



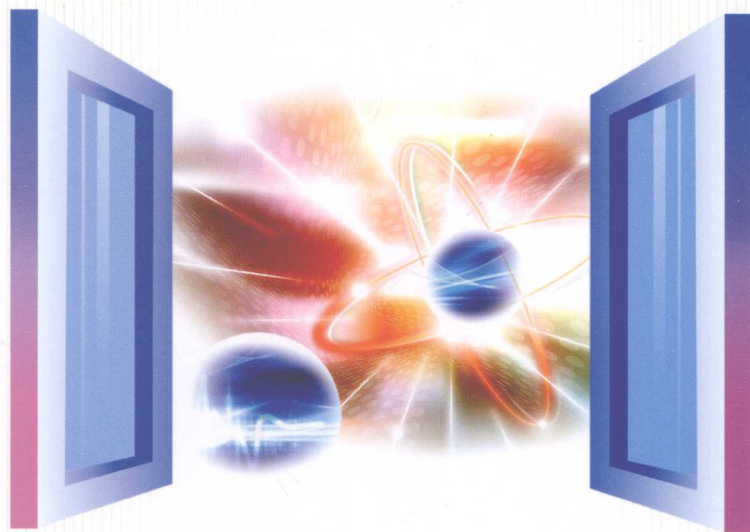
北京理工大学 **211工程**
研究生规划教材

高等光学教程

A Course in Advanced Optics

© 赵达尊 方俊永 编著

光
学
工
程



 北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



北京理工大学 211 工程
研究生规划教材

高等光学教程

光
学
工
程

A Course in Advanced Optics

© 赵达尊 方俊永 编著



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本教程按照光的电磁波理论,着重讨论光波在晶体中的传播规律与晶体光学特性之间的关系以及晶体的光学特性与外加电场、磁场、声波场等因素之间的关系,并在此基础上较具体地介绍了电光效应、磁光效应、声光效应以及如何利用这些效应实现对光波的振幅(强度)、相位、频率、偏振态和传播方向等参数的控制和调制。

本教程可用作高等学校工科类光学专业研究生的教材,也可供相关专业教师和工程技术人员参考。

版权专有 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

高等光学教程 / 赵达尊, 方俊永编著. —北京: 北京理工大学出版社,
2009. 8

北京理工大学“211工程”研究生规划教材. 光学工程
ISBN 978-7-5640-2299-0

I. 高… II. ①赵… ②方… III. 光学-研究生-教材 IV. O43

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第091463号

出版发行 / 北京理工大学出版社

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街5号

邮 编 / 100081

电 话 / (010) 68914775(办公室) 68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京地质印刷厂

开 本 / 787毫米×960毫米 1/16

印 张 / 15.25

字 数 / 308千字

版 次 / 2009年8月第1版 2009年8月第1次印刷

印 数 / 1~3000册

定 价 / 29.00元

责任校对 / 陈玉梅

责任印制 / 边心超

图书出现印装质量问题,本社负责调换

前 言

本教程是作为光学工程学科有关专业硕士研究生学位课程《高等光学》的教材编写的，要求学生已经具备物理光学（波动光学）、几何光学和理工科大学水平数学的知识。

《高等光学》的内涵十分广泛，本教程限于在线性光学范围内对波动光学的进一步讨论，目的是为研究生提供更深入的光学理论基础，使他们了解现代光学技术中各种常用光控制和光调制方法的原理和实施途径，并初步掌握相关光学系统的设计思路。因此本教程的重点一方面是对电磁场和电磁波理论的较为严密和详细的论述；另一方面是对用于实现光控制和光调制的介质（大多为各向异性介质）的光学特性及其应用作较为具体的介绍和分析。

本教程共分四章，第一章为电磁场和电磁波，介绍光的电磁理论基础，从 Maxwell 方程和物质方程出发，阐述光在介质中传播的基本规律，并引入 Jones 矢量和 Jones 矩阵来讨论光的偏振态描述。第二章为晶体光学，主要内容是介绍光波在各向异性介质中的传播规律及其应用，重点是各向异性介质中单色平面波的基本光学性质及特点，并讨论了旋光现象和磁光效应，描述了波片的原理和功能。第三章为电光效应，介绍介质在电场影响下其光学性质的改变，以及利用一次电光效应和二次电光效应所实现的多种电光调制。第四章为声光效应，介绍弹光效应和声光作用的基本原理，并举例说明了声光调制的各种应用。

作 者

目 录

| | |
|----------------------------------|-----|
| 第一章 电磁场和电磁波 | 1 |
| §1.1 Maxwell 方程 | 1 |
| §1.2 物质方程 | 6 |
| §1.3 界面边界条件..... | 12 |
| §1.4 电磁波的能量和能流..... | 14 |
| §1.5 均匀、透明各向同性介质中的电磁波..... | 17 |
| §1.6 单色平面波的偏振态和 Jones 矢量表示..... | 38 |
| 第二章 晶体光学 | 48 |
| §2.1 晶体光学性质的数学描述..... | 48 |
| §2.2 晶体中的单色平面波..... | 57 |
| §2.3 各向异性介质光学性质的其他几何表示..... | 72 |
| §2.4 晶体的对称性和分类..... | 77 |
| §2.5 单轴晶体及其中单色平面光波的特点..... | 87 |
| §2.6 双轴晶体中一些特殊方向的单色平面波..... | 92 |
| §2.7 光波在晶体界面上的折射和反射..... | 96 |
| §2.8 旋光 (Optical Activity) | 101 |
| §2.9 磁光效应 (磁致旋光) | 109 |
| §2.10 波片、偏振器及 Jones 矩阵..... | 119 |
| 第三章 电光效应 | 148 |
| §3.1 基础理论 | 148 |
| §3.2 两种典型晶体的一次电光效应..... | 165 |
| §3.3 二次电光效应..... | 172 |
| §3.4 电光调制 | 173 |
| 第四章 声光效应 | 181 |
| § 4.1 概述 | 181 |
| § 4.2 弹光效应的数学描述..... | 182 |
| § 4.3 声光作用 1: Bragg 衍射..... | 189 |

