

经济应用数学系列教材

概率论与数理统计

主编 易伟明 谭光兴



华南理工大学出版社

经济应用数学系列教材

概率论与数理统计

主 编 易 明
副主编 郑 容



华南理工大学出版社

· 广州 ·

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 易伟明, 谭光兴主编. — 广州: 华南理工大学出版社, 1998.1

ISBN 7-5623-1174-9

I. 概 …

II. ① 易 … ② 谭 …

III. ① 概率论 - 高等学校 ② 数理统计 - 高等学校

IV. O21

华南理工大学出版社出版发行

(广州五山 邮编 510641)

各地新华书店经销

广州番禺官桥彩印厂印装

开本: 850×1168 1/32 印张: 14.375 字数: 368 千

1998 年 1 月第 1 版 1998 年 1 月第 1 次印刷

印数: 1—4100

定价: 20.00 元

《经济应用数学系列教材》编委会

主 任:林 勇

副主任:吴 江 刘 勤

委 员(按姓氏笔划):

万常选	王肇渝	刘 勤	刘梓修
吴 江	吴京慧	余仲弓	狄国强
林 勇	易伟明	徐升华	陶长琪
勒中坚	梅国平	郭润秀	程国达
谭光兴			

前 言

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的数学分支.它在经济领域以及各种管理学科中的应用越来越广泛,已成为高等财经院校各专业的重要基础课程之一.

本书是江西财经大学“经济应用数学系列教材”之一,可供高等院校财经类本科各专业作为教材使用(专科可选用),也可作为财经工作者自学用书.在教学使用中,可根据专业要求和教学时数等具体情况,对内容和分量作适当取舍.

本书的编写,严格按照教学大纲的规定和要求,并充分考虑财经类专业的特点,取材注重“三基”要求,尽可能做到结构合理,层次分明,语言流畅,通俗易懂,方便教学,同时尽量体现学科的系统性和严密性.

本书由易伟明、谭光兴任主编,郑培根、邹玉仁、柳键任副主编.谭光兴编写第一、六章;郑培根编写第二、三章;易伟明编写第四、七章;柳键编写第五、八章;邹玉仁编写第九、十章.本书编写大纲的拟定及修改和定稿工作,由易伟明、谭光兴共同完成.余仲弓审阅了全书原稿.

在本书编写过程中,得到了江西财经大学信息系、教务处领导及同仁的大力支持和帮助,在此一并表示感谢.

由于时间仓促,书中缺点错误在所难免,恳请读者和同仁批评指正.

编 者

1997年9月

目 录

第一章 随机事件及其概率	(1)
§ 1.1 随机事件	(1)
练习 1.1	(8)
§ 1.2 事件的概率	(9)
练习 1.2	(27)
§ 1.3 条件概率与全概率公式	(29)
练习 1.3	(46)
习题一	(47)
第二章 随机变量及其概率分布	(49)
§ 2.1 随机变量及其分布函数	(49)
§ 2.2 离散型随机变量及其概率分布	(54)
练习 2.2	(59)
§ 2.3 二项分布和泊松分布	(60)
练习 2.3	(68)
§ 2.4 连续型随机变量及其概率分布	(69)
练习 2.4	(76)
§ 2.5 正态分布	(77)
练习 2.5	(84)
§ 2.6 随机变量的函数及其概率分布	(84)
练习 2.6	(91)
习题二	(91)
第三章 多维随机向量及其概率分布	(94)

§ 3.1 随机向量及其联合分布函数	(94)
§ 3.2 二维离散型和连续型随机向量	(98)
练习 3.2	(112)
§ 3.3 随机向量的独立性	(113)
练习 3.3	(122)
§ 3.4 随机向量的函数及其概率分布	(124)
练习 3.4	(132)
习题三	(133)
第四章 随机变量的数字特征	(136)
§ 4.1 随机变量的数学期望	(136)
练习 4.1	(154)
§ 4.2 随机变量的方差	(155)
练习 4.2	(166)
§ 4.3 随机向量的数字特征	(166)
练习 4.3	(175)
习题四	(176)
第五章 极限定理	(180)
§ 5.1 大数定律	(180)
练习 5.1	(186)
§ 5.2 中心极限定理	(186)
练习 5.2	(196)
习题五	(196)
第六章 数理统计的基本概念	(198)
§ 6.1 总体与样本	(199)
练习 6.1	(203)
§ 6.2 抽样分布	(203)
练习 6.2	(214)
习题六	(215)

