中学奥赛题型精解系列丛书

奥赛题型精解

高中数学

本书主编
李海霞
谭彩荣

丛书主编
杨林仙
卫胤风
李彩娟

赢在奥赛 赢在起点 赢在未来

全国百佳图书出版单位
百佳

中国时代经济出版社

全国百佳图书出版单位
百佳
中华人民共和国新闻出版总署评选

中学奥赛题型精解系列丛书

高中部分

高中数学	**定价：42.00元**
高中物理	定价：30.00元
高中化学	定价：19.00元
高中生物	定价：26.00元
高中英语	定价：20.00元
高中信息学	定价：24.00元

初中部分

初中数学	定价：21.00元
初中物理	定价：25.00元
初中化学	定价：16.00元
初中生物	定价：20.00元
初中英语	定价：22.00元
初中信息学	定价：20.00元

建议上架：奥赛类
ISBN 978-7-5119-0008-1
9 787511 900081 >
定价：42.00元

责任编辑：林晓靖 柳爱群
装帧设计：玉马设计室 13718519313

中学奥赛题型精解系列丛书

奥赛题型精解

高中数学

全国百佳图书出版单位

中国时代经济出版社

图书在版编目(CIP)数据

奥赛题型精解．高中数学／李海霞，谭彩荣主编．
—北京：中国时代经济出版社，2010.1
（中学奥赛题型精解系列丛书／杨林仙，卫胤风，李彩娟主编）
ISBN 978-7-5119-0008-1
Ⅰ.奥…　Ⅱ.①李…②谭…　Ⅲ.数学课－高中－解题　Ⅳ.G634
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 210163 号

书　　名：奥赛题型精解．高中数学
出 版 人：宋灵恩
作　　者：李海霞　谭彩荣
出版发行：中国时代经济出版社
社　　址：北京市西城区车公庄大街乙 5 号鸿儒大厦 B 座
邮政编码：100044
发行热线：(010)68320825　68320484
传　　真：(010)68320634
邮购热线：(010)88361317
网　　址：www.cmepub.com.cn
电子邮箱：zgsdjj@hotmail.com
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京市鑫海达印刷有限公司
开　　本：880×1230　1/32
字　　数：760 千字
印　　张：25.75
版　　次：2010 年 1 月第 1 版
印　　次：2010 年 1 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5119-0008-1
定　　价：42.00 元

前　言

众所周知，奥林匹克竞赛活动的宗旨，主要是激发青少年对科学的兴趣。通过竞赛达到使大多数青少年在智力上有所发展，在能力上有所提高的目标。并在普及活动的基础上，为少数优秀的青少年脱颖而出、成为优秀人才创造机遇和条件。

《中学奥赛题型精解系列》丛书的宗旨就是要激发学生学习兴趣，拓宽学生学习思路，发展学牛智力。丛书按照新教材的全部知识点和竞赛的测试范围分类编写，梳理知识点，点拨重点，突破难点，将重难点知识与竞赛中的新知识接轨，进行系统的讲解归纳。收集大量的竞赛信息，选择经典例题，整理解法，为参赛学生提供最具实战意义的试题、最系统的竞赛解题方法，使之成为最系统、最实用、最完整的竞赛用书。

本丛书既能作为中学生参加奥林匹克竞赛活动的培训与辅导用书，同时也可以作为广大中学生平时学习的参考用书。

丛书编者长期从事奥林匹克竞赛教育工作，他们有丰富的奥赛教学经验，本丛书是他们多年心血的结晶和经验的总结。由于时间仓促，难免会有不足之处，希望读者批评指正。

编　者

2009 年 12 月

目　　录

1 第一章 代数

一、集合概念及运算

知识概要

集合是一个基本的、原始的概念，它已渗透到数学的各个分支. 充分利用集合中元素的性质和集合之间的基本关系，往往能解决某些以集合为背景的高中数学竞赛题.

1. 集合与元素的关系($a\in A$)

集合与集合的关系($A\subseteq B$, $A\nsubseteq B$, $A=B$ 等)

2. 集合的运算(交，并，补)

$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$

$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$

$\complement_U A=\{x\mid x\notin A$ 且 $x\in U\}$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$

$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$

3. 若集合 A 有 n 个元素，则 A 有 2^n 个子集，A 有 2^n-1 个真子集.

4. 有限集合元素的个数

有限集的阶：有限集 A 的元素数目叫做这个集合的阶，记作 $\text{card}(A)$[或 $|A|$, $n(A)$]. 它有如下性质：一般的，

(1)对任意两个有限集合 A、B，有

$\text{card}(A\cup B)=\text{card}(A)+\text{card}(B)-\text{card}(A\cap B)$.