| | |
|-----------------------------------|-----|
| § 4.4 声光作用 2: Raman-Nath 衍射 | 202 |
| § 4.5 声光作用 3: 表面声波衍射简介 | 212 |
| § 4.6 声光效应应用的有关特性参数 | 216 |
| 习题 | 233 |
| 参考文献 | 237 |

第一章 电磁场和电磁波

人们对光本性的了解经历了曲折而逐步深入的过程，曾存在光的波动学说和微粒学说之争，经过多年的研究和实验验证，认为光是运动的电磁场，具有波和粒子的二重性表现，称为光的二象性。

Maxwell 电磁场理论的建立，为光的波动性质提供了有力的理论根据，一方面，“波动光学”范畴内的所有现象和规律都可在此基础上展开讨论。另一方面，作为“量子光学”理论基础的“量子电动力学”也是对电磁场作量子化的产物。因此，应该说电磁场理论是光学的重要理论基础。

本章以光的电磁理论为基础，从 Maxwell 方程和物质方程出发，阐述光在各向同性介质中传播的基本规律，并讨论光的偏振态描述，引入了 Jones 矢量，为后续章节讨论光在各向异性介质中的传播作准备。

§1.1 Maxwell 方程

Maxwell 将电磁学规律总结概括成 Maxwell 方程的形式，指明了电场与磁场变化的相互依赖关系，进而结合物质方程证明了变化着的电磁场是以波动即电磁波的形式存在的。由于从该理论导出的以及由测量获得的电磁波传播速度都恰好等于用光学方法测得的光速，使人们接受了光是一种电磁波的论断。此后 Maxwell 方程和物质方程便成为研究光波动特性的基本方程。

1.1.1 Maxwell 方程微分形式

Maxwell 方程由 4 个公式组成，故也可称为 Maxwell 方程组。这些公式有积分和微分两种形式。这两种形式可以通过 Gauss-Green 定理和 Stokes 定理互相转换，因而它们在数学上是等价的。本教程主要应用 Maxwell 方程的微分形式，在国际单位制 (SI) 下，其表达式为：

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1-3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1-4)$$

1.1.2 有关物理量及定义

Maxwell 方程中涉及的有关物理量主要有 E , D , B , H , J 和 ρ 等, 其具体名称和定义为:

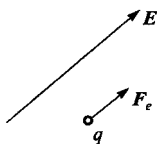


图 1-1 电场强度矢量定义

$E(\mathbf{r}, t)$ 是电场强度矢量, 简称电矢量或电场。它是一个随考察点空间位置矢量 \mathbf{r} 和时间 t 变化的矢量场, 其大小和方向由电场对物质内单位电荷的作用力定义, 具体形式为: $E = F_e/q$ 。式中 q 为电荷量, F_e 为该电荷所受的电场力, 见图 1-1。显然该定义强调了电场对物质的作用。

$D(\mathbf{r}, t)$ 是电通密度矢量, 亦称电位移矢量。它也是一个随 \mathbf{r} 和 t 变化的矢量场, 其定义式为

$$D = \epsilon_0 E + P$$

式中, $\epsilon_0 = 8.854188 \times 10^{-12} \text{ F/m}$, 是一个普适量, 称作真空介电常数, P 是介质的电极化强度矢量, 在 1.2.1 中 1 节将另有说明。该定义表明, D 虽然也是一个描述电场的量, 但同时显含了介质的特性。

$B(\mathbf{r}, t)$ 是磁通密度矢量, 亦称磁感应矢量, 它也是一个随 \mathbf{r} 和 t 变化的矢量场, 其定义是:

$$\begin{cases} \text{大小: } B = \frac{F_{m\max}}{qv} \\ \text{方向: } B, F_{m\max}, b \text{ 构成正交右手系} \end{cases}$$

该定义的含义如下: 实验发现, B 场中的运动电荷 q 将受到场的作用力 F_m (磁场力, 又称 Lorentz 力), F_m 的大小 F_m 不仅正比于 q 和运动速度 v 的大小 v , 而且还与 v 的方向有关。如图 1-2 所示, 若 q, v 一定, 设 v 取某一特定方向 b 时 F_m 达最大值, 则定义式中的 $F_{m\max}$ 即此时的 F_m 。对于这样定义的 B , 沿一般方向 v 运动的电荷 q 所受的力可由下式表示:

$$F_m = qv \times B$$

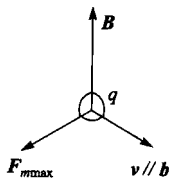


图 1-2 磁通密度矢量定义

$H(\mathbf{r}, t)$ 是磁场强度矢量, 简称磁矢量。它也是一个随 \mathbf{r} 和 t 变化的矢量场, 其定义式为 $H = B/\mu_0 - M$, 式中 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/M}$, 是一个普适量, 称为“真空磁导率”, M 是介质的“磁化强度矢量”, 在 1.2.1 中 2 节将另有说明。 H 虽然也是一个描述磁场的量, 但显含了介质的特性。