第七章 参数估计	(217)
§ 7.1 参数的点估计	(217)
练习 7.1	(228)
§ 7.2 点估计量的评价标准	(229)
练习 7.2	(234)
§ 7.3 参数的区间估计	(235)
练习 7.3	(251)
* § 7.4 比率的区间估计	(254)
练习 7.4	(259)
习题七	(259)
第八章 假设检验	(262)
§ 8.1 假设检验的基本概念	(262)
练习 8.1	(270)
§ 8.2 单个正态总体的参数假设检验	(270)
练习 8.2	(284)
§ 8.3 两个正态总体的参数假设检验	(285)
练习 8.3	(296)
* § 8.4 总体比率的假设检验	(297)
练习 8.4	(303)
* § 8.5 非参数假设检验	(303)
练习 8.5	(306)
习题八	(307)
第九章 方差分析	(313)
§ 9.1 单因素方差分析	(313)
练习 9.1	(326)
§ 9.2 双因素方差分析	(327)
练习 9.2	(341)
习题九	(342)

第十章 回归分析	(346)
§ 10.1 一元线性回归	(346)
练习 10.1	(364)
§ 10.2 一元非线性回归模型	(365)
练习 10.2	(371)
§ 10.3 多元线性回归	(372)
练习 10.3	(384)
习题十	(385)
参考答案	(387)
附表	(415)

(2) 每次试验均不能事先断言哪个结果将发生;

(3) 每一个结果或某些结果发生的可能性大小是确定的.

因此, 随机现象虽然不是确定性现象, 但也不是所有非确定性现象, 非确定现象中除了随机现象外还有不确定性现象. 不确定性现象不是本书讨论的内容.

下面列举了几个常见的随机试验.

随机试验 I 袋中盛有标号为 1 至 n 的外形、质地完全相同的小球 n 个, 从中任取一球, 观察取到的球的号码.

(以后我们遇到的小球都是外形、质地完全相同, 不另说明.)

随机试验 II 袋中盛有白球 a 个、黑球 b 个, 从中任取 k ($k \leq a + b$) 个, 考察取到白球的个数.

随机试验 III 考察某证券公司某日某种股票的交易量(手). 假定最大交易量为 N 手.

随机试验 IV 一射手射击某个目标, 射中即停, 考察该射手射击的次数.

随机试验 V 向一单位圆内投一质点, 考察质点的落点与圆心的距离.

随机试验中的可能结果如果不包含该试验的其他任何可能结果, 我们就称它为基本事件. 因此, 基本事件是某个试验中最小的可能结果. 而把由基本事件构成的其他可能结果称为复合随机事件, 简称为事件. 换句话说, 事件是若干基本事件的组合. 例如, 在随机试验 I 中, “取到的是第 3 号球” 是一个基本事件, 但“取到的是第 3 号或第 5 号或第 8 号球” 就是一个(复合)事件.

基本事件通常用小写希腊字母 ω 表示, 事件用大写英文字母 $A, B, C, \dots$ 表示. ω_i 表示第 i 个基本事件; $\omega \in A$ 表示事件 A 中包含了基本事件 ω , 因此一旦 ω 发生则 A 必定发生. 换句话说, A 发生当且仅当 A 中至少有一个基本事件发生. 基本事件也称作样本点, 一个随机试验的所有样本点组成的集合称为样本空间, 记作

Ω . 因此, 基本事件就是样本空间中的一个元素. 抽象出来就是样本空间中的一个点; 样本空间中的任何一个子集就是一个事件. 所以将基本事件抽象成了点, 事件就被抽象成了点集. 于是样本空间中的任何一个子集对应着该随机试验的一个事件, 空集对应着不可能事件, 全集对应着必然事件. 所以今后我们用 $\emptyset$ 表示不可能事件, 用 Ω 表示必然事件.

