科學圖書大庫

由畢達哥拉斯至愛因斯坦

譯者　王昌銳

徐氏基金會出版

人人書大庫

由畢達哥拉斯至愛因斯坦

譯者 王昌銳

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會
監修人　徐銘信　發行人　王洪鎧

科學圖書大庫

版權所有　不許翻印

中華民國六十八年四月七日再版

由畢達哥拉斯至愛因斯坦

基本定價　0.80

譯者　王昌鋭　高雄工業專科學校教授

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(67)局版臺業字第1810號

出版者　財團法人 臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號　電話7813686 7815250號
發行者　財團法人 臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第15795號
承印者　大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段一五一號　電話9719739

譯　　序

自一九〇五年愛因斯坦 (Einstein) 發表其相對論以來，使古典式的科學理論，特別是時空觀念與計量方式，產生極大的變革。推而及於物理學、力學、化學、工程技術，爆炸，碰撞現象，能與動量變化移轉及其不滅定律等數學問題，莫不受其影響；相對論遂成爲近六十多年以來，科學上一大主流，誠爲二十世紀科學理論方面之一大變革。

其實，畢達哥拉斯 (Pythagoras) 定理之有名公式 $a^2+b^2=c^2$ ，却是非正式的通往相對論的一條主要綫索或途徑。也可以說，經由畢達哥拉斯定理及其各種演變，便能產生相對論變靜止能爲動能的有名公式：$e=mc^2$. 因此本書討論目標是相對論，但却名其書爲“由畢達哥拉斯至愛因斯坦”。

本書一開始，便提示畢達哥拉斯定理之幾何形式，而後復以代數形式表示，繼作進一步之修正，最後於特殊相對論中，又擔任極爲重要之角色。前四章，比較淺近，頗能爲一般中等以上學校學生所接受；而其餘部份，雖僅運用撞擊概念，來說明能與動量之不滅定律，但却比較艱深，讀者應有相當之物理學及力學造詣，始能領悟；由向量幾何，將進至於豐美偉大之相對論園地。

本書著者佛萊德里克司 (Kurt O Friedrichs) 博士，於 1901 年，生於德國，1925 年接受戈廷琴 (Gottingen) 大學之博士學位。1930 年成爲布朗司威工業學院教授，1937 年於紐約大學會合其師庫南特 (Richard Courant)，而成爲康南特教育科學會之一員，且爲國家科學院效力。其研究及著作，偏重於物理學門所含之數學分析方面，如相對性、彈性、流體力學及量子論等是；本書爲其力作，故予譯介，以供我學子，研究相對論之來龍去脈，促進對此新的科學理論之瞭解，從而調整科學研究之態度，提高研究效果。

本書係應徐氏基金會廣譯新書，吸收新學之約而譯。書中譯名，力求普遍流行，詞句力求通俗易懂，重要名詞術語，且留綴原文，以資對證，促進領悟。譯稿多勞吾妻蔣君英女士協助整校，深爲感激，特誌勿忘

中華民國五十九年三月十日
湘潭花石王昌銳 序於高雄工專

前　　言

本書非對某一讀者群而語，第一章基於六年級一次特別數學課之講詞；第二章之內容，屬於基本代數；而第三、第四及第五章之內容，可供第十二年級生研究；第六及第七章題材，可爲中學高年班學生涉獵，但亦可供大學生閱讀。基本歐幾里德幾何知識，應已具備，如更有某些熟知之物理學基本概念，將有助於閱讀本書。

希望本書，亦將有用於敎師，作爲正規課程所未包含之資料及觀點來源；本書中之主要觀點，及引導觀念，於引言中已予解釋。

爲求不妨害陳述之完整性，許多詳細部份，已予略去；如斯詳細部份，或許於練習中，提供綫索以彌補之。

本書題材，由一固定綱目，循某種曲折路綫而支配之；很自然的，著者如見最少有一讀者，循此路綫，而有始有終，將引爲快事。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