$J(\mathbf{r}, t)$ 是电流密度矢量, 用于描述介质中电流的分布, 定义其方向为 (正) 电荷流动的方向, 其大小为通过一个垂直于 J 方向的单位面积的电流。对于这样定义的 J , 通过介质内任一曲面 σ 的电流 $I = \iint_{\sigma} J \cdot d\sigma$ 。

$\rho(\mathbf{r}, t)$ 是体电荷密度, 它是一个标量, 用于描述介质中电荷 q 的分布, 其定义为介质中单位体积内的电荷, 定义式为: $\rho = dq/d\tau$, 其中 τ 为体积。

上述各物理量都是空间和时间的函数, 但一般情况下可略去 (\mathbf{r}, t) 不写, 仅以 \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{H} 等表示。

1.1.3 有关物理量的单位

采用不同单位制度时, 各物理量的单位不仅大小不同, 量纲也可能不同, 造成 Maxwell 方程中各项前的系数也可能不同。

按照我国国家标准 GB 3100~3102<量和单位>, 本教程一律采用国际单位制 (简称 SI)。SI 单位包括基本单位、导出单位和它们的倍数单位。SI 属一贯单位制, 即其中用基本单位表示的导出单位表达式中不会出现非 1 的数字系数。

根据 Maxwell 方程或有关物理量的定义, 可以求出各物理量的基本单位及其导出单位, 如表 1-1 所示。其中以 “[X]” 表示物理量 X 的单位 (用正体字母表示), 以 “ \equiv ” 表示“定义”, 以“依据”表示获得单位表达式的依据或附加说明。

表 1-1 有关物理量的单位

| 物理量单位 | 基本单位表达式 | 导出单位表达式 |
|--|---|---|
| $[E] = \text{NC}^{-1}$ 依据: $\mathbf{E} \equiv \mathbf{F}_e/q$, $[\mathbf{F}_e] = \text{N}$, $[q] = \text{C}$ | $\text{m} \cdot \text{kg}/\text{s}^2 \cdot \text{A}$ 依据: $[\mathbf{F}] = \text{N}$, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, $1 \text{N} = 1 \text{m} \cdot \text{kg}/\text{s}^2$; $[q] = \text{C}$, $q = \int I dt$, $1 \text{C} = 1 \text{sA}$ | N/C 或 V/m 依据: $[U] = \text{V}$, $U = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$, $1 \text{V} = 1 \text{m}^2 \cdot \text{kg}/\text{s}^3 \cdot \text{A}$ |
| $[\rho] = \text{C}/\text{m}^3$ 依据: $\rho \equiv dq/d\tau$ | $\text{m}^{-3} \cdot \text{s} \cdot \text{A}$ | C/m^3 (C 也是电通量 ψ 的单位) |
| $[D] = [\rho] \text{m}$ 依据: $\nabla \cdot \mathbf{D} \equiv \rho$ | $\text{m}^{-2} \cdot \text{s} \cdot \text{A}$ | C/m^2 |
| $[B] = \text{N/C} \cdot \text{ms}^{-1}$ 依据: $B \equiv \frac{F_{m \max}}{qv}$ | $\text{kg}/\text{s}^2 \cdot \text{A}$ | T (Tesla) 或 Wb/m^2 $1 \text{T} = 1 \text{Wb}/\text{m}^2$ [Wb (Weber) 是磁通量 Φ_m 的单位] 依据: $[\Phi_m] = \text{Wb}$, $\Phi_m \equiv \int \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$, $1 \text{Wb} = 1 \text{m}^2 \cdot \text{kg}/\text{s}^2 \cdot \text{A}^1$ |

续表

| 物理量单位 | 基本单位表达式 | 导出单位表达式 |
|--|-----------|---------|
| $[J]=[I]m^{-2}$ 依据: $I \equiv \iint_{\sigma} \mathbf{J} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ | $m^{-2}A$ | |
| $[H]=[J]m$ 或 $[D]ms^{-1}$ 依据: $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ | $m^{-1}A$ | N/Wb |
| 注:表中 \mathbf{F} 为力矢量; \mathbf{a} 为加速度矢量; U 为电位; τ 为体积; $d\mathbf{l}$ 为一曲线上的微分长度矢量; $d\boldsymbol{\sigma}$ 为一曲面上的微分面积矢量。 | | |

表 1-1 中示出了如何利用物理公式或物理量的定义式导出物理量的基本单位以及导出单位与基本单位的关系。此方法可以推广到任意物理量单位的求取。

例 1 电容(量) C , $[C]=F$ (法拉), 由 $C=q/U \Rightarrow 1F=1C/V=1 m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$ 。

例 2 电感(量) L , $[L]=H$ (亨利), 由 $U=LdI/dt \Rightarrow 1H=1VsA^{-1}=1 m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$ 。

