高 x，它们有一定的取值范围。例如例 1 中的时间 t 的变化范围为 $(0,\ T)$，例 2 中的盒高 x 的变化范围为 $(0,\ a/2)$。在依赖关系中，还有一些量是随着自变量的变化而起变化的，叫做因变量。如自由落体下降距离 h，盒的容积 V。

2）对自变量的变化范围内的每一个确定值，通过依赖关系，总能得到一个确定的因变量值。

把这种特征抽象出来，便得到函数的概念。

2. *函数的定义*

定义 1　设 D 是非空实数集，如果对于 D 中的每一个 x，按照某个对应法则 f，都有确定的实数 y 与之对应，则称 y 是定义在 D 上的 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$。

D 叫做函数的**定义域**，x 叫做**自变量**，y 叫做**因变量**。

如果 x_0 是函数$y=f(x)$的定义域中的一个值，则称函数$y=f(x)$在点 x_0 有定义。函数在点 x_0 的对应值叫做函数在该点的**函数值**，记作$f(x_0)$或 $y|_{x=x_0}$。当自变量 x 在定义域内取每一个数值时，对应的函数值的全体叫做函数的**值域**，记作 M（图 1-2）。

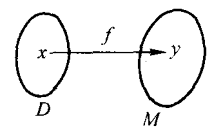


图 1-2

函数$f(x)$中的 f 反映自变量与因变量的对应法则。对应法则也常用 φ，h，g，F 等表示，那么函数也就记作 $\varphi(x)$，$h(x)$，$g(x)$，$F(x)$等,有时为简化符号，函数关系也可记作$y=y(x)$。

由函数定义可知，定义域和对应法则是函数的两个要素。如果两个函数具有相同的定义域和对应法则，则它们是相同的函数。

3. 函数的定义域　在研究函数时必须注意它的定义域。在实际问题中，函数的定义域应根据问题的实际意义来确定。例如，例 2 中的盒高 x 的变化范围为 $(0,\ a/2)$。对于用数学式子表示的函数，确定函数定义域的原则是使这数学式子的运算有意义。

例 3　求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$　　(2) $f(x)=\lg\dfrac{x}{x-2}$

解　(1) 在偶次根式中，被开方式必须大于等于零，所以有 $9-x^2\geqslant 0$，得 $-3\leqslant x\leqslant 3$，即定义域为 $[-3,\ 3]$。

(2) 要使 $f(x)$ 有意义，必须使$\dfrac{x}{x-2}>0$，得 $x>2$ 或 $x<0$，即定义域为 $(-\infty,\ 0)\cup(2,\ +\infty)$。

4. 分段函数　把定义域分成若干部分，函数关系用不同的式子分段表达的函数称为**分段函数**。分段函数是高等数学中常见的一种函数。例如，在中学数学课出现过的绝对值函数可以表示成

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

例 4　设函数

$$y=f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x>0\\ 2, & x=0\\ 3x, & x<0\end{cases}$$

当 x 取 $(0,\ +\infty)$ 内的值时，y 的值由关系式$y=x^2+1$ 来计算；当 $x=0$ 时，$y=2$；当 x 取 $(-\infty,\ 0)$ 内的值时，y 的值由关系式$y=3x$ 来计算。例如，$f(3)=3^2+1=10$，$f(-5)=3\cdot(-5)=-15$。它的图形如图 1-3 所示。

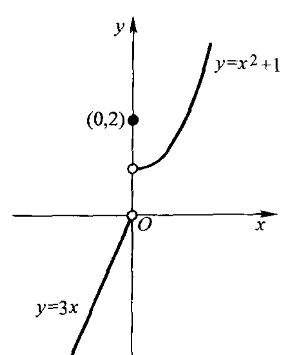


图 1-3

注意　分段函数是由几个关系式合起来表示一个函数，而不是几个函数。对于自变量 x 在定义域内的某个值，分段函数 y 只能确定惟一的值。分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并。