相应于前述五个随机试验, 我们可以写出它们的样本空间如下:

$\Omega_{\text{I}} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, 其中 ω_i 表示“取到的是第 i 号球”, $i = 1, 2, \dots, n$.

$\Omega_{\text{II}} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_l\}$, 其中 ω_i 表示“取到的 k 个球中有 i 个白球”, $i = 1, 2, \dots, l, l = \min(k, a)$.

$\Omega_{\text{III}} = \{0 \text{ 手}, 1 \text{ 手}, 2 \text{ 手}, \dots, N \text{ 手}\}$

$\Omega_{\text{IV}} = \{1 \text{ 次}, 2 \text{ 次}, \dots, n \text{ 次}, \dots\}$

$\Omega_{\text{V}} = \{x \mid 0 \leq x < 1\}$

二、事件的关系和运算

前面我们已经看到将基本事件当成一个点, 那么事件就是一个点集合. 现在我们用 $\mathcal{F}$ 表示包括空集 $\emptyset$ 和全集 Ω 在内的 Ω 的满足一定条件的子集组成的子集族, 那么 $\mathcal{F}$ 就是包括不可能事件和必然事件在内的事件组成的集合. 这个集合中的元素是事件 (基本事件是最小的事件), 因此我们把集合 $\mathcal{F}$ 称作事件域. 鉴于此, 我们把 $A \in \mathcal{F}$ 既可看作是一个集合又可看作是一个事件. 于是根据集合的关系和运算, 我们可以给出事件的关系和运算如下:

1. 包含关系

设 A, B 是两个事件, 如果 A 的基本事件都是 B 的基本事件, 则称 A 包含于 B 或 B 包含 A , 记为 $A \subset B$. 见图 1-1.

2. 相等关系

设 A 、 B 是两个事件, 如果 A 包含 B 且 B 也包含 A , 则称 A 等于 B , 记为 $A = B$. 见图 1-2.

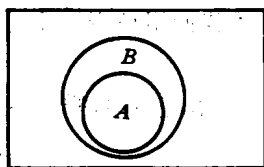


图 1-1

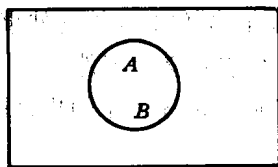


图 1-2

3. 互斥关系

设 A 、 B 是两个事件, 如果 A 的基本事件与 B 的基本事件没有一个共同的, 则称 A 与 B 互斥 (或互不相容). 显然, A 与 B 互斥时, A 与 B 不可能同时发生. 见图 1-3.

相等关系和互斥关系是对称关系.

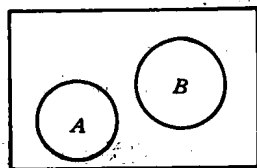


图 1-3

4. 事件的和

设 A 、 B 是两个事件, 把 A 的基本事件和 B 的基本事件合在一起组成一个新事件, 这个新事件称为 A 与 B 的和事件, 记为 $A \cup B$. 因此 $A \cup B$ 发生当且仅当 A 和 B 至少有一个发生. 见图 1-4.

5. 事件的积

设 A 、 B 是两个事件, 把 A 与 B 共有的基本事件组成一个新事件, 称这个新事件为 A 与 B 的积事件, 记为 $A \cap B$, 简记为 AB . 由此可见 AB 发生当且仅当 A 、 B 都发生. 因此, A 与 B 互斥意味着 $AB = \emptyset$. 见图 1-5.

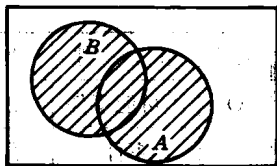


图 1-4

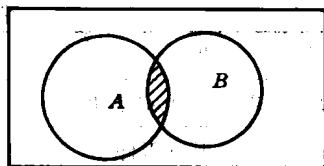


图 1-5

6. 事件的差

设 A, B 是两个事件, 从 A 的基本事件中除去 B 的基本事件, 剩下的基本事件组成的新事件称为 A 与 B 的差事件, 记为 $A - B$. 因此, $A - B$ 发生意味着 A 发生但 B 不发生. 所以 $A - B = \overline{AB}$. 见图 1-6. 注意: $A - B$ 与 $B - A$ 互斥.