引　言*

本書目標，爲於各種數學與物理說明中，討論畢達哥拉斯定理 (Pythagorean theorem)，並指出此等概念，於特別相對論中之意義。

畢達哥拉斯定理，於數學歷史過程中，與許多基礎數學定理，遭遇相同命運。首先，此等定理於發現之初，引人震驚，而沉潛於所需之原始創造性證明中；於時間歷程中，此等定理，曾置於能由或多或少之例行演繹法，以導出概念性骨架；最後，於此骨架之一新的原理安排，此等定理曾化爲簡單的用爲定義，此尙不需意謂已淪於毫無意義之境。所變化者，徒爲一定義已曾帶來生命，而使於數學新支系發展之中，作爲有效引導原則，吾人目標之一，恰爲證明此作爲，係描述畢達哥拉司定理之生命圈。

於本書第一章中，以歐幾里德 (Euclid) 幾何之骨架中，畢達哥拉斯定理之最簡單證明討論，來作開始。而後，提出一較少常用之證明，該證明基於可能由小及中型之畢達哥拉斯方形圖，一樣的同於較大之方形，以覆蓋平面，而此兩掩蓋，於同樣移動之下，重新產生，由於其打擊性之直覺要求，及強烈反於“第二階段”證明，而選此證明，容後論之。

於第二章中，在“有符號之數目”的標題下，吾人提供一簡略之正與負實數作業基本規則之說明，以備第三章從事向量 (vector) 概念引論，作爲立場。

向量概念，獲得（與許多其他數學概念）一種不同於畢達哥拉斯定理所遭受之命運，此概念對大部份之數學，及特別對數學物理，非常重要。然而，於早期之幾何教學中，並不得其門而入。人或納罕，所加諸接受此概念之阻力，是否由於其無聲無臭，了無生氣，或是否由於其爲相對的抽象的新數學理論，艱深難解。

於向量作業規則確立之後，此等規則之例行應用，引出畢達哥拉斯定理，而後，此乃爲吾人“第二階段”證明。

此定理生命圈之第三階段，將於吾人討論就一正交單位向量體系之向量分量 (component) 概念以後出現，吾人將顯示更改吾人態度，定義向量爲其分量之產物，如何有利；而後作業規則，立即顯明，但於此態度之轉變中，

* 此引言之意義，主要爲對本書所含資料，略知一二之士，作一介紹。

畢達哥拉斯說明，不再是一定理；而用爲一種定義，畢達哥拉斯說明，仍視爲保持其意義與作用之定義：變爲三量度以上，幾何發展之引導原則；事實上，變爲無窮多量度之幾何發展引導原則。此發展，於許多方式，曾提供自然數學敍述之適當輪廓。

於本書第二部份，將提出某些力學基本原則，其中向量及向量作業，均作爲基礎工具，吾人將不致力於力爲向量之概念，但吾人自身確信以考慮速度 (velocity) 及動量 (monetum) 爲向量。

動量概念，於撞擊理論中，擔任重要使命，於此作爲中，兩運動物體（質子，質點）彼此打擊，而後於相殊之方向，彼此運動離去，或組成一“混合物” (compound particle)。應求確定，此等“彈性”(elastic)及“非彈性”(inelastic) 撞擊 (impact) 行爲，屬於物理基本現象。一言以蔽之，撞擊爲含於基本質子，內在行動中之基本行爲。

接受“能與動量不滅定律”爲基礎，吾人首將討論彈性撞擊。於討論非彈性撞擊時，吾人視機會討論熱能與勢能概念（不使用功之概念）。爲保持能力不滅混合質子之可能“內在能”（或潛能）(internac energies)，非彈性撞擊之相反者，將稱爲一種“爆炸行爲”，而以一砲或火箭之動作示範之。

本書之最後目標，爲顯示向量及畢達哥拉斯定理（於一修正之形式）之概念，於相對論 (theory of relativity) 中之作用。吾人主要討論，復爲撞擊問題；但於開始時，將提出特別相對論之一些基本定理。

爲解釋吾人趨向特別相對論之態度，吾人增加少許敍述，以適應熟稔此論之士。

吾人將着重於此理論動力部份有關運動中堅定之測量棒，與鐘（即彈簧）作用之論點，而非如空間及時間之性質。此等論點，能一如藉助棒與簧所作有關空間及時間量計說明，而非常自然地確立。反過來，此等說明，能運用一無窮量度式之內乘積的向量幾何，以參照表示之。此處畢達哥拉斯定理，於經過根本變化以後；再行出現。