例 5　设函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & -4\leqslant x<1\\ 1, & 1\leqslant x<3\\ 5x-1, & x\geqslant 3\end{cases}$$

求 $f(-\pi)$，$f(1)$，$f(3.5)$及函数的定义域。

解 因为$-\pi\in[-4,1)$，所以$f(-\pi)=\sin(-\pi)=0$；因为$1\in[1,3)$，所以$f(1)=1$；因为$3.5\in[3,+\infty)$，所以$f(3.5)=5\times(3.5)-1=16.5$；函数$f(x)$的定义域为$[-4,+\infty)$。

5. 隐函数　在某些问题中，函数关系并不是由一个解析式$y=f(x)$给出，而是由 x 与 y 所组成的一个方程式给出。例如，$x+y^3-1=0$。因为，当自变量 x 在（$-\infty$，$+\infty$）内取任意一个值时，变量 y 有确定的值与之对应。例如，$x=-7$ 时，$y=2$；$x=0$ 时，$y=1$；$x=3$ 时，$y=-\sqrt[3]{2}$，等等。所以这个方程确定 y 为 x 的函数。这样的函数称为**隐函数**。

一般地，如果在方程$F(x,y)=0$中，当 x 在某一区间内取任意一个值时，相应地总有满足该方程的惟一一个 y 值存在，从而确定一个函数$y=f(x)$[满足 $F(x,f(x))\equiv 0$]，则称 $y=f(x)$ 是由方程$F(x,y)=0$所确定的隐函数。

相对地说，如果函数的解析式能写成$y=f(x)$，则称该函数为**显函数**。

把一个隐函数化为显函数，称为隐函数的显化。例如，从方程 $x+y^3-1=0$ 中解出 $y=\sqrt[3]{1-x}$，就是把隐函数化为显函数。但是，隐函数的显化有时是困难的，甚至是不可能的。例如，方程$\sin(x+y)=2^y$所确定的隐函数就不能显化。

1.1.2 函数的几种简单性态

1. 函数的奇偶性　如果函数$y=f(x)$对于任意 $x\in D$，恒有$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为**奇函数**；如果对于任意 $x\in D$，恒有$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为**偶函数**。奇函数的图形关于原点对称（图 1-4），偶函数的图形关于 y 轴对称（图 1-5）。

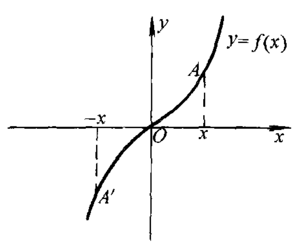


图 1-4

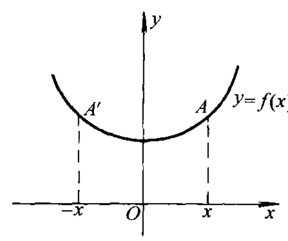


图 1-5

例如，$y=\tan x$ 在区间（$-\pi/2$，$\pi/2$）内是奇函数，$y=x^4-3x^2$ 在区间（$-\infty$，$+\infty$）内是偶函数，而 $y=\sin x+\cos x$ 在区间（$-\infty$，$+\infty$）内是非奇非偶的函数。

2. 函数的单调性　如果函数$y=f(x)$对于区间 I 内的任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有$f(x_1)<f(x_2)$，则称此函数在 I 上**单调增加**，I 叫做**单调增区间**；当 $x_1<x_2$ 时，有$f(x_1)>f(x_2)$，则称此函数在 I 上**单调减少**，I 叫做**单调减区间**。单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**，单调增区间和单调减区间统称为**单调区间**。在单调增区间内，函数图形随 x 的增大而上升（图 1-6），在单调减区间内，函数图形随 x 的增大而下降（图 1-7）。

例如，函数 $y=x^2$ 在区间（$-\infty$，0］内单调减少，在区间［0，$+\infty$）内单调增加，（$-\infty$，0］、［0，$+\infty$）是它的单调区间。