(2)对任意 n 个有限集合 A_1, $A_2\cdots$, A_n，有

$\text{card}(A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_{n-1}\cup A_n)$

$=[\text{card}(A_1)+\text{card}(A_2)+\text{card}(A_3)+\cdots+\text{card}(A_n)]-[\text{card}(A_1\cap A_2)+\text{card}(A_1\cap A_3)+\cdots+\text{card}(A_1\cap A_n)+\cdots+\text{card}(A_{n-1}\cap A_n)]+[\text{card}(A_1\cap A_2\cap A_3)+\cdots+\text{card}(A_{n-2}\cap A_{n-1}\cap A_n)]-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\text{card}(A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_n)$.

(3)设 A、B 是 U 的子集，$\complement_U A$，$\complement_U B$ 分别是 A、B 对 U 的补集，则

$\text{card}(\complement_U A\cap\complement_U B)=\text{card}(U)-[\text{card}(A)+\text{card}(B)-\text{card}(A\cap B)]$.

(4)设 A、B、C 是 U 的子集，$\complement_U A$、$\complement_U B$、$\complement_U C$ 分别是它们对 U 的补集，则

$\operatorname{card}(\complement_U A\cap\complement_U B\cap\complement_U C)=\operatorname{card}(U)-[\operatorname{card}(A)+\operatorname{card}(B)+\operatorname{card}(C)]+[\operatorname{card}(A\cap B)+\operatorname{card}(B\cap C)+\operatorname{card}(C\cap A)]-\operatorname{card}(A\cap B\cap C)$.

以上公式统称为容斥原理，有兴趣的读者可以把(3)、(4)推广到 n 个集合的情形，应用上述结论，可解决一类求有限集合元素个数的问题.

例题举证

【例 1】已知集合 $A=\{y\mid 2<y<3\}$，$x=\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{3}}$. 判断 x 与 A 的关系.

分析：判断 x 与 A 的关系，就是判断 x 是否满足 $2<x<3$，这里要求熟悉对数的运算.

解：$x=\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{3}}=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{2}+\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{5}=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{10}=\log_3 10$

$2=\log_3 9<\log_3 10<\log_3 27=3$

$\therefore x\in A$.

【例 2】求点集 $\left\{(x,y)\mid \lg\left(x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}\right)=\lg x+\lg y\right\}$ 中元素的个数.

解：由所设知 $x>0$，$y>0$ 及 $x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}=xy$，

由平均值不等式，有

$x^3+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{9}\geqslant 3\sqrt[3]{(x^3)\cdot\left(\frac{1}{3}y^3\right)\cdot\left(\frac{1}{9}\right)}=xy$

当且仅当 $x^3=\frac{1}{3}y^3=\frac{1}{9}$，即 $x=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$，$y=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$（虚根舍去）时，等号成立. 故所给点集仅有一个元素.

评述：此题解方程中，应用了不等式取等号的充要条件，是一种重要的解题方法. 应注意掌握.

【例 3】设集合 $A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2000, x=4k+1, k\in\mathbf{Z}\}$，集合 $B=\{y\mid 1\leqslant y\leqslant 3000, y=3k-1, k\in\mathbf{Z}\}$，求 $\operatorname{card}(A\cap B)$.

解：形如 $4k+1$ 的数可分三类：

$12l+1$，$12l+5$，$12l+9$（$l\in\mathbf{Z}$），其中只有形如 $12l+5$ 的数是形如 $3k-1$ 的数.

令　$1\leqslant 12l+5\leqslant 2000$（$l\in\mathbf{Z}$），

得　$0\leqslant l\leqslant 166$，

所以 $A\cap B=\{5,17,\cdots,1997\}$，

所以 $\operatorname{card}(A\cap B)=167$.

【例 4】已知 $M=\{(x,y)\mid y\geqslant x^2\}$，$N=\{(x,y)\mid x^2+(y-a)^2\leqslant 1\}$. 求 $M\cap N=N$ 成立时 a 需满足的充要条件.

解法 1： $M\cap N=N\Leftrightarrow N\subseteq M$.

由 $x^2+(y-a)^2\leqslant 1$

得 $x^2\leqslant y-y^2+(2a-1)y+(1-a^2)$.

于是，

若 $-y^2+(2a-1)y+(1-a^2)\leqslant 0$， ①

必有 $y\geqslant x^2$，即 $N\subseteq M$. 而①成立的条件是

$$y_{\max}=\frac{-4(1-a^2)-(2a-1)^2}{-4}\leqslant 0,$$

即 $4(1-a^2)+(2a-1)^2\leqslant 0$.

解得 $a\geqslant\frac{5}{4}$.

解法 2：如图 1－1－1，M 为抛物线 $y=x^2$ 及其内部的点形成的集合. N 为圆 $x^2+(y-a)^2=1$ 及其内部的点形成的集合，要使 $M\cap N=N$，即 $N\subseteq M$ 成立. 只需圆与抛物线无交点或只有一个交点即可.