7. 事件的逆(对立事件)

设 A 是一个随机事件, 称 $\Omega - A$ 为 A 的对立事件(或 A 的逆事件), 记为 $\overline{A}$. 由此可知: $A = \overline{\overline{A}}, \overline{AA} = \emptyset, A \cup \overline{A} = \Omega$. 所以若 A 是 B 的对立事件, 则 A 与 B 互斥, 且 $A \cup B = \Omega$. A 与 B 互斥不一定 A 与 B 对立. 见图 1-7.

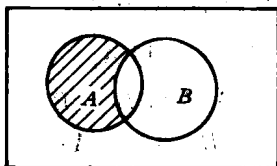


图 1-6

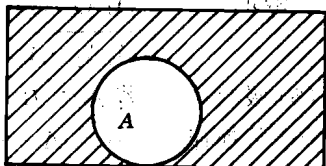


图 1-7

总结以上事件的关系和运算, 我们可以用下表将事件与集合的对应关系表示如下:

表 1-1

记号	事 件	集合	记号	事 件	集合
Ω	样本空间、必然事件	全集	$\emptyset$	不可能事件	空集
ω	基本事件	元素	A	事件	子集
$A \subset B$	包含关系	包含关系	$A = B$	相等关系	相等关系
$AB = \emptyset$	互斥关系	不交关系	$A \cup B$	和事件	并集
AB	积事件	交集	$A - B$	差事件	差集
$\bar{A}$	逆(对立)事件	余集			

根据事件与集合的对应关系及集合运算的性质,我们可以得到事件运算的性质:

(1) 交换律 $AB = BA \quad A \cup B = B \cup A$

(2) 结合律 $(AB)C = A(BC)$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

(3) 分配律 $A \cap (B \cup C) = AB \cup AC$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

(4) 对偶律 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \bar{B} \quad \overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$

一般地 $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_n$

$$\overline{\bar{A}_1 \bar{A}_2 \cdots \bar{A}_n} = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

(5) 吸收律 若 $A \subset B$ 则 $AB = A, A \cup B = B$.

(6) 替换律 $AB = A - (A - B) = B - (B - A)$

$$A \cup B = A \cup (B - A) = B \cup (A - B)$$

$$A - B = A - AB = (A \cup B) - B = A\bar{B}$$

$$A - B - C = A - (B \cup C) = A\bar{B}\bar{C}$$

学习了事件的关系和运算以后,我们要掌握下面两点:①能够解释含有运算符号的事件表达式;②对于给定的事件可以通过运

算符号用其他事件表示出来.

例1 甲、乙两人对同一目标各射击一次, A 表示“甲击中”, B 表示“乙击中”. 试说明下列事件的意义: (1) $A \cup B$; (2) AB ; (3) $\bar{A}$; (4) $\bar{A} \bar{B}$; (5) $\bar{A} \cup \bar{B}$.

解 (1) $A \cup B$ 表示甲、乙两人至少有一人击中;

(2) AB 表示甲、乙两人都击中;

(3) $\bar{A}$ 表示甲未击中;

(4) $\bar{A} \bar{B}$ 表示甲、乙两人都未击中;

(5) $\bar{A} \cup \bar{B}$ 表示甲、乙两人至少有一人未击中. 因 $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{AB}$, 故 $\bar{A} \cup \bar{B}$ 还可解释为甲、乙两人不同时击中.

例2 生产某种产品需要两道工序, 只要有一道工序不合要求产品即不合格. 对于一件产品, 用 A_i ($i = 1, 2$) 表示第 i 道工序加工不合要求, A 表示产品不合格, B 表示产品合格. 试用事件的运算符号表示以上诸事件间的关系.