例 3 介电常数 ϵ , 由 $\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E} \Rightarrow [\epsilon]=[D]/[E]=m^{-3} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$ 。

例 4 磁导率 μ , 由 $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H} \Rightarrow [\mu]=[B]/[H]=m \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$ 。

1.1.4 ∇ 算符及散度 $\nabla \cdot$ 和旋度 $\nabla \times$

在 Maxwell 方程组中出现的 ∇ 算符, 称为 Hamilton 算符 (或 Nepla), 其定义为:

$$\nabla \equiv \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \quad (1-5)$$

式中, \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} 为直角坐标系 $x-y-z$ 的 x , y , z 轴单位矢量。

从 ∇ 算符的定义可以看出 ∇ 同时具有微分(求导)和矢量的性质, 可以先按“矢量”计算, 再按求导计算。 ∇ 具有长度倒数的量纲 (m^{-1}), 作用于一个“场”分布时, 将描述这个场的空间变化。

Hamilton 算符 ∇ 作用于标量场 $\varphi(x, y, z)$ 时, 即为梯度运算 $\nabla\varphi(x, y, z)$:

$$\nabla\varphi(x, y, z) = \hat{x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

式中, $\nabla\varphi$ 为矢量场, 其方向表示 (x, y, z) 点处 φ 增大最快的方向, 其大小表示该方向上 φ 的空间变化率。

Hamilton 算符 ∇ 作用于矢量场时有两种情况, 分别为散度 ($\nabla \cdot$) 和旋度 ($\nabla \times$) 运算。假设矢量场为 $\mathbf{A}(x, y, z)$, 则其散度为:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{A} &= \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (\hat{x} A_x + \hat{y} A_y + \hat{z} A_z) \\
 &= \hat{x} \cdot \hat{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \hat{x} \cdot \hat{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \hat{x} \cdot \hat{z} \frac{\partial A_z}{\partial x} + \hat{y} \cdot \hat{x} \frac{\partial A_x}{\partial y} + \hat{y} \cdot \hat{y} \frac{\partial A_y}{\partial y} + \hat{y} \cdot \hat{z} \frac{\partial A_z}{\partial y} + \\
 &\quad \hat{z} \cdot \hat{x} \frac{\partial A_x}{\partial z} + \hat{z} \cdot \hat{y} \frac{\partial A_y}{\partial z} + \hat{z} \cdot \hat{z} \frac{\partial A_z}{\partial z} \\
 &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{1-6}$$

可见, $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 为标量, 其单位为 $[A]m^{-1}$, 而且一般仍为 x, y, z 的函数。

散度的意义可作如下理解, 在考察点 (x, y, z) 附近取一个表面为 σ 的小体积 τ (见图 1-3), 根据 Gauss-Green 定理:

$$\iiint_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{A} d\tau = \oiint_{\sigma} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

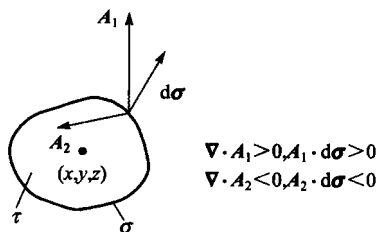


图 1-3 散度的含义

可见, 若考察点处 $\nabla \cdot \mathbf{A} > 0$, 则周围 σ 面上各点的 \mathbf{A} 与 $d\boldsymbol{\sigma}$ 的点乘积分大于 0, 说明与 $d\boldsymbol{\sigma}$ 的夹角小于 90° 的 \mathbf{A} (如图中的 A_1) 对积分贡献较大。总的来说, 有 \mathbf{A} 通过表面 σ 向外“流出”, 所以说, τ 内有 \mathbf{A} 的“源”; 反之, 若 $\nabla \cdot \mathbf{A} < 0$, 则对积分的主要贡献来自与 $d\boldsymbol{\sigma}$ 的夹角大于 90° 的 \mathbf{A} (如图中的 A_2)。总的来说, 场 \mathbf{A} 是通过 σ “流入” τ 的, 这流入的 \mathbf{A} 将在 τ 内“漏”失或“吸收”。所以通常称 (x, y, z) 点是场 \mathbf{A} 的“源” (若 $\nabla \cdot \mathbf{A} > 0$) 或“漏” (若 $\nabla \cdot \mathbf{A} < 0$)。

总之, 散度 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 表示空间点 (x, y, z) 处 \mathbf{A} 场的“发散” (当 $\nabla \cdot \mathbf{A} < 0$ 时是“负发散”, 即“会聚”) 程度。

Maxwell 方程组的 (1-3) 式 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ 表明, 若空间某点存在正电荷, 则 $\nabla \cdot \mathbf{D} > 0$, 所以正电荷会往外发散 \mathbf{D} 场; 若空间某点存在负电荷, 则 $\nabla \cdot \mathbf{D} < 0$, 所以负电荷会吸收 \mathbf{D} 场。换言之, 该式所表达的意义是, 电荷是产生 \mathbf{D} 场的一种“源” (包括正的或负的)。

Maxwell 方程组的 (1-4) 式 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 所表达的意义是不存在独立的正“磁荷”或负“磁荷”。

矢量场 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 的旋度为:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \hat{x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \tag{1-7}$$

