

▶ 全国普通高校数学规划教材

概率统计 及其应用

GAILÜ TONGJÍ JÍQÍ YINGYONG

徐 波 编著



电子科技大学出版社

▶ 全国普通高校数学规划教材

概率统计 及其应用

GAILÜ TONGJI JIQI YINGYONG

徐 波 编著



电子科技大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

概率统计及其应用/徐波编著. —成都: 电子科技大学出版社, 2009. 9

ISBN 978 - 7 - 5647 - 0359 - 2

I. 概… II. 徐… III. ①概率论②数理统计 IV. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 156742 号

内 容 提 要

本书是根据概率论与数理统计课程教学大纲的基本要求, 结合地方高校的教学特点及作者多年的教学实践编写而成。全书主要包括: 概率论的基本概念、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理, 以及数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析等。本书在阐述基本原理的同时, 更注重理论知识的实际应用, 每个章节都结合实际生活中的一些典型问题举出应用实例, 以培养学生应用书本知识解决实际问题的能力。并且在每章都选配了相关内容的练习题, 书后还附有常用数表等。

该书可作为高等院校相关专业概率论与数理统计课程教材, 也可供培养应用型人才的高校选作教学用书或参考读物, 还适合自学者作为自学读本。

全国普通高校数学规划教材 概率统计及其应用

徐 波 编 著

出 版: 电子科技大学出版社 (成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦
邮编: 610054)

策划编辑: 徐 红

责任编辑: 徐守铭 徐 红

主 页: www.uestcp.com.cn

电子邮箱: uestcp@uestcp.com.cn

发 行: 新华书店经销

印 刷: 贵州兴顺发彩色印务有限公司

成品尺寸: 170mm × 230mm 印张: 20 字数: 378 千字

版 次: 2009 年 9 月第一版

印 次: 2009 年 9 月第一次印刷

书 号: ISBN 978 - 7 - 5647 - 0359 - 2

定 价: 34.00 元

■ 版权所有 侵权必究 ■

◆ 本社发行部电话: 028 - 83202463; 本社邮购电话: 028 - 83208003。

◆ 本书如有缺页、破损、装订错误, 请寄回印刷厂调换。

序 言

数学作为一门科学，有一个显著的特点就是它的确切性，它之所以成为研究自然现象重要而有力的工具，是因为自然现象的结果常常是肯定的。但客观世界却普遍存在着另一类现象，对这类现象，人们无法利用“因果关系”加以严格控制或准确预测。因为就某个别现象而言，它的结果是不确定的，然而从大量同类现象的整体来看，却遵循一定的规律，这种规律被称为统计规律性。概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科，目的就是要构造这类现象的数学模型。美籍华人数学家钟开莱院士在 20 世纪 70 年代就说过：在过去半个世纪中，概率论从一个较小的、孤立的课题发展成为一个与数学许多其他分支相互影响、内容宽广而深入的学科，同时，它对各种应用学科的数学化起到了至关重要的作用。的确，概率统计一经与实际相结合，便立即呈现出“千树万树梨花开”的繁荣景象。现在，建立在概率论基础上的数理统计思想及方法，已渗透到天文、物理、遗传、气象、农业、工业、军事、工程、技术、管理、社会、教育、决策等学科领域，随机思想及方法已逐渐成为现代人认识世界的一种思维模式，正像著名预言家 H. G. 威尔斯所说“统计的思想有朝一日将像读与写的 ability 一样，是每一个工作的公民所必需的”。

虽然概率统计是社会生活与科技领域中如此重要的一门数学学科，但它相对其他数学又具有非常明显的特点。此前学习的数学都是研究和揭示在一定条件下，其结果必然发生或不发生的规律性，而概率统计则是通过探试大量的偶然现象，研究和揭示偶然性背后隐藏的必然规律。正是这种学科特点，必然给已经形成一定确定性思维定势的初学者，带来学习上的困难。也正是这一特点，必然要求在概率统计的学习中，概念的理解比方法的掌握更加重要，而这恰恰是初学者容易疏忽的。

