



21世纪高职高专规划教材

机械工业出版社精品教材

高等数学(理工科用)

第2版

方晓华 主编
费定晖 主审

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS





清华大学出版社

清华大学出版社

高等数学(理工科用)

第2版

主编：王萼芬
副主编：王萼芬

21 世纪高职高专规划教材
机械工业出版社精品教材

高等数学

(理工科用)

第 2 版

主 编 金华职业技术学院 方晓华
副主编 武汉船舶职业技术学院 朱春浩 彭立新
成都航空职业技术学院 黄兴廉
湖南机电职业技术学院 潘劲松
参 编 成都航空职业技术学院 刘 红
浙江广厦建设职业技术学院 金惠萍 杨立卿
金华职业技术学院 吴凤香 杜凤英 吕焱飞
主 审 华东交通大学 费定晖
副主审 浙江广厦建设职业技术学院 胡晶地



机械工业出版社

本书是根据高等职业技术教育教学要求编写的。全书共 11 章, 内容包括函数、极限与连续, 导数与微分, 导数的应用, 不定积分, 定积分及其应用, 常微分方程, 多元函数微积分, 级数, 拉普拉斯变换, 矩阵及其应用, 概率与数理统计。每章配有一定数量的习题。取材注意从实际问题出发, 理论联系实际, 便于教学。

本书可作为二年制及三年制高等职业技术学院、高等专科学校、职工大学、业余大学、夜大学、函授大学、成人教育学院等大专层次的理工科类高等数学课程的教材, 也可作为广大自学者及工程技术人员的自学用书。

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学/方晓华主编. —2 版. —北京: 机械工业出版社,
2004.7
21 世纪高职高专规划教材
ISBN 7-111-08125-0

I. 高… II. 方… III. 高等数学—高等学校: 技术学
校—教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 070393 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)
策划编辑: 余茂祚 责任编辑: 余茂祚 版式设计: 冉晓华
责任校对: 魏俊云 封面设计: 饶 薇 责任印制: 洪汉军
北京京丰印刷厂印刷 · 新华书店北京发行所发行
2004 年 8 月第 2 版 · 第 1 次印刷
787mm×1092mm $1/16$ · 19.5 印张 · 477 千字
定价: 28.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换
本社购书热线电话 (010) 68993821、88379646
封面无防伪标均为盗版

21 世纪高职高专规划教材

编委会名单

编委会主任 王文斌 郝广发

编委会副主任 (按姓氏笔画为序)

马元兴	王茂元	王明耀	王胜利	王锡铭
田建敏	刘锡奇	杨文兰	杨 飒	李兴旺
李居参	杜建根	余元冠	沈国良	沈祖尧
陈丽能	陈瑞藻	张建华	茆有柏	徐铮颖
符宁平	焦 斌			

编委会委员 (按姓氏笔画为序)

王志伟	付丽华	成运花	曲昭钟	朱 强
齐从谦	许 展	李茂松	李学锋	李超群
李连邨	杨克玉	杨国祥	杨翠明	吴诗德
吴振彪	吴 锐	肖 珑	何志祥	何宝文
陈月波	陈江伟	张 波	武友德	周国良
宗序炎	俞庆生	恽达明	姜 洁	晏初宏
倪依纯	徐炳亭	唐志宏	崔 平	崔景茂

总 策 划 余茂祚
策 划 助 理 于奇慧

第2版前言

教育部关于加强高职高专的教学工作会议中,明确指出高职高专以培养技术应用型专门人才为根本任务。《高等数学》是高等职业技术学院理工类各专业必修的主要基础课。学生学好了高等数学,既为后继各专业课的学习准备了必需的数学知识,更发展了自己的智力,锻炼和提高了分析问题与解决问题的能力,这些均有利于加强技术应用人才的素质。而教育离不开教材,因此,编写一本适合高职高专院校用的《高等数学》教材是十分重要和非常必要的。

本书自2000年8月发行以来,得到了读者的厚爱,全国数十所高等职业技术学院使用该书,供不应求,受益面广。虽然发行时间还不到四年,但已先后印刷了7次,并获得了各方的好评。事实证明,本书具有较强的生命力。根据各兄弟院校的使用情况及历年学生的实际情况,这次我们在修改中除了保持原有的编写指导思想,即强化基本概念的教学,淡化数学技巧的训练,删去不必要的逻辑推导,突出应用能力的培养;在内容的取舍上,更加强调实用和够用,更加注意内容的精练,更加符合高职高专的教学要求,并在具体章节内容的安排上作了以下改动。