於敍述以棒與鐘表示之愛因斯坦 (Einstein) 動力學時，吾人將不參考光之傳播；使用光速，於此速率 c 之動力學中從事辨識，將不予額外之考慮。

於相對論中不問力學，吾人將運用動量向量之自然相似，於典型分類力學中，四量度向量，其第四分量爲與由一項 mc^2，所表示之動能，密切相關，此爲一“靜止能”，於該階段，尙不能給予一物理解釋。吾人將使用能－動量向量，以確立彈性及非彈性撞擊，此與相反之非彈性撞擊關連，而將引致靜止能之愛因斯坦解釋。

因之可以證明本書，非由“單一目的”所導引。不同意義之不同思想路綫，均曾相互交織；詭辯之水準，極快產生。然而，希望此書，能有助於期望進入數學，及數學物理，豐富而多采多姿之世界者。

目　錄

第一章

畢達哥拉斯定理

畢達哥拉斯所發明之定理，有關於一直角三角形之諸邊，如斯三角形之三邊，係相鄰於直角之兩腿，及相對於此角之斜邊。畢達哥拉斯定理，提供三邊長度間之一關係；如其他之邊爲已知，可使人計算斜邊之長度。

欲決定一邊，或任何直綫之綫段長度，應先選一單位，或一特別綫段之長度取作單位者，則可表示任一綫段之長度，爲如斯單位綫段之一倍數，如謂一綫段之長度爲三，意即其爲長如單位綫段之三倍。

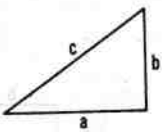

圖 1. 直角三角形具腿 a, b, 及斜邊 c.

於此意義之中，以 a 與 b，表示兩腿之長度，以 c 表示斜邊之長度（圖 1），畢達哥拉斯定理，乃組成而如公式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

顯然，當長度 a 與 b 爲已知時，其長度 c 即能算出，因能計算出任何正數之平方根也。由是，取以上公式各數之平方根，乃求得

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

公式 $c^2 = a^2 + b^2$，能直接提供一幾何意義，茲於三角形兩腿之上各作出一正方形，且於其斜邊作一正方形，見圖 2. 顯然正方形之面積爲其邊長度之平方 *，公式 $c^2 = a^2 + b^2$ 因此乃能表示爲謂斜邊上之正方形面積，等於諸邊向外作出之正方形面積之和，事實上，而爲由歐幾里德稱爲畢達哥拉斯定理之幾何定則。

如何方能證明畢達哥拉斯定理？許多不同之證明，曾予提出，而吾人將提示幾種完全不同之途徑，引致如斯證明。

* 原文中之第一“平方”，表示圖形，第二“平方”，表示邊之自乘乘積。

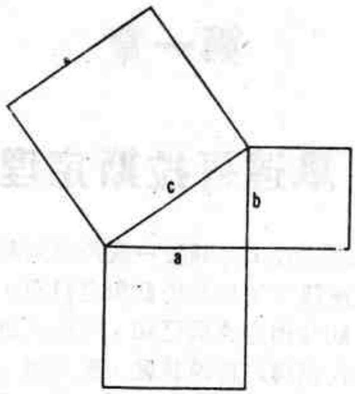

圖 2. 直角三角形，具正方形於其腿與斜邊上。

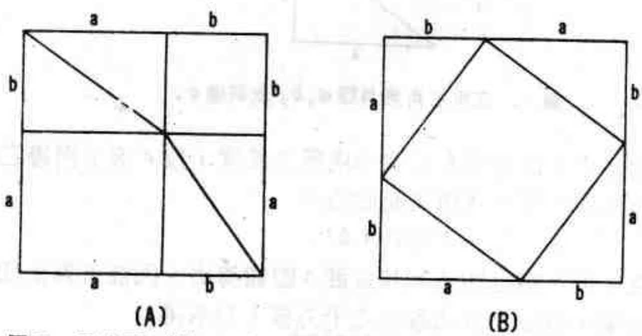

圖 3. 畢達哥拉斯定理之證明 (*A*) 分解面積 $(a+b)^2$ 之方形，成為兩面積為 a^2 及 b^2 之方形，及四面積 $\frac{1}{2}ab$ 之三角形；(*B*) 分解同樣方形，以成面積 $\frac{1}{2}ab$ 之四三角形，及面積 c^2 之一方形。