因此，本书作者在充分注重该学科与其他数学的异同特点，根据概率论与数理统计课程教学大纲的基本要求，结合地方高等院校的教学特点、办学宗旨和培养目标，有针对性地编著了这部教材。在编著过程中，既注重了加强基础、精选内容、联系实际、易于阅读的编写原则，又兼顾了教材的思想性、科学性、适用性、启发性的基本要求，紧扣地方高校的培养目标，尽量体现通俗易懂、重在应用的地方特色，并从以下几个方面作了努力：

1. 按教学由浅入深、逐步递进的叙述方式，尽量使用通俗流利、直观浅显的大众化语言，力争做到明晰易懂，读起顺畅，便于理解。

2. 引入基本概念时，常常从例题入手，在分析、解惑的过程中归纳提出，以增强读者对概念的感性认识，在介绍基本理论、基本方法、重要定理时，采用了简明浅显的描述法，以增加教材内容的可读性。

3. 在保证概率统计知识内容的系统性前提下，降低了理论起点与习题难度，尽量削减抽象高深的数学基础理论，更多地使用微积分工具，书中许多结论不加证明地予以引用，以贴近地方高校的教学实际。

4. 在内容的选择上，教材突出了适应性，相对而言，更多、更系统、更详细地介绍了应用性较强的数理统计部分，并且每一章都安排专节介绍该章内容的应用实例，强化了理论知识的实际应用。

5. 每个相对独立的内容板块，尽量做到提出问题自然、分析问题清晰、解决问题有效、方法步骤可行，让读者对问题的脉络理得清、关键找得准、核心抓得住。

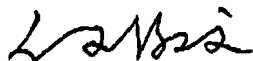
6. 注意精选例题与习题，紧扣应用特点，着力于基本概念的理解、基本方法的掌握、基本知识的应用，很多例题与习题都是来自现实生活与自然现象中的实际问题，其解决方法带有一定的普遍性与适用性，旨在通过训练让初学者触类旁通。

当然，要做到以上几点，本身是不容易的，要做好以上几点，那就更加困难。概率统计的教材中不乏优秀之作，但这些教材更注重培养高层次的抽象分析与逻辑推理能力，强调理论的系统、完备与严密。而概率统计较强的实践性、广泛的应用

性及地方高校教学的适用性则在本书得以较好的体现。纵观全书，特点突出、取材适当、编排合理、叙述清楚、浅显易懂、便于教学。本书既可作为一般高校相关专业的教材使用，也可供培养应用型人才的高校选为教科书或参考读物，还适合自学者作为自学读本。

随着教育部“高等教育万种教材建设工作”的推进，随着全省高等教育“大众化”目标的实现，该书的编辑出版，无疑对地方高校的教材建设，对应用型人才的培养，对概率统计课程的教学与改革，都将起到积极的推动作用。

应作者诚邀，审阅之后，有感而撰，权当书序。



2009年8月6日

注明：向淑文博士系贵州省数学学会理事长、贵州大学校长助理、教务处处长、教授、博导、国务院特殊津贴获得者。

目 录

第一章 概率论的基本概念	(1)
§ 1.1 随机试验	(1)
§ 1.2 随机事件与样本空间	(2)
§ 1.3 事件间的关系与运算	(3)
§ 1.4 古典概率	(5)
§ 1.5 频率与统计概率	(10)
§ 1.6 条件概率及其应用	(13)
§ 1.7 事件的独立性	(18)
§ 1.8 贝努里(Bernoulli)概率模型	(22)
§ 1.9 应用实例	(23)
习题一	(28)
第二章 随机变量及其分布	(30)
§ 2.1 随机变量	(30)
§ 2.2 离散型随机变量及其分布	(34)
§ 2.3 连续型随机变量及其分布	(36)
§ 2.4 一维随机变量函数及其分布	(42)
§ 2.5 二维随机变量及其分布	(48)
§ 2.6 随机变量的条件分布和独立性	(53)
§ 2.7 应用实例	(58)
习题二	(61)
第三章 随机变量的数字特征	(63)
§ 3.1 数学期望及其性质	(63)
§ 3.2 方差及其性质	(69)
§ 3.3 协方差及相关系数	(77)
§ 3.4 条件数学期望	(80)
§ 3.5 应用实例	(84)
习题三	(89)