1. 删去了一些对于高职高专院校要求较高的内容和难度较大的例题、习题。例如,原书第9章中的9.2“曲线积分”,原书第10章中的 n 阶行列式计算的例题以及几个证明题等均予以删去。

2. 增添了应用较广而原书缺乏的内容。例如,扩增了第9章“拉普拉斯变换”,第11章中的11.7“参数估计”与11.8“假设检验”两节。又如第3章中的3.4“洛必达法则”,以及第5章中的5.4“广义积分”等内容。

3. 简化并精简了原书第7章“向量代数与空间解析几何”的内容,同时将原书第7章、第8章及第9章共3章合并成新的第7章“多元函数微积分”,将“空间解析几何简介”作为该章的第1节。

4. 将原书第4章“定积分与不定积分”改写成“不定积分”与“定积分”各自独立又有联系的两章,并将原书的第5章改成“定积分及其应用”,这样做是为了分散难点,便于学生的学习。

5. 在精简部分内容的同时,对于那些我们认为学生必须掌握的基本理论、基本知识和基本技能,则不惜篇幅,力求解说详细,使学生和读者容易接受。例如,一元函数微积分学及常微分方程部分等各章。这是根据高职高专的培养目标确定的。

我们希望所作的这些改动能使这本教材更好地适合高等职业教育的教学要求。全书经改动后共设11章,书中注有“*”号的内容可供不同专业,不同要求选用。

参加第2版编写的学校及人员有:

第1章 金华职业技术学院的方晓华;第2章,第3章 成都航空职业技术学院的黄兴廉、刘红;第4章,第5章 武汉船舶职业技术学院的朱春浩、彭立新;第6章 湖南机电职业技术学院的潘劲松;第7章 金华职业技术学院的杜凤英;第8章 金华职业技术学院

的吴凤香、吕焱飞；第9章 浙江广厦建设职业技术学院的金惠萍、杨立卿；第10章，第11章及附录 金华职业技术学院的方晓华。

本书（第2版）由方晓华主编，朱春浩、黄兴廉、潘劲松、彭立新为副主编，由方晓华统稿。

本书（第2版）由全国优秀教师费定晖教授主审，他极其认真、仔细地审阅了全稿，并提出了许多宝贵意见，参加审稿的还有浙江广厦建设职业技术学院的胡晶地，在此表示衷心感谢。

参加本书第1版编写的全部作者及主审为本书打下了极其良好的基础，因而使该书有较高的声誉，充分发挥了图书的作用。这次由于各种原因，有些同志没参加本书第2版的修订工作，在此表示衷心感谢。

本书（第2版）获得金华职业技术学院专著与教材出版基金的资助。同时得到武汉船舶职业技术学院、成都航空职业技术学院、湖南机电职业技术学院、浙江广厦建设职业技术学院各级领导的大力支持，在此表示感谢。

限于编者水平，加之时间仓促，书中一定存在不妥之处，敬请使用本书的同行和广大读者批评指正。

编 者

目 录

第2版前言

第1章 函数、极限与连续	1
1.1 函数	1
1.1.1 函数的概念	1
1.1.2 函数的几种简单性态	3
1.1.3 反函数	4
1.1.4 初等函数	4
1.1.5 建立函数关系式	8
习题 1-1	8
1.2 极限	9
1.2.1 数列的极限	10
1.2.2 函数的极限	11
1.2.3 无穷小与无穷大	13
习题 1-2	14
1.3 极限运算	15
1.3.1 极限的运算法则	15
1.3.2 两个重要极限	18
1.3.3 无穷小的比较	20
习题 1-3	20
1.4 函数的连续性	21
1.4.1 函数连续性的概念	21
1.4.2 函数的间断点	23
1.4.3 闭区间上连续函数的性质	24
习题 1-4	25
第2章 导数与微分	26
2.1 导数的概念	26
2.1.1 导数的定义	26
2.1.2 可导与连续的关系	29
2.1.3 导数的实际意义	30
习题 2-1	31
2.2 导数的运算	31
2.2.1 函数的四则运算的求导法则	31
2.2.2 复合函数的求导法则	33
2.2.3 隐函数的求导法	34
2.2.4 由参数方程所确定的函数的求导法	37