於本章中，吾人將提供兩幾何證明，於第一者，吾人考慮"邊" $a+b$ 之正方形；（見圖3）*於此"大正方形"之一角落，吾人量一"邊"為 a

* 此處吾人使名詞"邊"，而應曾使用過"邊具長度"，此比較方便，吾人將繼續使用此方便之簡單說法。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

之正方形；於其相對之角落，置"邊"爲 b 之正方形，結果尚存兩矩形，各具邊 a 及 b 。由是，大正方形之面積，爲具邊 a 及 b 之方形面積 a^2 及 b^2，及具邊 a 與 b 矩形面積 ab 之二倍的和；見圖 3(*A*)。

各矩形可視爲兩直角三角形，各具腿 a 與 b 之和，現可置此四不同之三角形於大正方形中，示於圖 3(*B*) 中。如是，各爲置於大正方形一角，其短腿在左，長腿在右，如由外側看去，便如此情況。由此等三角形之斜邊所包圍之圖形，爲一四邊形，其各邊之長度爲 c ，事實上，此圖爲一正方形；因於邊 $a+b$ ，兩三角形相遇之一點處，三角混合，而成一直綫角其中之二，已相對於兩全等直角三角形之腿 a 與 b ，而爲相餘，因此，加成直角一個；故所餘之角，亦爲一直角。

由是而知大正方形之能分解爲方形 a^2 與 b^2 ，及四具腿 a 及 b 之三角形者，能依樣分解爲具面積 c^2 之方形 ，且復具腿 a 及 b 之四直角三角形。假想四直角三角形，由兩圖中移去，乃知面積 a^2+b^2，遺留於一圖中，而等於他圖所留面積 c^2 之方形。換言之，乃已導出說明 $a^2+b^2=c^2$。