可见, $\nabla \times \mathbf{A}$ 是矢量, 其单位为 $[A]m^{-1}$, 一般仍为 x, y, z 的函数。

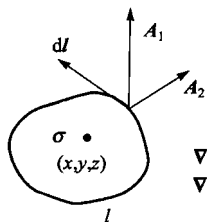


图 1-4 旋度的含义

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A}_1 > 0, \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l} > 0 \\ \nabla \times \mathbf{A}_2 < 0, \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{l} < 0 \end{aligned}$$

旋度的意义可以这样理解: 在考察点 (x, y, z) 附近取一个周边为 l 的小面积 σ (见图 1-4), 根据 Stokes 定理:

$$\oiint_{\sigma} \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

可见, 若考察点处 $\nabla \times \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} > 0$, 则周边曲线 l 上各点的 \mathbf{A} 沿 l 的封闭积分大于 0, 说明与 $d\mathbf{l}$ 的夹角小于 90° 的 \mathbf{A} (如图中的 \mathbf{A}_1) 对积分贡献较大, 总的来说, l 上各点的 \mathbf{A} 在 $d\mathbf{l}$ 方向上有正的分量, 由于各个 $d\mathbf{l}$ 的方向具有旋转特性, 所以考察点周围的 \mathbf{A} 场也有相同方向的旋转性。类似地, 当考察点处 $\nabla \times \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} < 0$ 时, 也仍可说明周边 l 上 \mathbf{A} 场 (如图中的 \mathbf{A}_2) 的旋转性, 只是旋转方向将与 $d\mathbf{l}$ 的相反。

本章中还用到算符 ∇^2 (有时也表示为 Δ), 其名称为 Laplace 算符, 定义式如下:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

1.1.5 Maxwell 方程的物理含义

(1-1) 式即是 Faraday 电磁感应定律, 说明 \mathbf{B} 随 t 变化将产生 $\nabla \times \mathbf{E}$, 或者简单地说, 变化的磁场能够产生电场。

(1-2) 式是 Maxwell 在 Ampere 环路定律 ($\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$) 的基础上增加了 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ 项而生成的公式, 以表明磁场 $\nabla \times \mathbf{H}$ 不仅可以由电流 \mathbf{J} 产生, 也可以由变化的 \mathbf{D} 场产生。这样, 当其中 $\mathbf{H}(\mathbf{B})$ 也随 t 变化时, 电场和磁场就可以互相产生, 形成可独立传播的电磁场。只要最初产生了变化的电场或磁场, 电磁场可以不再需要借助任何电荷或电流而传播。

(1-3) 式即是介质中的 Gauss 定理, 说明电荷能够产生 \mathbf{D} 场, 电荷是 \mathbf{D} 场的源。

(1-4) 式说明 \mathbf{B} 场无“源”, 即没有单独的磁荷存在。

§1.2 物质方程

电磁波涉及四个矢量场 $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}$ 。其中 \mathbf{E} 和 \mathbf{D} 描述电场, \mathbf{H} 和 \mathbf{B} 描述磁场。在真空中只需 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 即可完整描述电磁场。但在物质介质中, 为反映电磁场与物质 (静止或运动的电荷) 的相互作用, 还需 \mathbf{D} 和 \mathbf{B} 。

场对物质的作用可由其对物质中带电粒子的作用力体现, 而物质对场的作用则体现在: 对于不同的物质, 同样的 \mathbf{E}, \mathbf{H} 场会导致不同的 \mathbf{D}, \mathbf{B} 场。换言之, \mathbf{D} 与 \mathbf{E} 的关系以及 \mathbf{B}

与 \mathbf{H} 的关系与物质性质有关, 这种关系称为“物质方程”, 是基于实验建立的。为了求解电磁波在介质中传播时其四个矢量场随空间和时间变化的具体函数形式, 除了需要利用 Maxwell 方程, 还需利用物质方程和边界条件 (即边界两侧场矢量的关系)。不难理解, 各向同性介质与各向异性介质的物质方程是有区别的, 下面分别介绍。

1.2.1 各向同性介质的物质方程

1. \mathbf{D} 与 \mathbf{E} 的关系——关于电场的物质方程

按定义:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (1-8)$$

式中, ϵ_0 为真空介电常数; \mathbf{P} 为介质的电极化强度矢量, 其含义是电场在介质单位体积内产生的电偶极矩总和, 它反映了 \mathbf{E} 对物质的极化作用, 而 (1-8) 又反映了 \mathbf{P} 对电场量 \mathbf{D} 的作用。

实验表明, 各向同性介质中的电极化强度矢量 \mathbf{P} 与 \mathbf{E} 有如下一般关系:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 (\chi_1 \mathbf{E} + \chi_2 \mathbf{E}^2 + \chi_3 \mathbf{E}^3 + \dots) \mathbf{E} / E \quad (1-9)$$

式中, E 为 \mathbf{E} 的大小; χ_1, χ_2 等称为介质的线性、二次等电极化率。本教程讨论涉及的介质和光波电场强度 E 都能满足不等式 $\chi_1 E \gg \chi_2 E^2, \chi_3 E^3, \dots$, 这时, 在足够的精度下, (1-9) 式可以写成:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} \quad (1-10)$$