$\therefore\begin{cases}y=x^2\\x^2+(y-a)^2=1\end{cases}$联立可得：

$y^2-(2a-1)y+a^2-1=0$

$\Delta=(2a-1)^2-4(a^2-1)\leqslant 0$

解得 $a\geqslant\frac{5}{4}$.

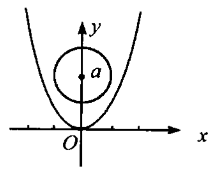

图 1－1－1

评述：可以转化为不等式问题来解决. 也可以运用数形结合思想，根据图形特点将问题转化进而解决.

【例 5】关于实数的不等式 $\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$ 与 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0(a\in\mathbf{R})$ 的解集分别为 A 与 B，求使 $A\subseteq B$ 的 a 的取值范围.

解法 1：由已知，

$A=\{x\,|\,2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$.

设 $f(x)=x^2-3(a+1)x+2(3a+1)$，$A\subseteq B$ 的充分必要条件是 $f(x)=0$ 的根分别在区间 $(-\infty,2a]$ 与 $[a^2+1,+\infty)$，于是

$$\begin{cases}f(2a)=-2a^2+2\leqslant 0,\\f(a^2+1)=(a+1)\cdot a(a-1)(a-3)\leqslant 0,\end{cases}$$

解得 $1\leqslant a\leqslant 3$，或 $a=-1$. 所以 $1\leqslant a\leqslant 3$，或 $a=-1$，

$\therefore a$ 的取值范围是 $\{a\,|\,1\leqslant a\leqslant 3$，或 $a=-1\}$.

解法 2：由已知，$A=\{x\,|\,2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$，所以 $a^2+1\geqslant 2a$ 恒成立，解得 $A\neq\varnothing$.

若 $3a+1\geqslant 2$，

则 $B=\{x\,|\,2\leqslant x\leqslant 3a+1\}$.

若 $3a+1\leqslant 2$，

则 $B=\{x\,|\,3a+1\leqslant x\leqslant 2\}$.

$A\subseteq B$ 的充分必要条件是：

$$\begin{cases}3a+1\geqslant a^2+1\\2a\geqslant 2,\end{cases}\text{或}\begin{cases}a^2+1\leqslant 2,\\3a+1\leqslant 2a,\end{cases}$$

解得 $1\leqslant a\leqslant 3$，或 $a=-1$.

所以 a 的取值范围是 $\{a\mid 1\leqslant a\leqslant 3$，或 $a=-1\}$.

【例 6】a、b、c、d、e 五位顾客去餐馆用餐. a 订的菜是烤羊肉，b 订的菜是炖牛排，c 订的菜是糖醋鱼，d 订的菜是香酥鸡，e 订的菜是炒田螺. 他们坐下后，粗心的服务员送菜时恰巧把 4 个人的菜送错了. 但是，总起来这 5 份菜是没错的. 问：这样送错菜的方法共有多少种？

解：设 $A=\{a$ 得到烤羊肉的五份菜的发放办法$\}$，

$B=\{b$ 得到炖牛排的五份菜的发放办法$\}$，

$C=\{c$ 得到糖醋鱼的五份菜的发放办法$\}$，

$D=\{d$ 得到香酥鸡的五份菜的发放办法$\}$，

$E=\{e$ 得到炒田螺的五份菜的发放办法$\}$，

$U=\{$五份菜的全部发放办法$\}$.

则 $\mathrm{card}(U)=\mathrm{A}_5^5$，$\mathrm{card}(A)=\mathrm{card}(B)=\mathrm{card}(C)=\mathrm{card}(D)=\mathrm{card}(E)=\mathrm{A}_4^4$，$\mathrm{card}(A\cap B)=\mathrm{card}(A\cap C)=\cdots=\mathrm{card}(D\cap E)=\mathrm{A}_3^3$，$\mathrm{card}(A\cap B\cap C)=\mathrm{card}(A\cap B\cap D)=\cdots=\mathrm{card}(C\cap D\cap E)=\mathrm{A}_2^2$，$\mathrm{card}(A\cap B\cap C\cap D)=\mathrm{card}(A\cap B\cap C\cap E)=\cdots=\mathrm{card}(B\cap C\cap D\cap E)=\mathrm{card}(A\cap B\cap C\cap D\cap E)=1$.

问题在于求 $\mathrm{C}_5^1\cdot\mathrm{card}(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D}\cap\overline{E})$.