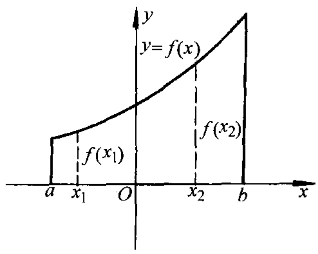


图 1-6

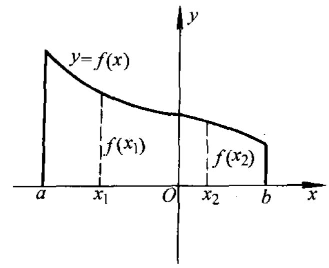


图 1-7

3．函数的周期性　对于函数$y=f(x)$，如果存在一个常数$T\neq 0$，使得对于任意$x\in D$，必有$x\pm T\in D$，且恒有

$$f(x\pm T)=f(x)$$

则称$f(x)$为**周期函数**，其中T叫做函数$f(x)$的**周期**，通常所说的周期是指它的最小正周期。

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$都是以2π为周期的周期函数；$y=\tan x$，$y=\cot x$都是以π为周期的周期函数。

4．函数的有界性　设函数$y=f(x)$在区间I上有定义，如果存在一个正数M，使得对于任意$x\in I$，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数$f(x)$在I上**有界**，也称$f(x)$为I上的有界函数。否则称$f(x)$在I上**无界**，也称$f(x)$为I上的无界函数。

注意　有界性是依赖于区间的。例如，函数$y=\dfrac{1}{x}$在区间（0，1）内无界，但在区间（1，2）内有界。

1.1.3　反函数

定义 2　设函数$y=f(x)$的定义域为D，值域为M，如果对于M中的每一个y值，在D中有使$y=f(x)$的惟一的x值与之对应，则其对应法则记作f^{-1}，这个定义在M上的函数$x=f^{-1}(y)$叫做$y=f(x)$的**反函数**，或称它们互为反函数。

函数$y=f(x)$，x为自变量，y为因变量，它的定义域为D，值域为M。

函数$x=f^{-1}(y)$，y为自变量，x为因变量，它的定义域为M，值域为D。

习惯上用x表示自变量，用y表示因变量。因此将$x=f^{-1}(y)$改写为以x为自变量，以y为因变量的函数$y=f^{-1}(x)$，这时可以说$y=f^{-1}(x)$是$y=f(x)$的反函数。

$y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$的图形关于直线$y=x$对称（图 1-8）。

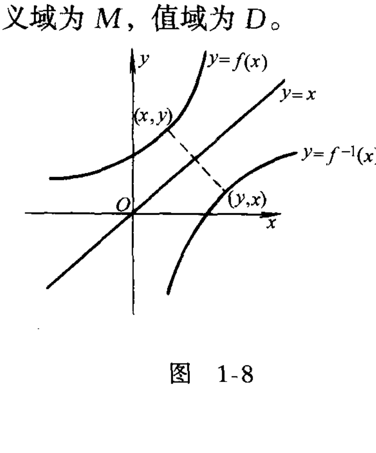


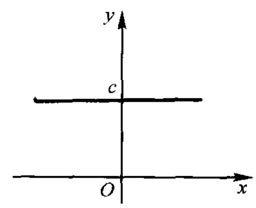
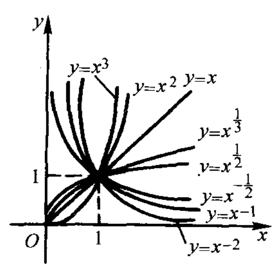
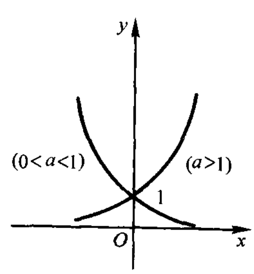
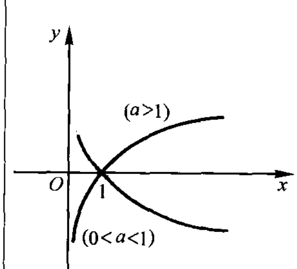
图 1-8