第四章 大数定律和中心极限定理	(91)
§ 4.1 大数定律	(91)
§ 4.2 中心极限定理	(96)
§ 4.3 应用实例	(99)
习题四	(106)
第五章 数理统计的基本概念	(108)
§ 5.1 总体与样本及其分布	(108)
§ 5.2 统计量及其常用分布	(111)
§ 5.3 抽样分布	(114)
§ 5.4 应用实例	(125)
习题五	(130)
第六章 参数估计	(132)
§ 6.1 点估计的概念	(132)
§ 6.2 评价估计量优劣的标准	(140)
§ 6.3 区间估计的概念	(144)
§ 6.4 单侧置信区间	(157)
§ 6.5 应用实例	(162)
习题六	(166)
第七章 假设检验	(170)
§ 7.1 假设检验的基本概念	(170)
§ 7.2 两类错误的介绍	(173)
§ 7.3 单个正态总体的参数假设检验	(175)
§ 7.4 两个正态总体的参数假设检验	(193)
§ 7.5 分布假设检验	(207)
§ 7.6 应用	(211)
习题七	(213)
第八章 方差分析	(216)
§ 8.1 单因素方差分析	(216)
§ 8.2 双因素试验方差分析	(223)
§ 8.3 应用实例	(232)
习题八	(238)
第九章 回归分析	(242)
§ 9.1 一元线性回归分析	(242)

§ 9.2 多元线性回归分析	(256)
§ 9.3 相关性在教育测量中的应用	(275)
习题九	(282)
附 表	(288)
附表1 标准正态分布表	(288)
附表2 t 分布表	(290)
附表3 F 分布表	(292)
附表4 χ^2 分布表	(301)
附表5 相关系数临界值表	(305)
参考文献	(307)
后 记	(309)

第一章

概率论的基本概念

自然界之中，人们经常能碰到各种各样的现象，这些现象大致可以分为两大类。第一类现象是在一定条件下必然会发生或者必然不会发生某种结果。例如，太阳东升西落；异性电荷必然互相吸引；水在一个标准大气压下加热到 100°C 的时候必然会沸腾，等等。人们把这一类现象称为确定性现象，也称为必然现象。然而人们常常还会遇到另一类现象，在相同条件下某种结果可能发生，也可能不发生，即事先并不能预知确切结果的现象。例如，抛同一枚硬币，每次抛掷前无法肯定结果到底是正面朝上还是反面朝上；掷一颗骰子，每次掷出的结果不能事先准确地预测到底是几点；同一个射箭运动员向同一个靶子射箭，每次射箭前并不知道到底能命中几环；同一个地区未来同一时期可能下雨，也可能天晴。人们把这一类现象称为随机现象。这类现象虽然在相同的条件下出现的结果可能不止一个，并且每次事先不能准确预测哪种结果会发生，但是人们经过长期的实验和研究，发现这类事件的不可预测性只是对少数几次观察或试验而言，在大量重复实验后，各种不同结果呈现出明显的规律性。例如，多次重复抛一枚硬币得到正面朝上的次数大致为总次数的一半；多次重复掷一颗骰子得到各个点数的次数大致相等；同一个射箭运动员多次重复射箭，靶子上的着箭点大致呈现出一定的规律性。这种在大量重复性试验或观察中所呈现出的固有规律性称为随机现象的统计规律性。概率论就是研究并揭示随机现象统计规律性的一门学科。

§ 1.1 随机试验

在此我们把对随机现象的观察、记录、试验统称为随机试验，常记为 E 。它具有以下特性：

- (1) 可以在相同条件下重复进行；
- (2) 事先知道所有可能出现的结果；
- (3) 每次进行试验前并不知道哪个确定的结果会发生。

例如:

E_1 : 多次重复的抛一枚硬币, 每次出现的结果不是正面向上就是反面向上, 但是每次抛硬币之前都不能确切知道哪一面会向上。

E_2 : 掷一颗骰子, 每次出现的点数总是 $1, 2, \dots, 6$ 中的一个, 但是每次抛掷前都不能预测会出现哪一个确定的点数。

E_3 : 多次对同一靶子射箭, 虽然每次击中的位置总是靶平面上的一点, 但是每次射箭前也不能事先知道会击中哪一个定点。

E_4 : 一个袋子里面装有若干个红球、黄球和蓝球, 多次从袋子里摸出球 (摸出球并放回去), 虽然每次摸得的球都是袋子里的红、黄、蓝三种颜色的球, 但是每次摸球前也不能事先知道会摸到什么颜色的球。

上述四个试验都是随机试验, 都体现出了随机试验的三个明显特性。

§ 1.2 随机事件与样本空间

我们把随机试验的每一种可能出现的结果称为随机事件, 简称事件, 即事件是随机试验中一些明确、具体的结果 (或结果合成的集合), 常用大写字母 A, B, C, \dots 表示。在每一次试验中, 当这些结果出现的时候我们称为事件发生。

例如, 在试验 E_1 中, “反面向上” 是它的一个可能结果, 所以它是 E_1 的一个随机事件; 在试验 E_2 中, “点数为 6”, “点数为偶” 各是 E_2 的可能结果, 所以它们都是 E_2 的随机事件; 在试验 E_3 中, “射中 9 环以内” 是 E_3 的一个可能结果, 所以它是 E_3 的一个随机事件; 在试验 E_4 中, “摸到红球” 是 E_4 的一个可能结果, 所以它是 E_4 的一个随机事件。

对于一个随机试验来说, 所有事件的集合, 我们称它为样本空间, 记作 Ω 。样本空间的基本元素, 称为样本点, 常记为 e , 也称基本事件。每次试验中都必然出现的结果称为此试验的必然事件, 例如在 E_1 中抛出的硬币“不是正面朝上就是反面朝上”。样本空间的空集记作 ϕ , 例如在 E_2 事件中掷出的骰子“点数为 7”。由于它在每次试验中都必然不发生, 所以我们可以将它们称为不可能事件。显然, 任何一个随机事件 A 都是由若干样本点 $\{e\}$ 构成的集合, 即 $A = \{e\}$, 因此 A 出现, 当且仅当 A 中某一基本事件出现。若将样本空间 Ω 视为一个事件, 则 Ω 是必然事件。

§ 1.3 事件间的关系与运算

若将样本空间视为由基本事件为元素所构成的全集, 则每一个随机事件就是由若干基本事件构成的子集合。因而事件之间的关系与运算就是集合之间的关系与运算。只是根据事件发生的概念, 赋予它们在概率论中的涵义。

1. 子事件: 若 $A \subset B$, 则称事件 A 包含于事件 B 或事件 B 包含事件 A 。其概率涵义是: 事件 A 出现, 则 B 必然出现。对于任意的事件 A , 显然有 $A \subset \Omega$, $\phi \subset A$, $A \subset A$ 。

2. 事件相等: 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称事件 A 与事件 B 相等。记作 $A = B$ 。其概率涵义是: A, B 中有一个出现则另一个也必然出现。

3. 和 (并) 事件: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的和 (并) 事件, 其概率涵义是: A, B 中至少有一个出现时, $A \cup B$ 出现, 反之亦然。类似的称 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 为 A_1, A_2, \dots, A_n 的和 (并) 事件。

4. 积 (交) 事件: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的积 (交) 事件, 其概率涵义是: 当且仅当 A, B 同时出现时, $A \cap B$ 出现。类似的, 称 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ 为 A_1, A_2, \dots, A_n 的积 (交) 事件。

5. 差事件: $A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的差事件。其概率涵义是: 当且仅当 A 发生且 B 不发生时事件 $A - B$ 发生。

6. 若事件 A, B 满足 $A \cap B = \phi$, 则称事件 A 与 B 互斥 (或互不相容) 事件。其概率涵义是: A 与 B 不同时出现。

7. 若事件 A, B 满足 $A \cup B = \Omega$ 且 $A \cap B = \phi$, 则称 A 与 B 互为对立 (或互逆) 事件。其概率涵义是: A 与 B 中有且仅有一个发生。 A 的对立事件记作 \bar{A} 。 $\bar{A} = \Omega - A$ 。

因为事件是集合, 所以由集合间的运算关系及其性质不难证明事件间也有类似的运算关系及性质。

$$1) A \cup A = A; A \cap A = A; A - A = \phi; A \cup \phi = A; A \cap \phi = \phi;$$

$$2) A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A;$$

$$3) A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C); A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C);$$

$$4) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

$$5) \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}; \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B};$$

$$6) \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}; \quad \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i};$$

.....