$\because \mathrm{card}(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D}\cap\overline{E})$

$=\mathrm{card}(A\cap\overline{B\cup C\cup D\cup E})$

$=\mathrm{card}(A\cup B\cup C\cup D\cup E)-\mathrm{card}(B\cup C\cup D\cup E)$

$=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B\cup C\cup D\cup E)-\mathrm{card}[A\cap(B\cup C\cup D\cup E)]-\mathrm{card}(B\cup C\cup D\cup E)$

$=\mathrm{card}(A)-\mathrm{card}[(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(A\cap D)\cup(A\cap E)]$

$=\mathrm{card}(A)-\mathrm{card}(A\cap B)-\mathrm{card}(A\cap C)-\mathrm{card}(A\cap D)-\mathrm{card}(A\cap E)+\mathrm{card}(A\cap B\cap C)+\mathrm{card}(A\cap B\cap D)+\mathrm{card}(A\cap B\cap E)+\mathrm{card}(A\cap C\cap D)+\mathrm{card}(A\cap C\cap E)+\mathrm{card}(A\cap D\cap E)-\mathrm{card}(A\cap B\cap C\cap D)-\mathrm{card}(A\cap B\cap C\cap E)-\mathrm{card}(A\cap C\cap D\cap E)-\mathrm{card}(A\cap B\cap D\cap E)+\mathrm{card}(A\cap B\cap C\cap D\cap E)$

$=\mathrm{A}_4^4-4\mathrm{A}_3^3+6\mathrm{A}_2^2-4\mathrm{A}_1^1+1=9$，

$\therefore \mathrm{C}_5^1\cdot\mathrm{card}(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D}\cap\overline{E})=45$.

这表明送错菜的方法共 45 种.

评述：根据题意，设计一些具有单一性质的集合，列出已知数据，并把问题用集合中元素数目的符号准确地提出来，在此基础上引用有关运算公式计算，这是解本题这类计数问题的一般过程.

求元素个数的问题还有一些较为复杂的题目，请看下述例题.

【例 7】一次会议有 1990 位数学家参加，每人至少有 1327 位合作者. 求证：可以找到

4 位数学家，他们中每两个人都合作过.

分析:从合作工作的角度，容易想到要用容斥原理来解题.

解:记数学家们为 $v_i(i=1,2,\cdots,1990)$，与 v_i 合作过的数学家组成集合 a_i. 任取合作过的两位数学家记为 v_1,v_2，由

$\operatorname{card}(a_1)\geqslant 1327,\operatorname{card}(a_2)\geqslant 1327,\operatorname{card}(a_1\cup a_2)\leqslant 1990,$

得 $\operatorname{card}(a_1\cap a_2)=\operatorname{card}(a_1)+\operatorname{card}(a_2)-\operatorname{card}(a_1\cup a_2)\geqslant 1327\times 2-1990>0.$

从而存在数学家 $v_3\in a_1\cap a_2,v_3\neq v_1,v_3\neq v_2$.

又 $\operatorname{card}(a_1\cap a_2\cap a_3)=\operatorname{card}(a_1\cap a_2)+\operatorname{card}(a_2)-\operatorname{card}((a_1\cap a_2)\cup a_3)\geqslant(1327\times 2-1990)+1327-1990=1.$

从而存在数学家 $v_4\in a_1\cap a_2\cap a_3,v_4\neq v_1,v_4\neq v_2,v_4\neq v_3$，得数学家 v_1,v_2,v_3,v_4 两两合作.

评述:本题的实质是证明 $A_1\cap A_2\cap A_3\neq\varnothing$，通过容斥原理的计算来完成.

【例 8】将与 105 互质的所有正整数从小到大排成数列，求这个数列的第 1000 项.

解:设 $U=\{1,2\cdots,105\},A_3=\{a\mid a\in U,\text{且 }3\mid a\},A_5=\{a\mid a\in U,\text{且 }5\mid a\},A_7=\{a\mid a\in U,\text{且 }7\mid a\}$，则

$$\operatorname{card}(A_3)=\frac{105}{3}=35,\operatorname{card}(A_5)=\frac{105}{5}=21,\operatorname{card}(A_7)=\frac{105}{7}=15,$$

$$\operatorname{card}(A_3\cap A_5)=\frac{105}{3\times 5}=7,\operatorname{card}(A_5\cap A_7)=\frac{105}{5\times 7}=3,\operatorname{card}(A_7\cap A_3)=\frac{105}{3\times 7}=5,$$

$$\operatorname{card}(A_3\cap A_5\cap A_7)=\frac{105}{3\times 5\times 7}=1,$$

$\therefore \operatorname{card}(U)=105.$

在 1 到 105 中，与 105 互质的数有

$\operatorname{card}(\complement_U A_3\cap\complement_U A_5\cap\complement_U A_7)=\operatorname{card}(U)-\operatorname{card}(A_3\cup A_5\cup A_7)=\operatorname{card}(U)-[\operatorname{card}(A_3)+\operatorname{card}(A_5)+\operatorname{card}(A_7)]+[\operatorname{card}(A_3\cap A_5)+\operatorname{card}(A_5\cap A_7)+\operatorname{card}(A_7\cap A_3)]-\operatorname{card}(A_3\cap A_5\cap A_7)=105-(35+21+15)+(7+3+5)-1=48.$

设与 105 互质的正整数按从小到大的顺序排列为 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，则 $a_1=1,a_2=2,a_3=4,\cdots,a_{48}=104,a_{49}=105+1,a_{50}=105+2,a_{51}=105+4,\cdots,a_{96}=105+104,\cdots$

因为 $1000=48\times 20+40$，所以 $a_{1000}=105\times 20+a_{40}$.