解 $\bar{A} = B$ $A = A_1 \cup A_2$ $B = \bar{A}_1 \bar{A}_2$

例3 在一次股票交易中某人买下了三种股票, 用 A_i 表示第 i 种股票盈利, $i = 1, 2, 3$. 试用 A_i 表示下列事件: (1) A = “第一种股票盈利第三种股票不盈利”; (2) B = “三种股票都不盈利”; (3) C = “三种股票中恰好有二种盈利”; (4) D = “至少有一种股票盈利”; (5) E = “只有第二种股票盈利”.

解 (1) $A = A_1 \bar{A}_3 = A_1 - A_3$

(2) $B = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 = \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$

(3) $C = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$

(4) $D = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \bar{B}$

(5) $E = \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 = A_2 - A_1 - A_3$

练习 1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间(列出全部样本点):

(1) 从分别标有 0, 1, 2, 3 的 4 张卡片中先后取出两张(取后不放回), 考察组成的两位数码;

(2) 从盛有 m 个红球, n 个白球的罐中连续取三次球, 每次取一个, 记下颜色后放回罐中, 考察取到球的颜色排列情况;

(3) 某日某大商场接待的顾客人数.

2. 设 A, B, C 是三个事件, 试解释下列关系的概率意义: (1) $ABC = A$; (2) $A \cup B \cup C = A$; (3) $AB \subset C$; (4) $A \subset \overline{BC}$; (5) $A \subset \overline{B} \cap \overline{C}$.

3. 试将 $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ 表示成三个互斥事件的和.

4. 在某班任选一个学生, 记 $A =$ “选到的是男同学”; $B =$ “选到的人学习优秀”; $C =$ “选到的人不爱体育运动”.

(1) 解释 $\overline{ABC}$ 和 $\overline{ABC}$ 的意义;

(2) 在什么条件下成立 $\overline{ABC} = A$;

(3) 在什么条件下成立 $C \subset B$;

(4) 在什么条件下成立 $\overline{A} = \overline{BC}$.

5. 设 A, B, C, D 是 4 个事件, 试通过运算符号表示下列事件:

(1) 4 个事件至少发生 1 个;

(2) 4 个事件恰好发生 1 个;

(3) A 和 B 发生但 C 和 D 不发生;

(4) 4 个事件都不发生;

(5) 4 个事件至多发生 1 个;

(6) 4 个事件至少发生 2 个;

(7) 4 个事件中只有 A 不发生.

6. 试证明对偶律中的一般情形(即 $n \geq 3$ 时的情形).

7. 试证明: 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是 n 个事件, 若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互斥(即当 $i \neq j$ 时, $A_i A_j = \emptyset$), 则 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中任何 3 个或 3 个以上事件的积都是 $\emptyset$.

8. 试证明: $A - B - C - D = \overline{A} \overline{B} \overline{C} \overline{D}$.

§ 1.2 事件的概率

概率论的根本任务是研究随机事件的数量规律性,因此,概率论不仅关心随机试验的结果(事件),而且更关心事件发生的可能性大小.本节我们将讨论描述事件发生的可能性大小的度量.

一、概率的统计意义

设 A 是随机试验 E 的一个结果(事件),在 n 次重复试验(即试验条件完全相同)中,事件 A 发生的次数记为 $r_n(A)$,则有 $0 \leq r_n(A) \leq n$. 我们称 $r_n(A)$ 为事件 A 在 n 次重复试验中发生的频率,称比值

$$P_n(A) = \frac{r_n(A)}{n}$$

为事件 A 在 n 次重复试验中发生的频率.显然有

$$0 \leq P_n(A) \leq 1$$

例4 投掷一枚均匀硬币 n 次, A 表示“国徽朝上”,考察 A 在这 n 次投掷中发生的频数和频率.

解 历史上曾有不少人作过这项试验,表1-2记录了部分试验结果.

表中数字说明:随着试验次数的增加,频率越来越接近常数 0.5.

例5 (高尔顿试验) 装置如图1-8所示,自上端放入一小球,任其自由下落,在下落过程中当小球碰到钉子时从左边落下还是从右边落下机会相等,碰到下一排钉子时又是如此,最后落入底板中的某一格内.尽管放入的球将落入哪个格中事先无法料知,但试验表明,当大量放入小球时,最后所呈现的截面图形几乎总是相同.换言之,落入指定格中球的频率几乎总是相等.