可以证明集合间的所有关系、运算及性质与事件间的所有关系、运算及性质完全一致，今后不加证明也可予以运用。有时也将符号“ \cup ”和“ \cap ”记为“ $+$ ”和“ \cdot ”，并且 $A \cap B$ 还可以简记为 AB 。

例 1.1 设一个篮球运动员投篮，以 A_1, A_2, A_3 分别表示事件“第一、二、三次投中”，试用 A_1, A_2, A_3 分别表示下列事件：

- 1) 三次都投中；
- 2) 至少一次投中；
- 3) 只有第一次投中；
- 4) 只有一次投中；
- 5) 只有两次投中；
- 6) 至少有两次投中；
- 7) 第三次投中，第二次未投中；
- 8) 前两次都未投中。

解 由题意可知， A_1, A_2, A_3 分别表示事件“第一、二、三次投中”；容易得到 $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$ 分别表示事件“第一、二、三次未投中”，则：

- 1) 三次都投中，意味着事件 A_1, A_2, A_3 都发生，即：

$$A_1 A_2 A_3$$

- 2) 至少一次投中，意味着事件 A_1, A_2, A_3 中至少有一个发生，即：

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

- 3) 只有第一次投中，意味着事件 A_1 发生而事件 A_2, A_3 不发生，即：

$$A_1 \overline{A_2} \overline{A_3}$$

4) 只有一次投中，但不确定是哪一次投中，意味着事件 A_1, A_2, A_3 只有一个发生而其他两个不发生，即：

$$A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} \cup \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} \cup \overline{A_1} \overline{A_2} A_3$$

- 5) 只有两次投中，即：

$$A_1 A_2 \overline{A_3} \cup \overline{A_1} A_2 A_3 \cup \overline{A_1} \overline{A_2} A_3$$

- 6) 至少有两次投中，意味着两次投中或者三次投中，即：

$$A_1 A_2 \overline{A_3} \cup \overline{A_1} A_2 A_3 \cup \overline{A_1} \overline{A_2} A_3 \cup A_1 A_2 A_3$$

- 7) 第三次投中，第二次未投中，意味着第一次不在乎到底中不中，即：

$$A_3 - A_2 = \overline{A_2} A_3$$

8) 前两次都未投中, 意味着 $\overline{A_1}$ 、 $\overline{A_2}$ 同时发生, 即:

$$\overline{A_1 A_2}$$

为了对比和观察方便, 我们把集合和概率中的对应关系列表如表 1.1 所示。

表 1.1

符 号	集合中定义	概率中定义	概率中涵义
Ω	全集	样本空间	必然事件
ϕ	空集	不可能事件	不可能事件
e	元素	样本点	基本事件
A	子集	事件	事件
\overline{A}	A 的补集	A 的逆事件	A 与 \overline{A} 只有一个发生
$A \subset B$	A 是 B 的子集	A 是 B 的子事件	A 出现时 B 必然出现
$A = B$	A 与 B 相等	A 与 B 相等	A 与 B 中一个出现则另一个也出现
$A \cup B$	A 与 B 的并集	A 与 B 的和事件	A 与 B 中至少有一个出现
$A \cap B$	A 与 B 的交集	A 与 B 的积事件	A 与 B 同时出现
$A - B$	A 与 B 的差集	A 与 B 的差事件	A 出现时 B 不出现
$A \cap B = \phi$	A 与 B 不相交	A 与 B 为互斥事件	A 与 B 不同时出现
$A \Delta B$	A 与 B 的对称差	A 与 B 的对称差事件	A 与 B 中只有一个出现