由于 $a_{48}=104,a_{47}=103,a_{46}=101,a_{45}=97,a_{44}=94,a_{43}=92,a_{42}=89,a_{41}=88,a_{40}=86$，

所以 $a_{1000}=105\times 20+86=2186$.

【例 9】有 1987 个集合，每个集合有 45 个元素，任意两个集合的并集有 89 个元素，问此 1987 个集合的并集有多少个元素.

解:显然，可以由题设找到这样的 1987 个集合，它们都含有一个公共元素 a，而且每两个集合不含 a 以外的公共元素. 但是，是否仅这一种可能性呢?

由任意两个集合的并集有 89 个元素可知，1987 个集合中的任意两个集合有且仅有一个公共元素，则由抽屉原理容易证明这 1987 个集合中必有一个集合 A 中的元素 a 出现在 A 以外的 45 个集合中，设为 $A_1,A_2,\cdots,A_{45}$，其余的设为 $A_{46},A_{47},\cdots,A_{1987}$.

设 B 为 $A_{46},\cdots,A_{1987}$ 中的任一个集合，且 $a\notin B$，由题设 B 和 $A,A_1,A_2,\cdots,A_{45}$ 都有一个公共元素，且此 46 个元素各不相同，故 B 中有 46 个元素，与题设矛盾，所以这 1987 个集合中均含有 a.

故所求结果为 $1987\times44+1=87429$. 即这 1987 个集合的并集有 87429 个元素.

【例 10】设 S 为集合 $\{1,2,3,\cdots,50\}$ 的具有下列性质的子集：S 中任意两个不同元素之和不被 7 整除. 那么 S 中元素最多可能有多少个？（第四十三届美国中学数学竞赛题）

分析：对于两个不同的自然数 a 与 b，如果要求 $7\nmid(a+b)$，就是要求它们的和被 7 除所得的余数不为 0. 我们把集合 $\{1,2,\cdots,50\}$ 按照其中元素被 7 除所得的余数相同与否进行归类，余数相同的组成一个集合，这样得到 7 个子集，然后从这 7 个子集中适当抽取满足题意的元素组成集合 S.

解：将集合 $A=\{1,2,\cdots,50\}$ 划分为 7 个子集：$A_0,A_1,A_2,\cdots,A_6$，其中 A_i 中的每个元素除以 7 后余数为 $i(i=0,1,2,\cdots,6)$，即

$A_0=\{7,14,21,28,35,42,49\}$,

$A_1=\{1,8,15,22,29,36,43,50\}$,

$A_2=\{2,9,16,23,30,37,44\}$,

$A_3=\{3,10,17,24,31,38,45\}$,

$A_4=\{4,11,18,25,32,39,46\}$,

$A_5=\{5,12,19,26,33,40,47\}$,

$A_6=\{6,13,20,27,34,41,48\}$.

S 最多包含 A_0 的一个元素. 但是，若 S 包含其他任何一个子集的一个元素时，则它必可以包含这个子集的全部元素. 因为 A_1 包含 8 个元素，其他每个子集包含 7 个元素，且 S 不能同时包含 A_1 与 A_6 的元素，或者 A_2 与 A_5 的元素，或者 A_3 与 A_4 的元素. 故最大子集 S 包含 $1+8+7+7=23$ 个元素.

【例 11】设 $U=\{1,2,3,\cdots,2000\}$，$A\subseteq U$，且当 $x\in A$ 时，$16x\notin A$.

求 $\mathrm{card}(A)$ 的最大值.

解：由题设知 k 与 $16k(k=8,9,\cdots,125)$ 两个数中至少有一个不属于 A. 所以 $\mathrm{card}(A)\leqslant2000-(125-8+1)=1882$.

另一方面，设 $B=\{1,2,\cdots,7\}$，$C=\{126,127,\cdots,2000\}$.

$A=B\cup C=\{1,2,\cdots,7\}\cup\{126,127,\cdots,2000\}$.

则 $\mathrm{card}(A)=1882$. 且 A 中没有一个数是另一个数的 16 倍.

∵设 $k\in A$. 若 $k\in B$. 则 $16\leqslant16k\leqslant112$，$16k\notin A$.