2.2.5 高阶导数	37
习题 2-2	38
2.3 微分的概念	40
2.3.1 微分的定义	40
2.3.2 微分公式和微分的运算法则	41
2.3.3 微分在近似计算中的应用	42
习题 2-3	43
第3章 导数的应用	45
3.1 拉格朗日中值定理	45
习题 3-1	46
3.2 函数的单调性与极值	46
3.2.1 函数单调性的判别法	46
3.2.2 函数的极值及其求法	47
3.2.3 函数的最大值和最小值	49
习题 3-2	51
3.3 曲线的凹凸与拐点	52
3.3.1 曲线的凹凸	52
3.3.2 曲线的拐点	53
习题 3-3	54
3.4 洛必达法则	54
3.4.1 $\frac{0}{0}$ 型不定式	54
3.4.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式	56
习题 3-4	56
* 3.5 曲线的曲率	57
3.5.1 弧微分	57
3.5.2 曲率的概念	58
3.5.3 曲率的计算公式	59
3.5.4 曲率圆与曲率半径	61
习题 3-5	62
第4章 不定积分	63
4.1 不定积分的概念	63
4.1.1 原函数的概念	63
4.1.2 不定积分的定义和几何意义	64
4.1.3 基本积分公式	64
习题 4-1	66

4.2 不定积分的性质	66	第6章 常微分方程	103
4.2.1 不定积分的性质	66	6.1 常微分方程的概念	103
4.2.2 直接积分法	66	习题 6-1	105
习题 4-2	67	6.2 一阶微分方程	105
4.3 换元积分法	68	6.2.1 可分离变量的微分方程	105
4.3.1 第一类换元积分法	68	6.2.2 齐次微分方程	107
4.3.2 第二类换元积分法	71	6.2.3 一阶线性微分方程	107
习题 4-3	73	习题 6-2	109
4.4 分部积分法	74	6.3 二阶常系数线性微分方程	110
习题 4-4	76	6.3.1 二阶常系数线性微分方程的 解的结构	110
第5章 定积分及其应用	77	6.3.2 二阶常系数线性齐次微分方 程的解法	111
5.1 定积分的概念	77	6.3.3 二阶常系数线性非齐次微分 方程的解法	112
5.1.1 引入定积分概念的实例	77	习题 6-3	115
5.1.2 定积分的定义	78	6.4 微分方程应用举例	116
5.1.3 定积分的性质	80	习题 6-4	118
习题 5-1	81	第7章 多元函数微积分	119
5.2 定积分的基本公式(牛顿- 莱布尼兹公式)	82	7.1 空间解析几何简介	119
5.2.1 变上限的积分函数	82	7.1.1 空间直角坐标系	119
5.2.2 牛顿-莱布尼兹公式	83	7.1.2 空间曲面	120
习题 5-2	84	习题 7-1	122
5.3 定积分的换元积分法和分部积 分法	84	7.2 多元函数的概念	123
5.3.1 定积分的换元积分法	84	7.2.1 多元函数的定义	123
5.3.2 定积分的分部积分法	86	7.2.2 二元函数的几何意义	124
习题 5-3	87	习题 7-2	125
* 5.4 广义积分	88	7.3 偏导数	125
5.4.1 无穷区间上的广义积分	88	7.3.1 偏导数的概念	125
5.4.2 无界函数的广义积分	89	7.3.2 高阶偏导数	127
习题 5-4	91	习题 7-3	129
5.5 定积分在几何中的应用	91	7.4 全微分的概念	129
5.5.1 定积分的微元法	91	7.4.1 全微分的定义	129
5.5.2 平面图形的面积	92	7.4.2 全微分在近似计算中的应用	130
5.5.3 体积	94	习题 7-4	131
5.5.4 平面曲线的弧长	96	7.5 多元函数的求导法则	131
习题 5-5	97	7.5.1 多元复合函数的求导法则	131
5.6 定积分在物理中的应用	98	7.5.2 隐函数的求导法则	133
5.6.1 变力沿直线所作的功	98	习题 7-5	134
5.6.2 液体的静压力	99	7.6 多元函数的极值	134
5.6.3 平均值和均方根	100	7.6.1 二元函数极值的概念	134
习题 5-6	101	7.6.2 二元函数极值的判别法	135