§ 1.4 古典概率

对一个随机事件来说, 它在每次试验中有可能发生, 也可能不发生。而在处理现实问题时, 我们常常希望知道这些事件在一次试验中发生的可能性到底是多大, 例如, 若对于明年的通货膨胀率进行危机预警, 就必须知道明年物价上升的可能性到底有多大; 加修防洪河坝的高度, 就必须知道洪水暴发的可能性和强度到底有多大, 等等。我们把事件在一次试验中发生的可能性的的大小用数值来表示, 这个数值就称为概率, 常记为 $P(\cdot)$, 例如 $P(A)$ 就表示事件 A 在一次试验中发生的概率。在此我们首先引入古典概率的概念。

最初人们的研究是非常简单的一类试验，它具有以下两个特点：

1. 样本空间 Ω 包含有限个样本点，即基本事件 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ；
2. 每次试验中每个基本事件发生的可能性相同，即 $P(e_i) = \frac{1}{n}, (i = 1, 2, \dots, n)$ 。

具有以上两个特性的试验是大量存在的，我们称这种试验是古典概率型的，也称为等可能概率型。

下面我们来讨论等可能概率型中事件概率的计算公式。

定义 1.1 设试验 E 是等可能概率型的，其样本空间为 $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ；若这一样本空间中的事件 $A = \{e_{n_1}, e_{n_2}, \dots, e_{n_k}\}$ ，其中 n_1, n_2, \dots, n_k 为 $1, 2, \dots, n$ 中任意 k 个不同的数， $0 \leq k \leq n$ ，则称：

$$P(A) = \sum_{j=1}^k P(\{e_{n_j}\}) = \frac{k}{n} = \frac{A \text{ 中样本点数}}{\Omega \text{ 中样本点数}}$$

这样的概率为古典概率。

例 1.2 作试验 E ：将一枚均匀的硬币抛掷 2 次，观察正反面情况。

- (1) 写出 E 的样本空间 Ω ；
- (2) 设 $A = \{\text{恰有一次正面出现}\}$ ，求 $P(A)$ ；
- (3) 设 $B = \{\text{至少有一次正面出现}\}$ ，求 $P(B)$ 。

解 (1) $\Omega = \{(\text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{反})\}$ ，由于硬币均匀，所以 Ω 中每个结果出现的可能性相等，即为等可能概率模型，此时 Ω 中的点数为 $n = 4$ ；

(2) $A = \{(\text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{正})\}$ ，即 A 中样本点数为 2，所以 $P(A) = \frac{1}{2}$ ；

(3) $B = \{(\text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{正})\}$ ，即 B 中样本点数为 3，所以 $P(B) = \frac{3}{4}$ 。

其实，在求等可能概率模型中随机事件的概率时，不必求出每一个具体的样本点即基本事件是什么，只要求出样本点即基本事件总数 n 与所求事件中包含的样本点即基本事件数 k 即可。

例 1.3 设一口袋中有 8 只红球，2 只蓝球，球仅颜色不同，每个球被摸到的可能性相同。

(1) 接连有放回的从袋中取三个球，求 $A = \{\text{取得的三个球都为红球的概率}\}$ ；

(2) 接连有放回的从袋中取三个球，求 $B = \{\text{取得的三个球依次为蓝、红、红}\}$ 。

的概率}；

(3) 接连无放回的从袋中取三个球，求 $C = \{\text{取得的三个球依次为红、蓝、红的概率}\}$ 。

解 (1) 由题意可知，第一次，第二次，第三次从袋中取球都有 10 种取法，由全排列公式可得总的取法有 $10 \times 10 \times 10$ 种；而对于事件 A 来说，袋中只有 8 个红球可供选择，故第一次，第二次，第三次取球都只有 8 种取法，三次总共有 $8 \times 8 \times 8$ 种取法。由等可能概率公式可以得到：

$$P(A) = \frac{8 \times 8 \times 8}{10 \times 10 \times 10} = \frac{64}{125}$$

(2) 同理可知，三个球依次为蓝、红、红的取法有 $2 \times 8 \times 8$ 种，所以可得：

$$P(B) = \frac{2 \times 8 \times 8}{10 \times 10 \times 10} = \frac{16}{125}$$

(3) 根据排列组合性质可知，从 10 个球中任意取 3 个球排成一列，共有 A_{10}^3 种排列方式，第一次取得红球的取法为 A_8^1 ，第二次取得蓝球的取法为 A_2^1 ，第三次取得红球的概率为 A_7^1 ，所以我们可以得到：