若 $k\in C$，则 $16k\geqslant126\times16>2000$，$16k\notin A$.

综合所述，$\mathrm{card}(A)$ 的最大值为 1882.

评述：此题我们先求出一个上界（$\mathrm{card}(A)\leqslant1882$）. 然后再构造一个具体的例子来说明这个上界是可以达到的. 这是处理这类最值问题的常用方法. 在实际解题时，我们往往先通过具体的例子猜出这个上界，然后再设法证明.

【例 12】设 S_n 表示正整数集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一切子集的元素之和（规定空集元素

和为 0). 求 S_{2009}.

解: ∵ S_n 中每个元素在 2^{n-1} 个子集中出现, ∴ $S_n=2^{n-1}(1+2+\cdots+n)$

$=2^{n-2}\cdot n(n+1)$,

∴ $S_{2009}=2^{2007}\cdot 2009\cdot 2010$.

【例 13】 把含有 12 个元素的集合分成 6 个子集,每个子集都含有 2 个元素,有多少种分法?

解法 1: 将 12 个元素排成一列有 12!种方法. 排定后,从左到右每 2 个一组就得到 6 个 2 元子集. 同一组中 2 个元素顺序交换得到的是同一子集. 6 个子集顺序交换得到的是同样的分法,因此共有 $\frac{12!}{6!\cdot 2^6}=10395$ 种不同的分法.

解法 2: 设 a_1 是集合中的一个元素,将 a_1 与其余 11 个元素中的任一个结合,就得含 a_1 的 2 元子集,这种 2 元子集共 11 种.

确定含 a_1 的子集后,设 a_2 是剩下的一个元素,将 a_2 与其余 9 个元素中的任一个结合,就得到含 a_2 的 2 元子集,这种子集共有 9 种.

如此继续下去,得到 6 个 2 元子集,共有 $11\times9\times7\times5\times3=10395$ 种分法.

解法 3: 从 12 个元素中依次取出 2 个元素,得到 6 个符合条件的子集. 共 $C_{12}^2C_{10}^2C_8^2C_6^2C_4^2$ 种不同结果,6 个子集顺序交换得到的是同样的分法.

∴ 共有 $\frac{C_{12}^2C_{10}^2C_8^2C_6^2C_4^2}{A_6^6}=10395$ 种分法.

评述: 用排列、组合或分类讨论的思想解之.

【例 14】 集合 $A=\{x\mid -1\leqslant\log_{\frac{1}{x}}10<-\frac{1}{2},1<x\in\mathbf{N}\}$ 的真子集的个数为________.

解: ∵ $\log_{\frac{1}{x}}10=\frac{1}{\lg\frac{1}{x}}=-\frac{1}{\lg x}$,

∴ $-1\leqslant-\frac{1}{\lg x}<-\frac{1}{2}$, ∴ $10\leqslant x<100$.

又∵ $1<x\in\mathbf{N}$, ∴ A 有 90 个元素, ∴ A 有 $2^{90}-1$ 个真子集.

评述: 熟悉对数运算. 掌握集合子集个数的规律.

【例 15】 已知集合 P 是集合 $M=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2000,x\in\mathbf{N}\}$ 的任一至少含两个元素的子集,令 a_p 是集合 P 中最大数与最小数之和,求所有满足条件的 a_p 的算术平均值.

解: 设 P 是 M 的一个至少含两个元素的子集,则 $P'=\{y\mid y=2001-x,x\in P\}$ 也是 M 的一个至少含两个元素的子集,于是除集合 M 外(M 也是 M 的满足条件的一个子集),集合 M 的满足条件的子集可分为两类:一类是 $P'=P$(例如:若 $P=\{1000,1001\}$,则 $P'=\{1001,1000\}$;若 $P=\{2,4,1997,1999\}$,则 $P'=\{1999,1997,4,2\}$,…);另一类是 $P'\neq P$(例如:$P=\{1,6\}$,则 $P'=\{2000,1995\}$;$P=\{5,8,1995,2000\}$,则 $P'=\{1996,1993,6,1\}$,…). 对于第一类中的每一对子集 P、P',必有 $a_p=a_{p'}=2001$;对于第二类中的每一对子集 P 与 P',必有 $a_p+a_{p'}=2001\times2$. 又集合 M 也有 $a_m=2001$,所以所有满足条件的 a_p 的算术平均值等于 2001.

评述: 集合 M 至少含两个元素的子集共有 $C_{2000}^2+C_{2000}^3+\cdots C_{2000}^{2000}=2^{2000}-2001$ 个,

因此不可能将每个子集 P 的最大数与最小数的和 a_p 一一求出来. 于是我们分析题中的条件,采用分类的方法,求得 $a_p=a_{p'}=2001$,或 $a_p+a_{p'}=2001\times 2$,从而求得所有满足条件的 a_p 的算术平均值是 2001.