式中, χ 即 (1-9) 式中 χ_1 的简写。

凡在满足 (1-10) 式所示的 \mathbf{P} (\mathbf{P} 的大小) 与 \mathbf{E} 呈线性关系的前提下对光学现象的讨论都属于“线性光学”范畴。

将 (1-10) 式代入 (1-8) 式, 便得到各向同性介质中 \mathbf{D} 与 \mathbf{E} 的关系式:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1-11)$$

其中:

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi) = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (1-12)$$

式中, ϵ 为介质的介电常数; $\epsilon_r = 1 + \chi$ 为介质的相对介电常数; χ 可简称为电极化率。在各向同性介质中, 它们都是标量, 并且一般地说它们的值可能随空间位置 \mathbf{r} 、时间 t 和光波电场 \mathbf{E} 的振动频率变化。不过如果除电磁波之外, 介质不受到其他的外界作用, 它们不会随时间 t 变化, 这时称介质是“稳定”的。

(1-11) 式表明, 在各向同性介质中 \mathbf{D} 与 \mathbf{E} 总是同方向的。

2. B 与 H 的关系——关于磁场的物质方程

与上一小节的分析类似，按照 H 的定义和实验， B 与 H 的关系如 (1-13) 式所示：

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \kappa \mathbf{H} = \mu_0 (1 + \kappa) \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \quad (1-13)$$

式中， M 是磁化强度矢量，其含义是磁场在介质单位体积内产生的磁（偶极）矩，反映了 H 对介质的作用；而 (1-13) 式中的 $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}$ 又反映了 M 对 B 的作用； μ_0 是真空磁导率； κ 是介质磁化率 ($\mathbf{M} = \kappa \mathbf{H}$)； μ 是介质磁导率。

介质磁导率 μ 与真空磁导率 μ_0 和介质磁化率 κ 的关系为：

$$\mu = \mu_0 (1 + \kappa) \quad (1-14)$$

本教程主要讨论透明介质，包括晶体在内，它们都是非磁性介质，其磁化率 $\kappa = 0$ 或很小，即 M 几乎等于 0。这时磁场物质方程可写为：

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (1-15)$$

也即， B 与 H 之间有确定的比例关系，而且它们的方向总是一致的。

1.2.2 各向异性介质（晶体）的物质方程

1. 电场物质方程和介电常数张量 $\vec{\epsilon}$

按照定义，不论介质为各向同性还是各向异性，(1-8) 式总是成立。但 (1-10) 式 $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$ 仅适用于各向同性介质，对于各向异性介质，它变为：

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \vec{\chi} \cdot \mathbf{E} \quad (1-16)$$

式中， $\vec{\chi}$ 是一个 3×3 的二阶张量，称为电极化率张量，它共有 $3 \times 3 = 9$ 个“分量”或“元素”。

在参与运算时，二阶张量可以用一个矩阵表示，如 3×3 的 $\vec{\chi}$ 可写成：

$$\vec{\chi} = \begin{bmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{bmatrix} \quad (1-17)$$

式中， χ_{xx} 等即为 $\vec{\chi}$ 的分量或元素。这时参与运算的其他张量或矢量（一阶张量）也应该用“矩阵”表示，例如将矢量 \mathbf{E} 和 \mathbf{P} 表示成 3×1 的“列矩阵”，而标量则保持不变。这时，张量的运算规则与矩阵的运算规则相同，例如 (1-16) 式（注意该式中 $\vec{\chi}$ 与 \mathbf{E} 之间的点乘符号）可写成：

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (1-18)$$

即:

$$P_k = \epsilon_0 \sum_{l=x,y,z} \chi_{kl} E_l \quad (k = x, y, z) \quad (1-19)$$

类似于矢量可以用“基矢量”的线性叠加表示(例如 $E = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z}$, 其中 \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} 为三个坐标轴方向上的单位矢量, 称为基矢量), 张量也可表示为一组“基张量”的线性叠加。此时:

$$\vec{\chi} = \chi_{xx} \hat{x}\hat{x} + \chi_{xy} \hat{x}\hat{y} + \chi_{xz} \hat{x}\hat{z} + \cdots + \chi_{yx} \hat{y}\hat{x} + \chi_{yy} \hat{y}\hat{y} + \chi_{yz} \hat{y}\hat{z} + \cdots + \chi_{zx} \hat{z}\hat{x} + \chi_{zy} \hat{z}\hat{y} + \chi_{zz} \hat{z}\hat{z} \quad (1-20)$$

式中, $\hat{x}\hat{x}$, $\hat{x}\hat{y}$ 等称为“基张量”, 它们分别是基矢量 \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} 与基矢量 \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} 的“并矢”。两个矢量 A 与 B 的并矢可写成 AB (注意两矢量间无任何运算符号), 它是一个二阶张量, 其分量 $(AB)_{kl} = A_k B_l$ ($k, l = x, y, z$), 所以有 $\hat{x}\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\hat{x}\hat{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 等等, 可见它们确实