7.6.3 条件极值	136	第 10 章 矩阵及其应用	189
习题 7-6	137	10.1 n 阶行列式的概念	189
7.7 二重积分	138	10.1.1 二阶和三阶行列式	189
7.7.1 二重积分的概念和性质	138	10.1.2 n 阶行列式	191
7.7.2 二重积分的计算	141	10.1.3 行列式的性质	193
习题 7-7	148	10.1.4 克莱姆法则	196
第 8 章 级数	149	习题 10-1	198
8.1 数项级数	149	10.2 矩阵	199
8.1.1 数项级数的概念	149	10.2.1 矩阵的概念	199
8.1.2 级数收敛的必要条件	151	10.2.2 矩阵的线性运算	201
8.1.3 正项级数及其审敛法	152	10.2.3 矩阵的乘法运算	202
8.1.4 交错级数及其审敛法	154	10.2.4 矩阵的转置运算	205
8.1.5 绝对收敛与条件收敛	155	10.2.5 逆矩阵的概念	206
习题 8-1	156	10.2.6 逆矩阵的存在性及其求法	208
8.2 幂级数	157	10.2.7 用逆矩阵解线性方程组	210
8.2.1 函数项级数的概念	157	习题 10-2	211
8.2.2 幂级数及其收敛半径和收敛 区间	158	10.3 矩阵的初等变换与矩阵 的秩	213
8.2.3 幂级数的运算及和函数	160	10.3.1 矩阵的初等变换	213
8.2.4 泰勒公式与泰勒级数	162	10.3.2 矩阵的秩	214
8.2.5 函数展开成幂级数	163	习题 10-3	216
8.2.6 幂级数的应用举例	165	10.4 线性方程组	217
习题 8-2	167	10.4.1 消元法	217
* 8.3 傅立叶级数	167	10.4.2 一般线性方程组的求解 问题	218
8.3.1 三角级数及三角函数系的 正交性	167	习题 10-4	222
8.3.2 周期为 2π 的周期函数展开 成傅立叶级数	169	* 第 11 章 概率与数理统计	223
8.3.3 定义在有限区间上的函数展 开成傅立叶级数	173	11.1 随机事件与概率	223
8.3.4 周期为 $2l$ 的周期函数展开成 傅立叶级数	175	11.1.1 随机事件	223
习题 8-3	176	11.1.2 随机事件的关系与运算	224
* 第 9 章 拉普拉斯变换	177	11.1.3 概率的定义	227
9.1 拉普拉斯变换的概念	177	习题 11-1	230
习题 9-1	179	11.2 概率的基本性质与公式	230
9.2 拉普拉斯变换的性质	179	11.2.1 概率的基本性质	230
习题 9-2	183	11.2.2 条件概率与乘法公式	231
9.3 拉普拉斯变换的逆变换	184	11.2.3 全概率公式	232
习题 9-3	186	习题 11-2	233
9.4 拉普拉斯变换的应用	186	11.3 事件的独立性	234
习题 9-4	188	习题 11-3	236
		11.4 随机变量	236
		11.4.1 随机变量与分布函数	236
		11.4.2 离散型随机变量及其分布	238

11.4.3 连续型随机变量及其分布	241	11.8.1 假设检验的基本概念	266
习题 11-4	246	11.8.2 一个正态总体均值的假设 检验	268
11.5 随机变量的数字特征	247	11.8.3 一个正态总体方差的假设 检验	270
11.5.1 数学期望	247	习题 11-8	271
11.5.2 方差	251	附录	273
习题 11-5	253	附录 A 习题答案	273
11.6 数理统计基础	253	附录 B 泊松分布表	289
11.6.1 数理统计中的几个概念	254	附录 C 标准正态分布表	290
11.6.2 数理统计中的几个分布	255	附录 D χ^2 分布表	291
习题 11-6	258	附录 E t 分布表	292
11.7 参数估计	258	附录 F 初等数学常用公式	293
11.7.1 参数的点估计	258	附录 G 希腊字母	297
11.7.2 估计量的评价标准	260	参考文献	298
11.7.3 参数的区间估计	262		
习题 11-7	266		
11.8 假设检验	266		