1.1.4　初等函数

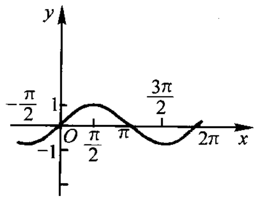
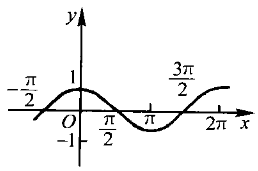
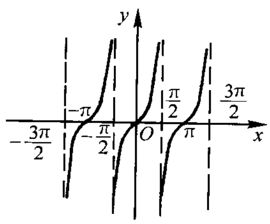
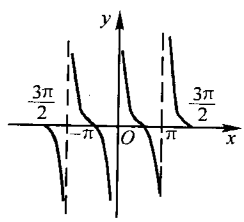
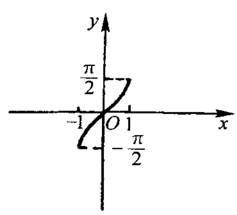
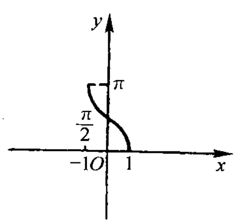
1．基本初等函数　常数函数$y=c$（c为常数），幂

函数 $y=x^{\mu}$（μ 为实数），指数函数 $y=a^{x}$（$a>0$，$a\neq1$），对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq1$），三角函数 $y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$、$y=\cot x$、$y=\sec x$、$y=\csc x$，反三角函数 $y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\arctan x$、$y=\operatorname{arccot} x$ 统称为**基本初等函数**。这些函数在中学数学中都已学过，但为了今后学习和查阅方便，现将一些常用的基本初等函数的图形及其性质列于表 1-1 中。

表 1-1　基本初等函数的图形及其性质

名　称	表达式	定义域	图　形	特　性
常数函数	$y=c$	$(-\infty, +\infty)$		
幂函数	$y=x^{\mu}$ $(\mu\neq0)$	随 μ 而不同，但在 $(0, +\infty)$ 中都有定义		经过点 $(1, 1)$ 在第一象限内当 $\mu>0$ 时，x^{μ} 为增函数；$\mu<0$ 时，x^{μ} 为减函数
指数函数	$y=a^{x}$ $(a>0, a\neq1)$	$(-\infty, +\infty)$		图形在 x 轴上方（因 $a^{x}>0$），且都通过点 $(0, 1)$ 当 $0<a<1$ 时，a^{x} 是减函数；当 $a>1$ 时，a^{x} 是增函数
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>0, a\neq1)$	$(0, +\infty)$		图形在 y 轴右侧（因 0 与负数都没有对数），都通过点 $(1, 0)$ 当 $0<a<1$ 时，$\log_a x$ 是减函数； 当 $a>1$ 时，$\log_a x$ 是增函数

（续）

名称		表达式	定义域	图形	特性
三角函数	正弦函数	$y=\sin x$	$(-\infty,\ +\infty)$		是以 2π 为周期的奇函数（图形关于原点对称）。图形在两直线 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间，即 $\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$
	余弦函数	$y=\cos x$	$(-\infty,\ +\infty)$		是以 2π 为周期的偶函数（图形关于 y 轴对称）。图形在两直线 $y=1$ 与 $y=-1$ 之间，即 $\lvert\cos x\rvert\leqslant 1$
	正切函数	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$		是以 π 为周期的奇函数，在 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ 内是增函数
	余切函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$		是以 π 为周期的奇函数，在 $(0,\ \pi)$ 内是减函数
反三角函数	反正弦函数	$y=\arcsin x$	$[-1,\ 1]$		单调增加的奇函数，值域：$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$
	反余弦函数	$y=\arccos x$	$[-1,\ 1]$		单调减少，值域：$0\leqslant y\leqslant\pi$