为 3×3 二阶张量的“基张量”, 使得 (1-17) 式与 (1-20) 式的描述是等价的。当张量以“并矢”形式参与运算时, 可以运用结合律。例如“并矢” AB 与矢量 C 的“点乘”:

$$(AB) \cdot C = A(B \cdot C) \quad C \cdot (AB) = (C \cdot A)B \quad (1-21)$$

这样 (1-16) 式可作如下运算 (注意到 $\hat{x} \cdot \hat{x} = 1, \hat{x} \cdot \hat{y} = 0$ 等):

$$\begin{aligned} P &= \epsilon_0 \vec{\chi} \cdot E \\ &= \epsilon_0 (\chi_{xx} \hat{x}\hat{x} + \chi_{xy} \hat{x}\hat{y} + \chi_{xz} \hat{x}\hat{z} + \cdots + \chi_{yx} \hat{y}\hat{x} + \chi_{yy} \hat{y}\hat{y} + \chi_{yz} \hat{y}\hat{z} + \cdots + \chi_{zx} \hat{z}\hat{x} + \chi_{zy} \hat{z}\hat{y} + \chi_{zz} \hat{z}\hat{z}) \cdot (E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z}) \\ &= \epsilon_0 (\chi_{xx} E_x + \chi_{xy} E_y + \chi_{xz} E_z) \hat{x} + \epsilon_0 (\chi_{yx} E_x + \chi_{yy} E_y + \chi_{yz} E_z) \hat{y} + \\ &\quad \epsilon_0 (\chi_{zx} E_x + \chi_{zy} E_y + \chi_{zz} E_z) \hat{z} \end{aligned} \quad (1-22)$$

从而得到与 (1-19) 式相同的 $P_k = \epsilon_0 \sum_{l=x,y,z} \chi_{kl} E_l$, $k = x, y, z$ 。

(1-19) 式表明, 在一般情形下, $P_x : P_y : P_z \neq E_x : E_y : E_z$, 也即一般 P 不再与 E 平行, 这是各向异性介质与各向同性介质 [其中 $P \parallel E$, 见 (1-9) 式] 的一个根本区别。

由 (1-16) 式和 (1-8) 式, 得到晶体中电场物质方程的形式为:

$$D = \epsilon_0 E + \epsilon_0 \vec{\chi} \cdot E = \epsilon_0 (\hat{I} + \vec{\chi}) \cdot E = \vec{\epsilon} \cdot E \quad (1-23)$$

式中, \hat{I} 为单位矩阵 (张量), 其矩阵及代数表达式为:

$$\hat{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z} \quad (1-24)$$

由上述张量运算法则易证, $\hat{I} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E}$ 。

$\vec{\epsilon}$ 称为“介电常数张量”, 其定义式为:

$$\vec{\epsilon} \equiv \epsilon_0 (\hat{I} + \vec{\chi}) \quad (1-25)$$

也可定义相对介电常数张量 $\vec{\epsilon}_r = \vec{\epsilon} / \epsilon_0$, 相应地, 物质方程可写为:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \vec{\epsilon}_r \cdot \mathbf{E} \quad (1-26)$$

各向同性介质中因为 ϵ 是常数标量, 故 \mathbf{D} 与 \mathbf{E} 总是方向相同, 且比值 D/E 与 \mathbf{E} 的方向无关。但在各向异性介质中, 因为 $\vec{\epsilon}$ 是张量, 故 \mathbf{D} , \mathbf{E} 不一定同向, 且比值 D/E 与 \mathbf{E} 的方向有关。

例如, 当 $\mathbf{E} = [1, 0, 0]^T$ 时, $\mathbf{D} = [\epsilon_{xx}, \epsilon_{yx}, \epsilon_{zx}]^T$, $D/E = \sqrt{\epsilon_{xx}^2 + \epsilon_{yx}^2 + \epsilon_{zx}^2}$, 而当 $\mathbf{E} = [0, 1, 0]^T$ 时, $\mathbf{D} = [\epsilon_{xy}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zy}]^T$, $D/E = \sqrt{\epsilon_{xy}^2 + \epsilon_{yy}^2 + \epsilon_{zy}^2}$ 。

$\vec{\chi}$ 的一个重要特性是, 对于任何晶体, 它总是一个“对称张量”。对于 $\vec{\chi}$ 这样的 3×3 二阶张量而言, “对称张量”是指, 其分量 $\chi_{kl} = \chi_{lk}$, ($k, l = x, y, z$)。当张量用矩阵形式表示时, 对称张量意味着相应的矩阵是对称的, 即 $[\vec{\chi}]^T = [\vec{\chi}]$, 这一结论来源于实验。

实验表明, 任何晶体都至少存在一组三个互相正交的方位, 当电场 \mathbf{E} (或电通密度矢量 \mathbf{D}) 平行于上述三个方位中的任一方位时, 必定有 \mathbf{D} 平行 \mathbf{E} 。这三个互相正交的方位称为晶体的“主轴方位”。如果一个三维正交坐标系 $x_0 - y_0 - z_0$ 的三个轴分别平行于三个主轴方位, 则称该坐标系为晶体的“主轴坐标系”, 简称“主轴系” (通常取右手坐标系)。这样, 联系到 (1-16) 式及其物理含义, 便可证明张量 $\vec{\chi}$ 的对称性。

如前所述, (1-16) 式中的 \mathbf{P} 是电场 \mathbf{E} 在介质中产生的电极化强度矢量。用 (1-18) 式所示的分量形式表示 \mathbf{P} 与 \mathbf{E} 的关系, 有:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon_0} P_x &= \chi_{xx} E_x + \chi_{xy} E_y + \chi_{xz} E_z \\ \frac{1}{\epsilon_0} P_y &= \chi_{yx} E_x + \chi_{yy} E_y + \chi_{yz} E_z \\ \frac{1}{\epsilon_0} P_z &= \chi_{zx} E_x + \chi_{zy} E_y + \chi_{zz} E_z \end{aligned} \quad (1-27)$$