第 1 章 函数、极限与连续

函数是高等数学中最重要基本概念之一，也是高等数学的主要研究对象。极限是在研究变量在某一过程中的变化趋势时引出的，它也是高等数学的重要基本概念，高等数学中的其它几个重要的概念，如连续、导数、定积分等，都是用极限表述的，并且高等数学中的很多定理也是用极限方法推导出来的。在这一章里我们将在对函数概念进行复习和补充的基础上，介绍数列与函数极限的概念，求极限的方法以及函数的连续性。

1.1 函数

1.1.1 函数的概念

1. 引例 人们在观察、研究某一现象或某一运动过程时，会遇到许多变量，这些变量并不是独立变化的，它们之间存在着依赖关系。现考察几个具体例子。

例 1 自由落体的运动规律为

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

式中 h ——下降距离；

t ——时间；

g ——重力加速度。

这个公式提出了在物体自由降落的过程中，距离 h 和时间 t 之间的依赖关系。

例 2 用一块边长为 a 的正方形铁皮做成一个高为 x 的无盖小盒（图 1-1）。

这小盒的容积 V 和高 x 之间存在着以下依赖关系

$$V = x(a - 2x)^2$$

还可以举出其它变量间相互依赖关系的例子。在上面两个依赖关系中，有一个共同的特征，这就是：

1) 在这些变量中，有些量叫做自变量。如时间 t ，盒高 x ，它们有一定的取值范围。例如例 1 中的时间 t 的变化范围为 $(0, T)$ ，例 2 中的盒高 x 的变化范围为 $(0, a/2)$ 。在依赖关系中，还有一些量是随着自变量的变化而起变化的，叫做因变量。如自由落体下降距离 h ，盒的容积 V 。

2) 对自变量的变化范围内的每一个确定值，通过依赖关系，总能得到一个确定的因变量值。

把这种特征抽象出来，便得到函数的概念。

2. 函数的定义

定义 1 设 D 是非空实数集，如果对于 D 中的每一个 x ，按照某个对应法则 f ，都有确定的实数 y 与之对应，则称 y 是定义在 D 上的 x 的函数，记作 $y = f(x)$ 。

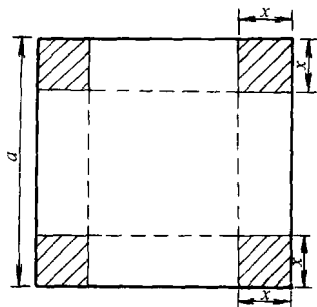


图 1-1

D 叫做函数的定义域, x 叫做自变量, y 叫做因变量。

如果 x_0 是函数 $y=f(x)$ 的定义域中的一个值, 则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 有定义。函数在点 x_0 的对应值叫做函数在该点的函数值, 记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$ 。当自变量 x 在定义域内取每一个数值时, 对应的函数值的全体叫做函数的值域, 记作 M (图 1-2)。

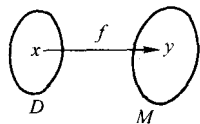


图 1-2

函数 $f(x)$ 中的 f 反映自变量与因变量的对应法则。对应法则也常用 φ, h, g, F 等表示, 那么函数也就记作 $\varphi(x), h(x), g(x), F(x)$ 等, 有时为简化符号, 函数关系也可记作 $y=y(x)$ 。

由函数定义可知, 定义域和对应法则是函数的两个要素。如果两个函数具有相同的定义域和对应法则, 则它们是相同的函数。

3. 函数的定义域 在研究函数时必须注意它的定义域。在实际问题中, 函数的定义域应根据问题的实际意义来确定。例如, 例 2 中的盒高 x 的变化范围为 $(0, a/2)$ 。对于用数学式子表示的函数, 确定函数定义域的原则是使这数学式子的运算有意义。

例 3 求下列函数的定义域:

$$(1) f(x) = \sqrt{9-x^2} \quad (2) f(x) = \lg \frac{x}{x-2}$$

解 (1) 在偶次根式中, 被开方式必须大于等于零, 所以有 $9-x^2 \geq 0$, 得 $-3 \leq x \leq 3$, 即定义域为 $[-3, 3]$ 。