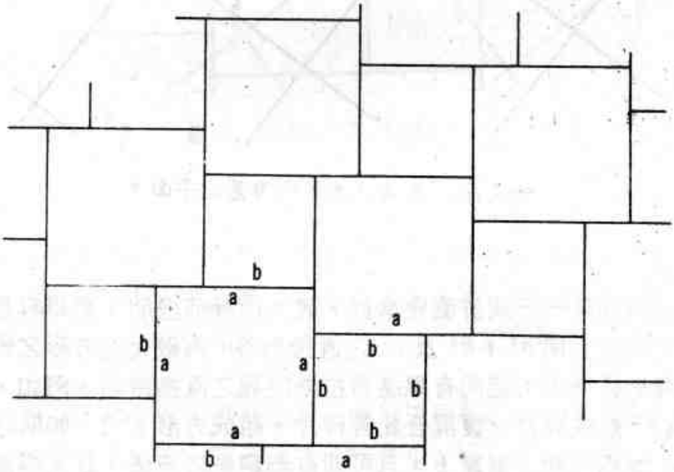

圖 4*A*. 由邊 a 與 b 方形所覆蓋之平面。

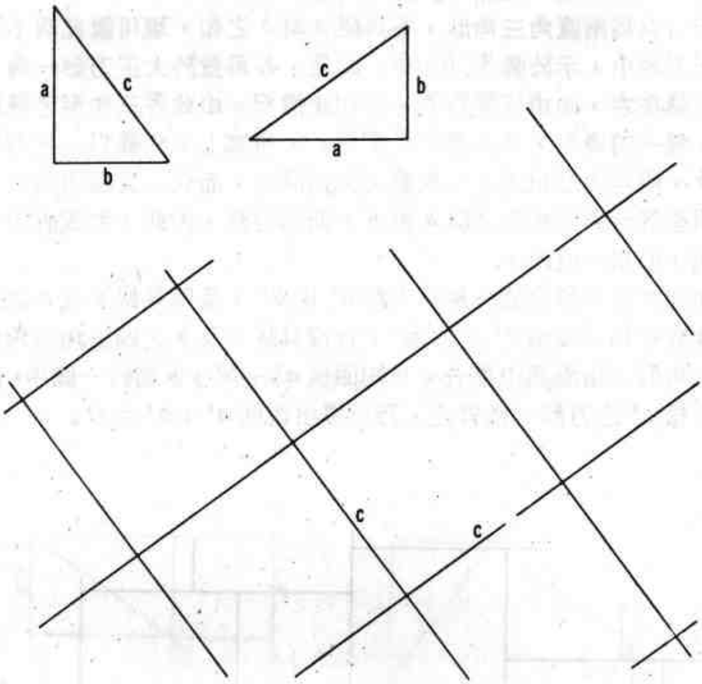

圖 4B. 由邊 c 方形所覆蓋之平面。

此證明極爲簡單 —— 或許直覺掌握，較其他幾何證明，更爲容易 —— 但非十分直接，取代面積 a^2+b^2 及 c^2 之直接對等，兩較大正方形之面積而爲恒等。人或驚奇於是否可能尚有畢達哥拉斯定理之直接證明。例如，能否將兩方形 a^2 及 b^2 割成碎片，復混合此等碎片，組成方形 c^2？ 如斯之一切碎及重新混合，誠爲可能；事實上，且可能有無窮多之方法，吾人爲此，舉一簡單方法如下：

吾人假想全部平面，由邊 a 及 b 之方形所覆蓋，其形式示於圖 4A 中；吾人復假想平面，由邊 c 之方形所覆蓋，示於圖 4B 中，而視此等覆蓋爲第一與第二"陣列"，第二陣列諸邊，均平行於其腿爲 a 與 b 之諸直角三角形

斜邊，腿 a 與 b 之安排，係平行或垂直第一陣列諸方形之邊者。

有許多標定第二陣列，使與第一者建立關係之可能性。當然，吾人能隨意選定其諸頂之一的位置。當然，所有其他諸頂位置，由是而定（見圖 5）。如第二陣列選定之頂，處於第一陣列之一特別方形中，則第二陣列所有其他之頂，處於全等方形中之對應位置。

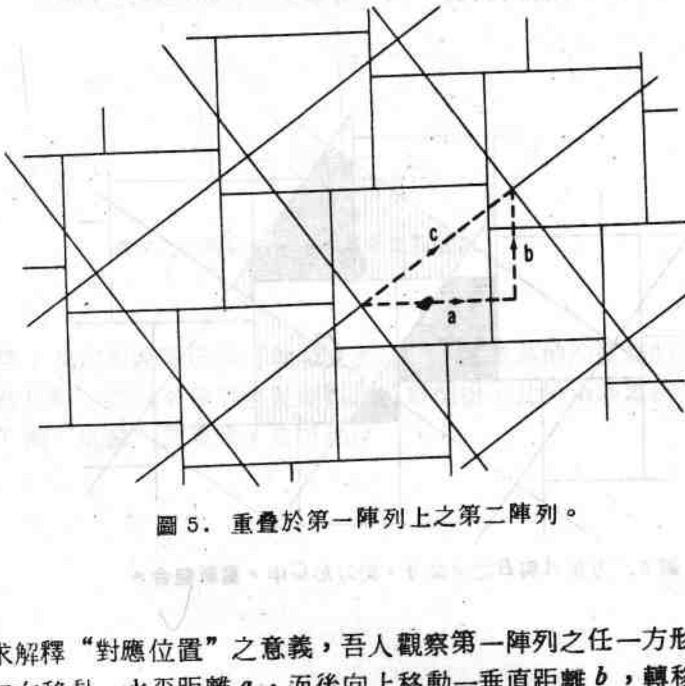

圖 5. 重疊於第一陣列上之第二陣列。

爲求解釋"對應位置"之意義，吾人觀察第一陣列之任一方形，能簡單的首先向右移動一水平距離 a，而後向上移動一垂直距離 b，轉移至一全等之方形位置，於圖 5 可見。於此位移之中，方形各點，走向新方形中對應之一點。