赛题演练

A组

1. 用列举法表示集合 $\{u \mid u=\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{z}{|z|}+\frac{xy}{|xy|}+\frac{xyz}{|xyz|}, xyz\neq 0, x、y、z\in\mathbf{R}\}$ $=$________.

2. 已知集合 $M=\{t \mid t^2-5t+6<0\}$, $x=\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{4}}+\frac{1}{\log_{\frac{1}{7}}\frac{1}{4}}$,则 x 与 M 的关系是________.

3. 设 $A=\{x \mid -2\leqslant x\leqslant a\}$, $B=\{y \mid y=2x+3, x\in A\}$, $C=\{z \mid z=x^2, x\in A\}$,且 $C\subseteq B$,则实数 a 的取值的集合是________.

4. 设集合 $A=\{x^2, x+1, -3\}$, $B=\{x-5, 2x-1, x^2+1\}$ 满足 $A\cap B=\{-3\}$,则 x 的值是 ( )

   A. 2　　B. 1　　C. 0　　D. -1

5. 若非空集合 $A=\{x \mid 2a+1\leqslant x\leqslant 3a-5\}$, $B=\{x \mid 3\leqslant x\leqslant 22\}$,则能使 $A\subseteq A\cap B$ 成立的所有 a 的集合是 ( )

   A. $\{a \mid 1\leqslant a\leqslant 9\}$　　B. $\{a \mid 6\leqslant a\leqslant 9\}$　　C. $\{a \mid a\leqslant 9\}$　　D. $\varnothing$

6. 集合 $M=\{u \mid u=12m+8n+4l, m,n,l\in\mathbf{Z}\}$ 与集合 $N=\{u \mid u=20p+16q+12r, p,q,r\in\mathbf{Z}\}$ 的关系为 ( )

   A. $M=N$　　B. $M\not\subseteq N$ 且 $N\not\subseteq M$　　C. $M\subsetneqq N$　　D. $M\supsetneqq N$

7. 设 $S=\{(x,y) \mid y^2-x^2=\text{奇数}, x,y\in\mathbf{R}\}$, $T=\{(x,y) \mid \sin(2\pi x^2)-\sin(2\pi y^2)=\cos(2\pi x^2)-\cos(2\pi y^2), x,y\in\mathbf{R}\}$,则 ( )

   A. $S\subsetneqq T$　　B. $T\subsetneqq S$　　C. $S=T$　　D. $S\cap T=\varnothing$

8. 设 z 为复数, $M=\{z \mid (z-1)^2=|z-1|^2\}$,那么 ( )

   A. $M=\{\text{纯虚数}\}$　　B. $M=\{\text{实数}\}$

   C. $\{\text{实数}\}\subsetneqq M\subsetneqq\{\text{复数}\}$　　D. $M=\{\text{复数}\}$

9. 对于集合 $M=\{x \mid x=3n, n=1,2,3,4\}$, $N=\{x \mid x=3^k, k=1,2,3\}$. 若有集合 S 满足 $M\cap N\subseteq S\subseteq M\cup N$,则这样的 S 有多少个?

B组

10. 设 $U=\{1,2,3,\cdots,1995\}$, $A\subseteq U$,且当 $x\in A$ 时, $19x\notin A$,求 $\mathrm{card}(A)$ 的最大值.

11. 集合$\{1,2,3,\cdots,100\}$的某些子集满足条件：没有一个数是另一个数的 2 倍. 这样的子集中含元素的个数最多是多少个？

12. 设 $S=\{1,2,\cdots,n\}$，A 为至少含有两项的、公差为正的等差数列，其项都在 S 中，且添加 S 的其他元素于 A 后均不能构成与 A 有相同公差的等差数列. 求这种 A 的个数（这里只有两项的数列也看做等差数列）.

二、函数与映射

知 识 概 要

研究自然现象中事物之间的联系，运用函数是一种重要的手段. 函数是一种特殊的映射，它是高中数学，也是高等数学的基础，因此，也是高考和高中数学竞赛的重要内容.

1. 映射

（1）定义：设 X 和 Y 是两个集合（二者可以相同），如果按照某种对应关系 f，对于每个 $x\in X$，都有唯一确定的 $y\in Y$ 与之对应，则称这个对应关系为 X 到 Y 的映射，记为 $f:X\rightarrow Y$ 或 $y=f(x):x\in X\rightarrow y\in Y$. 这时 $y=f(x)\in Y$ 称为 $x\in X$ 的象，而称 x 为 y 的原象.

（2）设 $f(x)$ 为从 X 到 Y 的一个映射.