(2) 要使 $f(x)$ 有意义, 必须使 $\frac{x}{x-2} > 0$, 得 $x > 2$ 或 $x < 0$, 即定义域为 $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ 。

4. 分段函数 把定义域分成若干部分, 函数关系用不同的式子分段表达的函数称为分段函数。分段函数是高等数学中常见的一种函数。例如, 在中学数学课出现过的绝对值函数可以表示成

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

例 4 设函数

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 0 \\ 2, & x = 0 \\ 3x, & x < 0 \end{cases}$$

当 x 取 $(0, +\infty)$ 内的值时, y 的值由关系式 $y = x^2 + 1$ 来计算; 当 $x = 0$ 时, $y = 2$; 当 x 取 $(-\infty, 0)$ 内的值时, y 的值由关系式 $y = 3x$ 来计算。例如, $f(3) = 3^2 + 1 = 10, f(-5) = 3 \cdot (-5) = -15$ 。它的图形如图 1-3 所示。

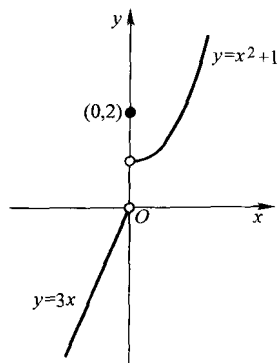


图 1-3

注意 分段函数是由几个关系式合起来表示一个函数, 而不是几个函数。对于自变量 x 在定义域内的某个值, 分段函数 y 只能确定惟一的值。分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并。

例 5 设函数

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & -4 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x < 3 \\ 5x - 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

求 $f(-\pi)$, $f(1)$, $f(3.5)$ 及函数的定义域。

解 因为 $-\pi \in [-4, 1)$, 所以 $f(-\pi) = \sin(-\pi) = 0$; 因为 $1 \in [1, 3)$, 所以 $f(1) = 1$; 因为 $3.5 \in [3, +\infty)$, 所以 $f(3.5) = 5 \times (3.5) - 1 = 16.5$; 函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-4, +\infty)$ 。

5. 隐函数 在某些问题中, 函数关系并不是由一个解析式 $y = f(x)$ 给出, 而是由 x 与 y 所组成的一个方程式给出。例如, $x + y^3 - 1 = 0$ 。因为, 当自变量 x 在 $(-\infty, +\infty)$ 内取任意一个值时, 变量 y 有确定的值与之对应。例如, $x = -7$ 时, $y = 2$; $x = 0$ 时, $y = 1$; $x = 3$ 时, $y = -\sqrt[3]{2}$, 等等。所以这个方程确定 y 为 x 的函数。这样的函数称为**隐函数**。

一般地, 如果在方程 $F(x, y) = 0$ 中, 当 x 在某一区间内取任意一个值时, 相应地总有满足该方程的惟一一个 y 值存在, 从而确定一个函数 $y = f(x)$ [满足 $F(x, f(x)) \equiv 0$], 则称 $y = f(x)$ 是由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数。

相对地说, 如果函数的解析式能写成 $y = f(x)$, 则称该函数为**显函数**。

把一个隐函数化为显函数, 称为隐函数的显化。例如, 从方程 $x + y^3 - 1 = 0$ 中解出 $y = \sqrt[3]{1-x}$, 就是把隐函数化为显函数。但是, 隐函数的显化有时是困难的, 甚至是不可能的。例如, 方程 $\sin(x+y) = 2^y$ 所确定的隐函数就不能显化。

1.1.2 函数的几种简单性态

1. 函数的奇偶性 如果函数 $y = f(x)$ 对于任意 $x \in D$, 恒有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为**奇函数**; 如果对于任意 $x \in D$, 恒有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为**偶函数**。奇函数的图形关于原点对称 (图 1-4), 偶函数的图形关于 y 轴对称 (图 1-5)。

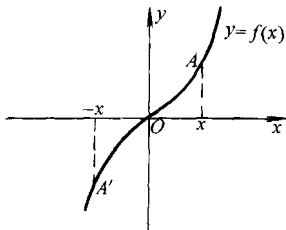


图 1-4

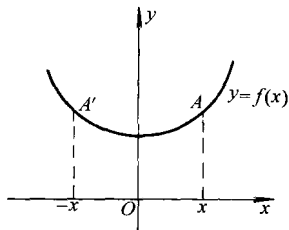


图 1-5

例如, $y = \tan x$ 在区间 $(-\pi/2, \pi/2)$ 内是奇函数, $y = x^4 - 3x^2$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是偶函数, 而 $y = \sin x + \cos x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是非奇非偶的函数。