$$P(C) = \frac{A_8^1 \times A_2^1 \times A_7^1}{A_{10}^3} = \frac{7}{45}$$

例 1.4 在 1 到 1000 的整数中随机取一个数，求取到的整数 (1) 能被 3 整除；(2) 不能被 7 整除的概率。

解 由题意可知，我们可以设事件 A 为“取到的数能被 3 整除”， B 为“取到的数能被 7 整除”，则所求概率可以表示为：

(1) 设 N_A 为 1 到 1000 中能被 3 整除的数的个数，则 $N_A = \frac{1000}{3}$ 的整数部分，由于 $333 < \frac{1000}{3} < 334$ ， $N_A = 333$ ，故 $P(A) = \frac{333}{1000}$ 。

(2) 由于 1 到 1000 中能被 7 整除的整数个数为 $N_B = \frac{1000}{7}$ 的整数部分，即 $N_B = 142$ ，而不能被 7 整除的有 $1000 - N_B$ 个，所以：

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{1000 - N_B}{1000} \\ &= 1 - \frac{71}{500} \\ &= \frac{429}{500} \end{aligned}$$



例 1.5 某一口袋中有 a 个红球, b 个黄球, 现有 k 个人依次在袋中取一只球, 分下列两种情况:

- (1) 有放回的取球;
- (2) 无放回的取球。

现求第 i ($i = 1, 2, \dots, k$) 个人取到红球的概率 ($k \leq a + b$)。

解 (1) 放回抽样的情况, 由排列性质可知, 从袋中任取 k 次, 每连续抽取 k 次为一个基本事件 (每个球被抽到的可能性相等, 因而每个基本事件是等可能发生的), 总的取法即基本事件总数有 $n = (a + b)^k$ 种, 而第 k 次取到红球的取法有 $(a + b)^{k-1} \cdot a$ 。这时显然可得:

$$p = \frac{a}{a + b}$$

(2) 无放回取球的情况。前 k 人每人各取一只球, 每种取法是一个基本事件。一共存在 $A_{a+b}^k = (a + b)(a + b - 1)\cdots(a + b - k + 1)$ 个基本事件。并且由于每个人在袋中取球是等可能性的, 因而每个基本事件发生的可能性是相等的。当第 k 次取得的是红球, 该球可以是 a 个红球中的任意一个, 有 a 种取法, 而前 $k - 1$ 次取到的 $k - 1$ 个球是除该红球外剩下的 $a + b - 1$ 个球中的任意 $k - 1$ 个球, 共有 $A_{a+b-1}^{k-1} = (a + b - 1)(a + b - 2)\cdots[a + b - 1 - (k - 1) + 1]$ 种取法, 故此时:

$$p = a \cdot \frac{A_{a+b-1}^{k-1}}{A_{a+b}^k} = \frac{a}{a + b}$$

这里要特别提出注意的是 p 与 i 无关, 即 k 个人取球, 尽管取球的先后次序不同, 每人取到红球的概率却是一样的, 大家机会相同。另外在有放回取球的情况下得到的概率 p 也是相同的。这就是现实生活中抽签决定顺序的科学依据。

例 1.6 工厂有 200 个产品, 其中有 6 个是废品, 求:

- (1) 这批产品的废品率;
- (2) 任意从中取 3 个恰好有一个废品的概率;
- (3) 任意从中取 3 个全部都为正品的概率。

解 (1) 由题意可知, 我们可以设事件 A 为“任取一件是废品”, 此时基本事件的总数为 $n = C_{200}^1 = 200$, 由古典概率定义可得:

$$P(A) = \frac{6}{200} = 0.03$$

所以这批产品的废品率为 0.03。

(2) 由于从 200 个中取 3 个与顺序无关, 所以基本事件的总数为:

$$n = C_{200}^3$$