这组等式表明, \mathbf{E} 的任一个分量都可能对 \mathbf{P} 任一个分量的产生有“贡献”, 例如可以把 χ_{xy} 解释为 E_y 产生 P_x 时的电极化率, χ_{yx} 解释为 E_x 产生 P_y 时的电极化率等。为了简明, 下面以 xy 平面内的二维情况为例进行分析。假定晶体具有各向异性, 并且如图 1-5 所示, 当 \mathbf{E} 方

向沿晶体主轴 u (即上述的 x_0) 的正方向 \hat{u} 时, 将产生同样方向上的 \mathbf{P} , 相应的电极化率为 p_u ; 当 \mathbf{E} 沿晶体另一主轴 v (即上述的 y_0) 的正方向 \hat{v} 时, 将产生同样方向上的 \mathbf{P} , 相应的电极化率为 p_v 。这里晶体的各向异性表现在 $p_u \neq p_v$ 。于是, 若在 uv 平面内有一个与 u, v 轴成 β 角的直角坐标系 $x-y$, 则对于该平面内一个任意方向的 \mathbf{E} , 其 x 分量 E_x 在 u, v 轴上的投影分别为 $E_x \cos \beta$ 和 $E_x (-\sin \beta)$, 从而将产生 u 方向上的 $P_{u(x)} = \epsilon_0 p_u E_x \cos \beta$ 和 v 方向上的 $P_{v(x)} = \epsilon_0 p_v E_x (-\sin \beta)$; 类似地, \mathbf{E} 的 y 分量将产生 $P_{u(y)} = \epsilon_0 p_u E_y \sin \beta$ 和 $P_{v(y)} = \epsilon_0 p_v E_y \cos \beta$ 。

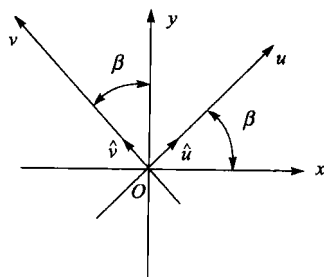


图 1-5 晶体的主轴方位

因此, 当 E_x 和 E_y 发生微小变化时, 由 E_x 变化引起的 $P_{u(x)}$, $P_{v(x)}$ 和 P_y 变化分别为: $\frac{\partial P_{u(x)}}{\partial E_x} = \epsilon_0 p_u \cos \beta$, $\frac{\partial P_{v(x)}}{\partial E_x} = -\epsilon_0 p_v \sin \beta$ 和 $\frac{\partial P_y}{\partial E_x} = \frac{\partial P_{u(x)} \sin \beta + \partial P_{v(x)} \cos \beta}{\partial E_x}$, 由 E_y 变化引起的 $P_{u(y)}$, $P_{v(y)}$ 和 P_x 变化分别为: $\frac{\partial P_{u(y)}}{\partial E_y} = \epsilon_0 p_u \sin \beta$, $\frac{\partial P_{v(y)}}{\partial E_y} = \epsilon_0 p_v \cos \beta$ 和 $\frac{\partial P_x}{\partial E_y} = \frac{\partial P_{u(y)} \cos \beta + \partial P_{v(y)} (-\sin \beta)}{\partial E_y}$ 。由此, 根据 (1-27) 式和图 1-5, 得到:

$$\chi_{xy} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial P_x}{\partial E_y} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial P_{u(y)} \cos \beta + \partial P_{v(y)} (-\sin \beta)}{\partial E_y} = \sin \beta \cos \beta (p_u - p_v)$$

$$\chi_{yx} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial P_y}{\partial E_x} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial P_{u(x)} \sin \beta + \partial P_{v(x)} \cos \beta}{\partial E_x} = \sin \beta \cos \beta (p_u - p_v)$$

所以, $\chi_{yx} = \chi_{xy}$, 即在二维情形下 $\vec{\chi}$ 是对称的。虽然三维情形的证明较为复杂, 但其结论 ($\vec{\chi}$ 对称) 仍然一样。

实际上, 由于当 \mathbf{E} 平行于任一晶体主轴时只能产生同方向的 \mathbf{P} , 所以在晶体主轴坐标系中, $\vec{\chi}$ 的矩阵形式是一个对角矩阵 (当 $k \neq l$ 时, $\chi_{kl} = 0$; $k, l = x_0, y_0, z_0$), 于是在任何直角坐标系 $x-y-z$ 中, $\vec{\chi}$ 矩阵总是一个从对角矩阵出发通过坐标转动变换 (下一章中将讨论该坐标转动变换公式) 所得到的矩阵, 而数学上又不难证明, 这样的矩阵必定是对称的。所以只要接受晶体至少具有一个主轴系这一实验事实, 任意坐标系中 $\vec{\chi}$ 的对称性只是一个数学推论结果。

这样, 由 (1-25) 式知, 由于 $\vec{\chi}$ 的对称, $\vec{\epsilon}$ 也必然是对称的。这一对称性使它们的 9 个分量中只有 6 个是独立的。