2. 函数的单调性 如果函数 $y = f(x)$ 对于区间 I 内的任意两点 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称此函数在 I 上**单调增加**, I 叫做**单调增区间**; 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称此函数在 I 上**单调减少**, I 叫做**单调减区间**。单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**, 单调增区间和单调减区间统称为**单调区间**。在单调增区间内, 函数图形随 x 的增大而上升 (图 1-6), 在单调减区间内, 函数图形随 x 的增大而下降 (图 1-7)。

例如, 函数 $y = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 内单调减少, 在区间 $[0, +\infty)$ 内单调增加, $(-\infty, 0]$ 、 $[0, +\infty)$ 是它的单调区间。

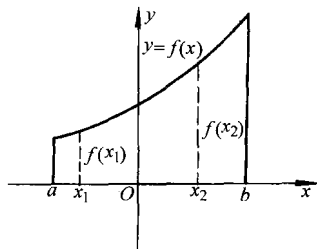


图 1-6

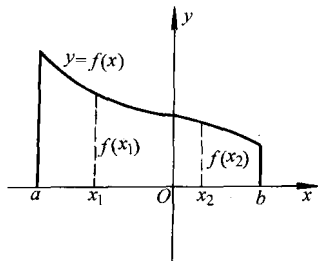


图 1-7

3. 函数的周期性 对于函数 $y=f(x)$, 如果存在一个常数 $T \neq 0$, 使得对于任意 $x \in D$, 必有 $x \pm T \in D$, 且恒有

$$f(x \pm T) = f(x)$$

则称 $f(x)$ 为周期函数, 其中 T 叫做函数 $f(x)$ 的周期, 通常所说的周期是指它的最小正周期。

例如, $y = \sin x$, $y = \cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数; $y = \tan x$, $y = \cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数。

4. 函数的有界性 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义, 如果存在一个正数 M , 使得对于任意 $x \in I$, 都有

$$|f(x)| \leq M$$

则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界, 也称 $f(x)$ 为 I 上的有界函数。否则称 $f(x)$ 在 I 上无界, 也称 $f(x)$ 为 I 上的无界函数。

注意 有界性是依赖于区间的。例如, 函数 $y = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 内无界, 但在区间 $(1, 2)$ 内有界。

1.1.3 反函数

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 M , 如果对于 M 中的每一个 y 值, 在 D 中有使 $y=f(x)$ 的惟一的 x 值与之对应, 则其对应法则记作 f^{-1} , 这个定义在 M 上的函数 $x=f^{-1}(y)$ 叫做 $y=f(x)$ 的反函数, 或称它们互为反函数。

函数 $y=f(x)$, x 为自变量, y 为因变量, 它的定义域为 D , 值域为 M 。

函数 $x=f^{-1}(y)$, y 为自变量, x 为因变量, 它的定义域为 M , 值域为 D 。

习惯上用 x 表示自变量, 用 y 表示因变量。因此将 $x=f^{-1}(y)$ 改写为以 x 为自变量, 以 y 为因变量的函数 $y=f^{-1}(x)$, 这时可以说 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数。

$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称 (图 1-8)。

1.1.4 初等函数

1. 基本初等函数 常数函数 $y=c$ (c 为常数), 幂

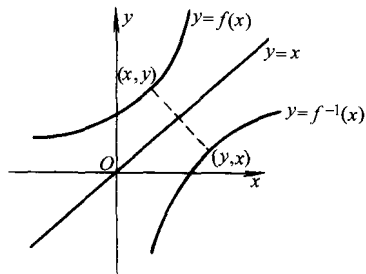
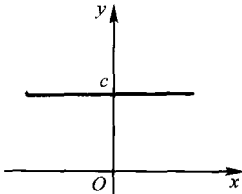
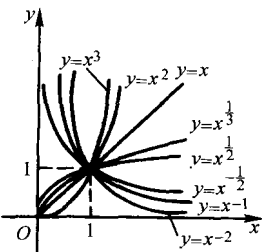
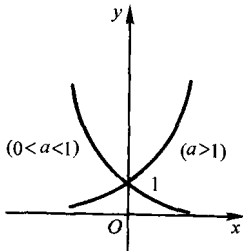
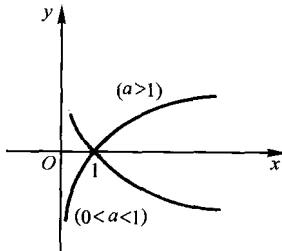