各點之位移，亦可謂其點沿一直角三角形之腿 a 及 b 移動而描述之；顯然，此位移可更直接的循三角形之斜邊 c，移動該點，以見其效。如第二陣列之一頂，係沿如斯之斜邊移動，結果將止於一全等方形之頂。

應用同樣理論於所有四個方向，由第二陣列之一頂，引向諸鄰頂，且重複實施任何次數，乃知第二陣列所有諸頂，有第一陣列全等方形中之對應位置。

現考慮第一陣列一對相鄰方形，如 𝔄, 𝔅，其邊爲 a 及 b，而第二陣列中一方形 𝔈，與方形 𝔄 及 𝔅 相交，見圖6。顯然第二陣列方形之邊，將方形 𝔄 與 𝔅，切成碎片。各如斯之碎片屬於 𝔈 或屬於全等於 𝔈 諸方形之一，於後一情況，此碎片全等於 𝔈 內，由第一陣列直綫所切出之一碎片，如現在所有 𝔄 與 𝔅 之碎片，切出而又於 𝔈 中重新組合，各碎片將置於其對應位置，而後彼等完全塡滿方形 𝔈。由是而知 𝔈 之面積，的確等於 𝔄 與 𝔅 面積之和，而引出說明 $c^2=a^2+b^2$. 即等於說，已引出畢達哥拉斯定理之說明。

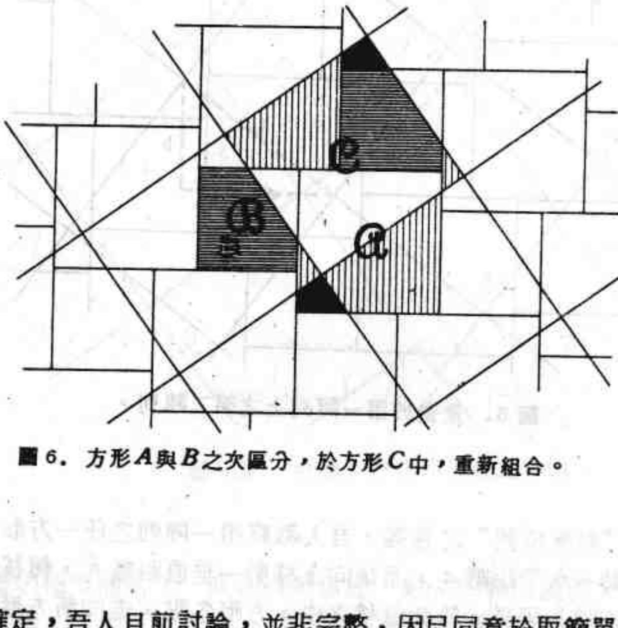

圖6. 方形A與B之次區分，於方形C中，重新組合。

應予確定，吾人目前討論，並非完整，因已同意於取簡單幾何定理之一數目，而來予嚴格導出，將不難提供此等切開與重組方形，各方式所遺落之鏈環，如已作此，乃得畢達哥拉司定理之一證明。然而，除僅提供一簡圖外，並未實行此定理之詳細證明。注意，吾人已給予無窮多個如此之方格，因能於無窮多處，任選一處，以作第二陣列之一頂，故而能由無窮多之可能性中，選擇方形 𝔈 之位置。

於補充吾人討論之一切詳細部份，由圖形導出證明，推理之鏈，將變爲冗長而厭煩。如興趣專注於畢達哥拉斯定理之簡明與完整的證明，可採取如

此處所示第一種之傳統討論；或參考圖6情況，採行吾人之第二證法，方形 c 之最低頂，處於方形 a 下邊，距左端點為 b 之處（見圖7）另一方面，此

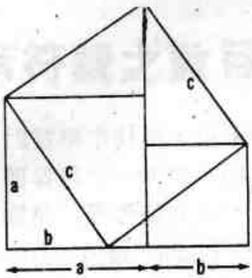

圖 7. 由再組合，證畢達哥拉斯定理。

處所採途徑，決定畢達哥拉斯定理之主要特質，遠較其他途徑為明顯，目前途徑之某些步驟，亦具次章將發展途徑之相對部份，此於兩基本概念“有符號之數目”與“向量”討論後，立可見及。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com