如果对于任何 $x_1,x_2\in X,x_1\neq x_2$，都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为单射；如果对于任何 $y\in Y$，都有 $x\in X$ 使得 $f(x)=y$，则称 f 为满射；如果映射 f 既为单射又为满射，则称 f 为双射（一一对应）；如果 f 为满射且对任何 $y\in Y$，恰有 X 中的 m 个元素 x_1，$x_2,\cdots,x_m$，使得 $f(x_i)=y,i=1,2,\cdots,m$，则称 f 为（倍数为 m 的）倍数映射.

（3）如果 A,B 都是有限集合，它们的元素个数分别记为 $\mathrm{card}(A)$，$\mathrm{card}(B)$. 对于映射 $f:A\rightarrow B$ 来说，如果 f 是单射，则有 $\mathrm{card}(A)\leqslant\mathrm{card}(B)$；如果 f 是满射，则有 $\mathrm{card}(A)\geqslant\mathrm{card}(B)$；如果 f 是双射，则有 $\mathrm{card}(A)=\mathrm{card}(B)$. 这在计算集合 A 的元素的个数时，有着重要的应用. 即当 $\mathrm{card}(A)$ 比较难求时，我们就找另一个集合 B，建立一一对应 $f:A\rightarrow B$，把 B 的个数数清，就有 $\mathrm{card}(A)=\mathrm{card}(B)$. 这是我们解某些题时常用的方法.

（4）设有限集 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$. f 是 A 到 A 上的映射，记 $f_1(x)=f(x)$，$f_{r+1}(x)=f(f_r(x))$，$(x\in A,r\in\mathbf{N}^*)$，则 f 是一一映射（即双射）的充要条件是：对任意 $a_i\in A$，存在 $m_i\in\mathbf{N}^*$. $1\leqslant m_i\leqslant n$，使得 $f_{m_i}(a_i)=a_i$，而 $f_s(a_i)\neq a_i$ $(s\in\mathbf{N}^*,1\leqslant s\leqslant m_i-$

1).

2. 函数的概念

函数是两个集合之间的一种对应关系 f:在非空数集 A 中任何一个元素通过对应法则 f,在数集 B 中都有唯一的元素与之对应,其中 A 叫做 f 的定义域,A 中元素所对应的象的集合叫做函数 f 的值域.函数的定义域、值域、对应关系是组成函数概念的三要素.

(1)求函数定义域一般要考虑:分母不为零,偶次根式的被开方数非负,一些常用初等函数(如 $y=\tan x$,$y=\log_a x$ 等)的定义域、应用问题中实际意义上的限制等.

(2)函数的值域(最值)的求法

根据函数表达式所给的形式的不同,值域的求法也各不相同.

常用方法有:

①配方法:将所给函数表达式(或隐函数方程)配成若干个平方式及一些常数的代数和的形式,从而求得最值的方法叫做配方法.例如,对于函数 $y=x+\sqrt{1-2x}$,令 $t=\sqrt{1-2x}$,则 $y=-\dfrac{1}{2}(t-1)^2+1$,注意到$t\geqslant 0$,故 $y\leqslant 1$,函数的值域为$(-\infty,1]$.

②单调法:利用函数的单调性求函数值域与最值的方法简称单调法.在利用单调法求解时,应注意其单调区间,注意利用导数研究单调性.

③反函数法:若某函数存在反函数,则可利用互为反函数的两个函数的定义域与值域的互反性,改求反函数的定义域.

④方程法:方程法求函数值域是指利用方程有解的条件求函数值 y 的取值范围的方法,其理论依据是:

定理 1:函数 $y=f(x)$(定义域为 D_f)的值域就是使关于 x 的方程 $f(x)=y$ 有属于 D_f 的解的 y 值的集合.

定理 2:若$\dfrac{f(x)}{g(x)}$是最简有理分式,则函数 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$的值域就是使关于 x 的方程 $y\cdot g(x)=f(x)$有解的 y 值的集合.

⑤换元法:用换元法求函数值域的主要过程是:通过换元,使函数式得到化简(或降维),转化为熟知的函数,求得已知函数的值域.主要有两种常用手段:整体代换和三角代换.

⑥不等式法:利用不等式的性质分析最大与最小及利用常见的重要不等式求函数最值的方法称为不等式法.

(3)求函数解析式常用方法有:代入法、换元法、待定系数法、解方程组法等.

3. 函数的性质:单调性,奇偶性,周期性等

(1)单调性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 X,若对任意 $x_1,x_2\in X$,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$($f(x_1)>f(x_2)$),则称函数 $y=f(x)$在 X 上单调递增(减),单调递增函数和单调递减函数统称为单调函数.

①设 $f(x)$在区间 I_1 和区间 I_2 都是单调递增(减),且 $I_1\cap I_2\neq\varnothing$,则 $f(x)$在 $I_1\cup$