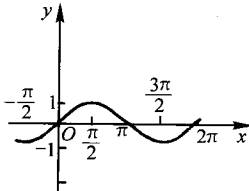
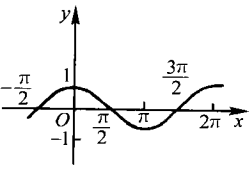
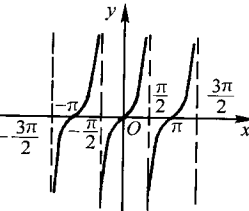
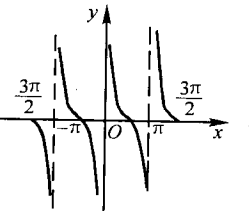
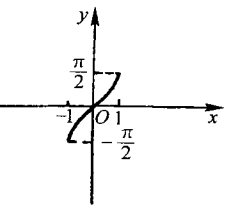
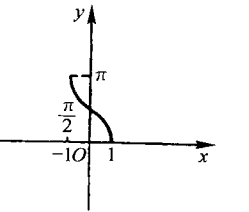
图 1-8

函数 $y = x^\mu$ (μ 为实数), 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$), 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$), 三角函数 $y = \sin x$ 、 $y = \cos x$ 、 $y = \tan x$ 、 $y = \cot x$ 、 $y = \sec x$ 、 $y = \csc x$, 反三角函数 $y = \arcsin x$ 、 $y = \arccos x$ 、 $y = \arctan x$ 、 $y = \operatorname{arccot} x$ 统称为**基本初等函数**。这些函数在中学数学中都已学过, 但为了今后学习和查阅方便, 现将一些常用的基本初等函数的图形及其性质列于表 1-1 中。

表 1-1 基本初等函数的图形及其性质

名 称	表达式	定义域	图 形	特 性
常 数 函 数	$y = c$	$(-\infty, +\infty)$		
幂 函 数	$y = x^\mu$ ($\mu \neq 0$)	随 μ 而不同, 但在 $(0, +\infty)$ 中都有定义		经过点 (1, 1) 在第一象限内当 $\mu > 0$ 时, x^μ 为增函数; $\mu < 0$ 时, x^μ 为减函 数
指 数 函 数	$y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)	$(-\infty, +\infty)$		图形在 x 轴上方 (因 $a^x > 0$), 且都通过点 (0, 1) 当 $0 < a < 1$ 时, a^x 是减函数; 当 $a > 1$ 时, a^x 是增函数
对 数 函 数	$y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)	$(0, +\infty)$		图形在 y 轴右侧 (因 0 与负数 都没有对数), 都通过点 (1, 0) 当 $0 < a < 1$ 时, $\log_a x$ 是减函数; 当 $a > 1$ 时, $\log_a x$ 是增函数

(续)

名 称	表 达 式	定 义 域	图 形	特 性
三角函数	正弦函数 $y = \sin x$	$(-\infty, +\infty)$		是以 2π 为周期的奇函数 (图形关于原点对称)。图形在两直线 $y = 1$ 与 $y = -1$ 之间, 即 $ \sin x \leq 1$
	余弦函数 $y = \cos x$	$(-\infty, +\infty)$		是以 2π 为周期的偶函数 (图形关于 y 轴对称)。图形在两直线 $y = 1$ 与 $y = -1$ 之间, 即 $ \cos x \leq 1$
	正切函数 $y = \tan x$	$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)		是以 π 为周期的奇函数, 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内是增函数
	余切函数 $y = \cot x$	$x \neq k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)		是以 π 为周期的奇函数, 在 $(0, \pi)$ 内是减函数
反三角函数	反正弦函数 $y = \arcsin x$	$[-1, 1]$		单调增加的奇函数, 值域: $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
	反余弦函数 $y = \arccos x$	$[-1, 1]$		单调减少, 值域: $0 \leq y \leq \pi$